

Zeitschrift:	Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber:	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band:	16 (1943-1944)
Artikel:	Enden offener Räume und unendliche diskontinuierliche Gruppen.
Autor:	Hopf, Heinz
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-15550

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Enden offener Räume und unendliche diskontinuierliche Gruppen

Von HEINZ HOPF, Zürich

Herrn C. Carathéodory zum 70. Geburtstag.

Die topologische Untersuchung geschlossener Mannigfaltigkeiten oder allgemeinerer kompakter Räume führt in bekannter Weise zur Betrachtung von diskontinuierlichen, kompakten Fundamentalbereiche besitzenden Transformationsgruppen offener — d. h. nicht-kompakter — Räume: der universelle Überlagerungsraum R eines kompakten Raumes R_0 ist im allgemeinen offen, und die Gruppe der Decktransformationen, welche R_0 erzeugen, hat die genannten Eigenschaften; das Analoge gilt, wenn man statt der universellen irgend eine reguläre Überlagerung nimmt¹⁾. Umgekehrt entsteht, wenn ein offener Raum R vorgelegt ist, die Frage, ob er eine derartige Gruppe gestattet. Es zeigt sich nun, daß hierfür nur sehr spezielle offene Räume in Frage kommen, und zwar selbst dann, wenn man von den Transformationen nicht verlangt, daß sie, wie Decktransformationen, fixpunktfrei seien, und selbst dann, wenn man überdies darauf verzichtet, daß die Transformationen eine Gruppe bilden; es soll also nur gefordert werden, daß es eine Menge \mathfrak{G} topologischer Selbstabbildungen von R gibt, welche diskontinuierlich ist und einen kompakten Fundamentalbereich besitzt — wobei die Begriffe „diskontinuierlich“ und „Fundamentalbereich“ noch in einer Weise präzisiert werden sollen, die von dem Üblichen kaum abweicht (Nr. 7, Nr. 9); ein solcher offener Raum R soll kurz ein „ \mathfrak{G} -Raum“ heißen.

Die im folgenden betrachtete Bedingung, welche ein \mathfrak{G} -Raum erfüllen muß, bezieht sich auf den anschaulichen Begriff der „unendlich fernen Enden“ eines offenen Raumes, und besonders auf die Anzahl dieser Enden; über diesen Begriff sei im Augenblick zur Orientierung nur soviel gesagt: man nehme aus einem kompakten Raum²⁾ k Punkte oder Kontinuen E_1, \dots, E_k heraus, die zueinander fremd sind und die Eigenschaft haben, daß keine Umgebung von E_i durch E_j zerlegt wird (ist der Raum eine Mannigfaltigkeit und seine Dimension ≥ 2 , so dürfen die E_i , demnach beliebige Punkte sein); dann entsteht ein offener Raum,

¹⁾ Wegen der Theorie der Überlagerungen vgl. man *Seifert-Threlfall*, Lehrbuch der Topologie (Leipzig-Berlin 1934), 8. Kap.; ferner: *H. Weyl*, Die Idee der Riemannschen Fläche (Leipzig-Berlin 1913), § 9; *H. Hopf*, Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, 2. Teil, Math. Annalen 102 (1929), 562—623, § 1.

²⁾ Der Raumbegriff wird in Nr. 1 präzisiert werden.

der k unendlich ferne Enden hat; so besitzen die Ebene und die mehrdimensionalen euklidischen Räume ein Ende, die Gerade und der unendliche Kreiszylinder zwei Enden.

Eine allgemeine und befriedigende Theorie der Enden offener topologischer Räume — und zwar der Räume einer Klasse, welche jedenfalls die Mannigfaltigkeiten und die Polyeder umfaßt — ist von Freudenthal entwickelt worden³⁾; sie ist nahe verwandt mit Carathéodorys Theorie der Primenden. Die für uns wichtigen Hauptpunkte der Freudenthalschen Theorie werden im § 1 formuliert werden.

Unser Hauptsatz lautet nun:

Ein \mathfrak{G} -Raum hat entweder genau ein Ende oder zwei Enden oder eine Endenmenge von der Mächtigkeit des Kontinuums⁴⁾.

Der Beweis wird im § 2 geführt werden; er lehnt sich an den Beweis eines ähnlichen Satzes von Freudenthal an, in dem es sich nicht um diskontinuierliche, sondern um kontinuierliche Scharen von Transformationen handelt⁵⁾.

Auf Grund unseres Satzes lassen sich die \mathfrak{G} -Räume in drei Klassen einteilen, je nach der Anzahl 1, 2 oder ∞ der Enden. Beispiele, und zwar von universellen Überlagerungen geschlossener Mannigfaltigkeiten, aus den drei Klassen sind die folgenden: die universelle Überlagerung des Torus, also die Ebene, hat ein Ende; die universelle Überlagerung des Kreises, also die Gerade, hat zwei Enden; die universelle Überlagerung der 3-dimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeit, welche die Summe⁶⁾ zweier Exemplare des topologischen Produktes von Kreis und Kugel ist, hat unendlich viele Enden (cf. Nr. 20); verzichtet man auf die Mannigfaltigkeits-Eigenschaft, so wird das einfachste Beispiel für den Fall unendlicher vieler Enden wohl durch den unendlichen Baumkomplex geliefert, der regulär vom Grade 4 ist⁷⁾ und die universelle Überlagerung einer Lemniskate darstellt⁸⁾.

³⁾ H. Freudenthal, Über die Enden topologischer Räume und Gruppen, Math. Zeitschrift 33 (1931), 692—713.

⁴⁾ In dem letzten Fall bilden die Enden, in einem noch zu präzisierenden Sinne, eine diskontinuierliche perfekte Menge (Nr. 11).

⁵⁾ l. c., Satz 15.

⁶⁾ Seifert-Threlfall, l. c., 218.

⁷⁾ Ein Streckenkomplex heißt ein Baum, wenn er keinen geschlossenen Streckenzug enthält; er heißt regulär vom Grade n , wenn von jedem Eckpunkt genau n Strecken ausgehen.

⁸⁾ Ein Beispiel einer offenen Fläche mit unendlich vielen Enden, die reguläre Überlagerung einer geschlossenen Fläche ist, findet man bei v. Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie (Berlin 1923), 181—182.

Dagegen gibt es nach unserem Satz für kein endliches $k > 2$ eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit, die von der k -mal punktierten Sphäre S^n überlagert würde — im Gegensatz zu $k = 1$ (die einmal punktierte S^n überlagert den n -dimensionalen Torus) und zu $k = 2$ (die zweimal punktierte S^n überlagert das Produkt $S^1 \times S^{n-1}$); damit ist eine Frage beantwortet, die von Herrn Threlfall im Zusammenhang mit dem Problem der Klassifikation der geschlossenen 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten formuliert worden war und die mich zu den hier entwickelten Überlegungen angeregt hat. Übrigens ist unsere Einteilung der geschlossenen Mannigfaltigkeiten in vier Klassen — jenachdem die universelle Überlagerungsmannigfaltigkeit geschlossen ist oder ein Ende oder zwei Enden oder unendlich viele Enden hat — vielleicht auch sonst nützlich für die weitere Behandlung des genannten Klassifikations-Problems.

Obwohl der Hauptsatz allgemeinere Gültigkeit hat, so ist der interessanteste Fall doch der, in dem \mathfrak{G} eine *Gruppe* ist. Hier entsteht die Frage nach Zusammenhängen zwischen der algebraischen Struktur von \mathfrak{G} und der Endenzahl des \mathfrak{G} -Raumes; sie wird im § 3 behandelt, allerdings hauptsächlich nur für den Spezialfall, in dem \mathfrak{G} die Decktransformationen-Gruppe einer regulären Überlagerung R eines endlichen Polyeders (beliebiger Dimension) ist. Dann wird gezeigt, daß die *Endenzahl des Raumes R durch die Struktur der Gruppe \mathfrak{G} bestimmt* ist; mit anderen Worten: zwei derartige \mathfrak{G} -Polyeder mit isomorphen Gruppen \mathfrak{G} haben die gleiche Endenzahl. Nun läßt sich aber jede abstrakte Gruppe \mathfrak{G} , die von endlich vielen Elementen erzeugt wird, als eine solche Decktransformationen-Gruppe — und zwar sogar eines Polygons, d. h. eines eindimensionalen Polyeders — darstellen; somit darf man von der *Endenzahl einer abstrakten Gruppe* sprechen, und es ergibt sich eine Einteilung der Gesamtheit aller unendlichen, von endlich vielen Elementen erzeugten Gruppen in drei Klassen; und nicht nur die Anzahl der Enden, sondern auch die Enden selbst erweisen sich als Eigenschaften der abstrakten Gruppen: sie können durch gewisse unendliche Folgen von Gruppen-Elementen charakterisiert werden. Aber eine rein algebraische Theorie dieser Gruppen-Enden, ohne Bezugnahme auf spezielle Darstellungen der Gruppen durch Überlagerungs-Räume, ist mir nicht bekannt, und das Problem, die Endenzahl 1, 2 oder ∞ aus der bekannten Struktur einer Gruppe — oder aus Erzeugenden und definierenden Relationen — zu bestimmen, bleibt ungelöst^{o)}; das Wenige, was ich hierüber weiß, wird im § 3 gesagt.

^{o)} Man beachte jedoch Fußnote 17.

§ 1. Allgemeines über Räume und ihre Enden

1. Unter einem „Raum“ soll immer ein Hausdorffscher Raum mit abzählbarer Basis verstanden werden, der lokal kompakt, lokal zusammenhängend und zusammenhängend ist. Alle zusammenhängenden Polyeder, endlich oder unendlich, also speziell alle Mannigfaltigkeiten, geschlossen oder offen, sind derartige Räume. Wie es bei Mannigfaltigkeiten üblich ist, nennen wir einen nicht-kompakten Raum „offen“; (dagegen soll unter einer offenen Punktmenge eines Raumes immer eine solche verstanden werden, deren Komplementärmenge abgeschlossen ist).

2. R sei ein offener Raum. Nach Freudenthal¹⁰⁾ sind seine „Endpunkte“ oder kurz „Enden“¹¹⁾ folgendermaßen definiert: jede absteigende Folge $G_1 \supset G_2 \supset \dots$ von Punktmenzen G_i , welche offen sind, kompakte Begrenzungen besitzen und für welche der Durchschnitt ihrer abgeschlossenen Hullen leer ist, bestimmt ein Ende; zwei solche Folgen $\{G_i\}, \{G'_i\}$ bestimmen dasselbe Ende, wenn es zu jedem i ein j mit $G'_j \subset G_i$ gibt; (es gibt dann von selbst zu jedem j ein k mit $G_k \subset G'_j$).

Freudenthal zeigt nun: Indem man zu der Menge aller Punkte von R die Enden von R als neue „ideale“ Punkte hinzufügt und in dieser Vereinigungsmenge einen geeigneten Umgebungs begriff einführt, der den in R gegebenen Umgebungs begriff nicht ändert, wird R zu einem kompakten Raum \bar{R} erweitert, in welchem die Endenmenge $\mathfrak{E} = \bar{R} - R$ abgeschlossen und nirgends dicht ist und die folgende Eigenschaft hat (durch welche diese Abschließung von R vor allen anderen ausgezeichnet ist): jeder Punkt $E \in \mathfrak{E}$ besitzt beliebig kleine Umgebungen H_i derart, daß nicht nur H_i , sondern auch der Durchschnitt H'_i von H_i und R zusammenhängend ist, und daß die Begrenzung von H_i kompakt ist und in R liegt; (daß es „beliebig kleine“ H_i gibt, bedeutet: in jeder beliebigen Umgebung von E gibt es ein H_i). Die topologische Struktur von \bar{R} und von \mathfrak{E} ist durch R vollständig bestimmt; (dies wird sich unten in Nr. 5 noch einmal ergeben).

3. Man kann die Enden statt durch Mengenfolgen $\{G_i\}$ auch durch Punktfolgen, die gegen ein Ende streben, charakterisieren.

Eine Punktfolge x_1, x_2, \dots in R heißt divergent, wenn sie keinen Häufungspunkt hat, oder, was dasselbe ist: wenn in jeder kompakten Teilmenge von R höchstens endlich viele x_n liegen. Allgemeiner soll eine

¹⁰⁾ I. c., §§ 1, 2.

¹¹⁾ Indem ich nicht zwischen „Endpunkt“ und „Ende“ unterscheide, welche ich etwas von Freudenthals Terminologie ab.

Folge von Punktmenzen M_1, M_2, \dots divergent heißen, wenn jede kompakte Menge mit höchstens endlich vielen M_n Punkten gemeinsam hat.

Es gilt nun folgendes:

Ist x_1, x_2, \dots eine in R divergente Punktfolge, so konvergiert sie in \bar{R} dann und nur dann gegen einen Punkt $E \in \mathfrak{E}$, wenn es für jedes n ein solches, x_n mit x_{n+1} verbindendes Kontinuum (z. B. einen Weg) W_n in R gibt, daß die Folge der W_n in R divergiert. Sind x_1, x_2, \dots und y_1, y_2, \dots zwei Punktfolgen, welche die soeben ausgesprochene Bedingung erfüllen, so streben sie dann und nur dann gegen denselben Punkt E , wenn es für jedes n ein solches, x_n mit y_n verbindendes Kontinuum W_n in R gibt, daß die Folge der W_n in R divergiert.

Diese Tatsachen charakterisieren die Enden von R mit Hilfe von Punktfolgen in R .

Der Beweis ergibt sich leicht mit Hilfe der Umgebungen H_i , die in Nr. 2 besprochen wurden. Es sei erstens $\{x_n\}$ eine Punktfolge in R , die in \bar{R} gegen E strebt; dann nehme man eine absteigende Folge von Umgebungen H_i , deren Durchschnitt der Punkt E ist; für jedes (hinreichend große) n sei i_n das größte i , für das x_n und x_{n+1} in H_i liegen; dann strebt i_n mit n gegen unendlich; W_n sei ein Kontinuum, das x_n und x_{n+1} in H'_{i_n} (cf. Nr. 2) verbindet; dann divergieren die W_n in R . — Es sei zweitens $\{x_n\}$ eine in R divergente Folge, die nicht gegen einen Endpunkt E strebt; dann enthält sie zwei Teilfolgen, die gegen zwei verschiedene Endpunkte E und E' streben; man nehme eine Umgebung H von E , die E' nicht enthält, und deren Rand K eine kompakte Menge in R ist; für unendlich viele n liegt x_n , aber nicht x_{n+1} in H , und jedes Kontinuum, das x_n und x_{n+1} verbindet, trifft K ; eine Folge von solchen W_n kann nicht divergieren. — Drittens: die Folgen $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ mögen beide gegen E streben; dann strebt auch die Folge $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$ gegen E , und auf Grund der bereits bewiesenen ersten Behauptung kann man x_n mit y_n durch ein Kontinuum W_n so verbinden, daß die Folge dieser W_n divergiert. — Viertens: wenn $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ gegen verschiedene Endpunkte E und E' streben, so habe K dieselbe Bedeutung wie beim Beweis der zweiten Behauptung; wie dort sieht man, daß es keine divergente Folge von Kontinuen W_n geben kann, welche x_n und y_n verbinden.

4. Es seien jetzt R und R' zwei Räume. Eine stetige Abbildung f von R in R' heiße „kompakt“, wenn jede in R divergente Punktfolge auf eine in R' divergente Folge abgebildet wird. Wenn f kompakt und $\{M_n\}$ eine divergente Mengenfolge in R ist, so divergiert auch die Folge der Bildmengen $f(M_n)$ in R' ; denn andernfalls gäbe es eine kompakte

Teilmenge K' von R' , mit welcher unendlich viele Mengen $f(M_n)$ Punkte gemeinsam hätten; für jedes n gäbe es also ein $x_n \in M_n$ mit $f(x_n) \in K'$; die Folge der x_n wäre divergent, die der $f(x_n)$ aber nicht — im Widerspruch zu der Kompaktheit von f .

Wir erweitern R und R' durch ihre Endenmengen \mathfrak{E} , \mathfrak{E}' zu den Räumen \bar{R} , \bar{R}' und behaupten:

Eine kompakte stetige Abbildung f von R in R' läßt sich immer durch Erklärung einer Abbildung von \mathfrak{E} in \mathfrak{E}' zu einer stetigen Abbildung \bar{f} von \bar{R} in \bar{R}' erweitern.

Beweis: E sei ein Punkt von \mathfrak{E} . Es gibt eine gegen E strebende Punktfolge $\{x_n\}$ in R ; da \bar{R}' kompakt und f kompakt ist, haben die Punkte $f(x_n)$ wenigstens einen Häufungspunkt $E' \in \mathfrak{E}'$; indem wir allenfalls zu einer Teilfolge übergehen, dürfen wir annehmen, daß die $f(x_n)$ gegen E' streben. Wir behaupten zunächst: Ist $\{y_n\}$ irgend eine gegen E strebende Folge in R , so streben die $f(y_n)$ gegen denselben E' . In der Tat: in R existieren Kontinuen W_n , die immer x_n mit y_n verbinden, so daß ihre Folge divergiert; dann divergiert wegen der Kompaktheit von f auch die Bildfolge $f(W_n)$, und hieraus folgt, daß keine Teilfolge der $f(y_n)$ gegen einen von E' verschiedenen Punkt von \mathfrak{E}' streben kann (Nr. 3); daher muß $f(y_n) \rightarrow E'$ gelten. Demnach können wir für jeden Punkt $E \in \mathfrak{E}$ das Bild $\bar{f}(E) \in \mathfrak{E}'$ so erklären, daß folgendes gilt: aus $x_n \rightarrow E$, $x_n \in R$ folgt $f(x_n) \rightarrow \bar{f}(E)$; für $x \in R$ setzen wir $\bar{f}(x) = f(x)$. Um die Stetigkeit dieser Abbildung \bar{f} von \bar{R} in \bar{R}' zu beweisen, bleibt noch zu zeigen: aus $E_n \rightarrow E$, $E_n \in \mathfrak{E}$ folgt $\bar{f}(E_n) \rightarrow \bar{f}(E)$; mit anderen Worten: es gelte $E_n \rightarrow E$, $E_n \in \mathfrak{E}$, und es sei E' ein Häufungspunkt der Folge $\{\bar{f}(E_n)\}$; dann ist $E' = \bar{f}(E)$. Um dies zu zeigen, nehmen wir zunächst beliebige Umgebungen U , U' von E bzw. E' ; für ein gewisses n ist dann $E_n \in U$, $\bar{f}(E_n) \in U'$; nach Definition von \bar{f} gibt es in R eine Folge x_n^1, x_n^2, \dots , die gegen E_n strebt, so daß die $f(x_n^i)$ gegen $\bar{f}(E_n)$ streben; es gibt daher einen Index i_n , so daß $x_n^{i_n} \in U$, $f(x_n^{i_n}) \in U'$ ist; auf diese Weise kann man, da U , U' beliebige Umgebungen von E bzw. E' waren, in R eine Folge $\{x_n = x_n^{i_n}\}$ so finden, daß $x_n \rightarrow E$, $f(x_n) \rightarrow E'$ gilt; das bedeutet aber: $E' = \bar{f}(E)$.

5. Jede topologische Abbildung f eines Raumes R auf einen Raum R' ist kompakt; denn gäbe es eine divergente Folge $\{x_n\}$ in R , deren Bildfolge $\{f(x_n)\}$ einen Häufungspunkt x' hätte, so würde die Betrachtung der Abbildung f^{-1} in der Umgebung von x' zu einem Widerspruch führen. Daher läßt sich nach Nr. 4 die topologische Abbildung f von R auf R' durch Erklärung einer Abbildung von \mathfrak{E} in \mathfrak{E}' zu einer eindeutigen und stetigen Abbildung \bar{f} von \bar{R} in \bar{R}' erweitern; analog existiert eine

Abbildung \bar{g} von \bar{R}' in \bar{R} , welche eine Erweiterung der Umkehrungsabbildung $g = f^{-1}$ ist. Dann ist die Zusammensetzung $\bar{g}\bar{f}$ eine stetige Abbildung von \bar{R} in sich, welche eine Erweiterung der identischen Abbildung von R auf sich ist; da R überall dicht in \bar{R} ist, folgt hieraus, daß $\bar{g}\bar{f}$ die identische Abbildung von \bar{R} auf sich ist; insbesondere ist $\bar{g}\bar{f}(E) = E$ für jeden $E \in \mathfrak{E}$. Ebenso ergibt sich $\bar{f}\bar{g}(E') = E'$ für jeden $E' \in \mathfrak{E}'$. Aus $\bar{g}\bar{f}(E) = E$ folgt, daß die Abbildung \bar{f} von \mathfrak{E} eindeutig ist; aus $\bar{f}\bar{g}(E') = E'$ folgt, daß \bar{f} die Menge \mathfrak{E} auf die ganze Menge \mathfrak{E}' abbildet; durch \bar{f} wird also \mathfrak{E} topologisch auf \mathfrak{E}' , und daher auch \bar{R} topologisch auf \bar{R}' abgebildet. Es gilt also folgendes:

Jede topologische Abbildung f von R auf R' läßt sich durch eine topologische Abbildung von \mathfrak{E} auf \mathfrak{E}' zu einer topologischen Abbildung \bar{f} von \bar{R} auf \bar{R}' erweitern.

Hierin ist noch einmal der Satz (cf. Nr. 2) enthalten, daß \mathfrak{E} und \bar{R} in topologisch invarianter Weise mit R verknüpft sind.

6. In dem Raum R sei R_1 eine Punktmenge, die nicht kompakt, aber abgeschlossen ist. Da R_1 nicht kompakt ist, gibt es in R_1 divergente Punktfolgen; da R_1 abgeschlossen ist, divergiert jede dieser Folgen auch in R ; ebenso divergiert jede in R_1 divergente Mengenfolge auch in R . Hieraus ist auf Grund der in Nr. 3 gegebenen Charakterisierung der Enden ersichtlich, daß jedem Ende von R_1 ein bestimmtes Ende von R entspricht (man kann dasselbe auch so ausdrücken: die Abbildung, die jeden Punkt von R_1 sich selbst zuordnet, ist infolge der Abgeschlossenheit von R_1 eine kompakte Abbildung von R_1 in R , und nach Nr. 4 gehört daher zu ihr eine Abbildung der Endenmenge von R_1 in die Endenmenge von R). Es braucht aber nicht jedes Ende von R einem Ende von R_1 zu entsprechen, und ein Ende von R kann mehreren Enden von R_1 entsprechen.

Wir betrachten jetzt den Spezialfall, in dem R triangulierbar, also ein unendliches Polyeder¹²⁾ und R_1 das Polygon ist, das aus den Kanten einer festen Simplizialzerlegung von R besteht; dann ist R_1 nicht kompakt, aber abgeschlossen. Wir behaupten, daß dann jedes Ende E von R einem und nur einem Ende von R_1 entspricht.

Beweis: Es sei $\{x_n\}$ eine gegen E strebende Punktfolge in R , und für

¹²⁾ Ein „Polyeder“ ist ein Raum, der homöomorph mit einem „Euklidischen Polyeder“ im Sinne von Alexandroff-Hopf, Topologie I (Berlin 1935), 129, ist; dies ist auf Grund des „Einbettungssatzes“, l. o., 158—159, gleichbedeutend damit, daß der Raum eine Simplizialzerlegung gestattet, die ein „absoluter Komplex“ (l. o., 158) ist. Für die unendlichen Polyeder ist die Eigenschaft der „lokalen Endlichkeit“ (l. o., 129) wichtig; sie wird im folgenden benutzt.

jedes n sei W_n ein Simplex der betrachteten Zerlegung von R , das x_n enthält; aus der Divergenz der x_n folgt, da eine kompakte Menge immer nur mit endlich vielen Simplexen Punkte gemeinsam hat, die Divergenz der Mengenfolge $\{W_n\}$; hieraus folgt, wenn y_n einen Eckpunkt von W_n bezeichnet, daß auch die y_n gegen E streben; das bedeutet: E entspricht dem durch die Folge $\{y_n\}$ repräsentierten Ende von R_1 . Es seien ferner E_1, E'_1 zwei Enden von R_1 , denen E entspricht; dann gibt es Punktfolgen $\{z_n\}, \{z'_n\}$ in R_1 , die gegen E_1 bzw. E'_1 streben, und die, als Punktfolgen in R , beide gegen E streben; letzteres bedeutet: es gibt für jedes n in R ein Kontinuum W_n , das z_n mit z'_n verbindet, so daß die W_n divergieren. Nun sei K_n das Teilpolyeder von R , das aus allen Simplexen besteht, die Punkte von W_n enthalten, und k_n das Polygon, das von allen Kanten dieser Simplexe gebildet wird; mit den W_n divergieren auch die K_n und mit diesen auch die k_n ; da aber die k_n Kontinuen in R_1 sind, welche immer z_n und z'_n verbinden, ist $E_1 = E'_1$. Das heißt: E entspricht nur einem Ende von R_1 .

Damit ist gezeigt: Ist R ein Polyeder und R_1 das von allen Kanten einer Simplizialzerlegung von R gebildete Polygon, so ist die Endenmenge \mathfrak{E} von R identisch mit der Endenmenge \mathfrak{E}_1 von R_1 ; bei der Untersuchung der Enden von R kann man sich also (im Sinne von Nr. 3) auf die Betrachtung von Punkt- und Mengenfolgen in R_1 beschränken.

§ 2. Enden und diskontinuierliche Abbildungsmengen

7. Wir betrachten stetige Abbildungen eines Raumes R in einen Raum R' . Eine Menge \mathfrak{G} solcher Abbildungen f heiße „*stark diskontinuierlich*“, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

(A) Je zwei Punkte $x \in R, x' \in R'$ besitzen solche Umgebungen U bzw. U' , daß für höchstens endlich viele f aus \mathfrak{G} die Bilder $f(U)$ Punkte mit U' gemeinsam haben.

Diese Bedingung ist mit der folgenden äquivalent:

(A') Sind K, K' kompakte Mengen in R bzw. R' , so haben für höchstens endlich viele f aus \mathfrak{G} die Bilder $f(K)$ Punkte mit K' gemeinsam.

Daß (A) aus (A') folgt, ergibt sich daraus, daß unsere Räume lokal kompakt sind, daß also die Punkte x, x' Umgebungen besitzen, deren abgeschlossenen Hullen kompakt sind. Um zu sehen, daß (A') aus (A) folgt, nehmen wir an, es gelte (A), aber nicht (A'); dann gäbe es kompakte Mengen K, K' und unendliche Folgen von Punkten $x_n \in K, x'_n \in K'$ und von Abbildungen $f_n \in \mathfrak{G}$ mit $f_n(x_n) = x'_n$; die Mengen $\{x_n\}, \{x'_n\}$ hätten Häufungspunkte x bzw. x' , und diese besäßen Umgebungen

U, U' , welche einerseits (A) erfüllten, während andererseits für unendlich viele n die x_n in U , die x'_n in U' lägen; dies ist ein Widerspruch.

Der wichtigste Fall ist der, in dem $R = R'$ und \mathfrak{G} eine Gruppe topologischer Abbildungen ist; die dann übliche Bedingung der „eigentlichen“ Diskontinuität¹³⁾ ist etwas schwächer als unsere Bedingung der „starken“ Diskontinuität.

Wir bleiben aber vorläufig noch bei dem allgemeinen Fall, in dem $R \neq R'$ und \mathfrak{G} eine Menge beliebiger stetiger Abbildungen sein darf.

8. Die Bedeutung der Aussage, daß für eine Abbildungsfolge $\{f_n\}$ und einen Punkt $y \in R$ die Bildfolge $\{f_n(y)\}$ gegen ein Ende E' von R' konvergiert, ist klar: es handelt sich um den gewöhnlichen Konvergenzbegriff in dem Raum $\overline{R'}$; ebenso natürlich ist die Erklärung der Aussage, daß die Folge $\{f_n\}$ auf einer Punktmenge M von R gleichmäßig gegen den Endpunkt E' von R' konvergiert: zu jeder Umgebung U von E' in $\overline{R'}$ gibt es ein solches n_0 , daß für alle $n \geq n_0$ die Bilder $f_n(M)$ in U liegen.

Hilfsatz 1. \mathfrak{G} sei eine stark diskontinuierliche Menge von Abbildungen des Raumes R in den Raum R' ; es gebe in R eine gegen einen Punkt x konvergierende Punktfolge $\{x_n\}$ und in \mathfrak{G} eine Abbildungsfolge $\{f_n\}$, so daß die Punktfolge $\{f_n(x_n)\}$ gegen einen Endpunkt E' von R' konvergiert. Dann konvergiert für jeden Punkt $y \in R$ die Folge $\{f_n(y)\}$ gegen E' , und diese Konvergenz ist gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge K von R .¹⁴⁾

Beweis. Es seien x, x_n, f_n, E', K so gegeben, daß die genannten Voraussetzungen erfüllt sind; U sei eine Umgebung von E' ; zu zeigen ist: fast alle Mengen $f_n(K)$ — d. h. alle bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen — liegen in U .

Aus den in Nr. 1 formulierten Eigenschaften des Raumes R ergibt sich, daß die folgende Konstruktion möglich ist: man nehme eine Umgebung V_0 von x und Umgebungen V_1, \dots, V_r von endlich vielen Punkten von K derart, daß jedes V_i zusammenhängend und daß jede abgeschlossene Hülle \overline{V}_i kompakt ist ($i = 0, 1, \dots, r$); dann ist $\sum \overline{V}_i$ eine kompakte Menge, die aus endlich vielen Komponenten besteht und die man daher durch Hinzufügung von endlich vielen Kontinuen selbst zu einem kompakten Kontinuum Q ergänzen kann; Q enthält K und V_0 , also auch fast alle x_n .

¹³⁾ Man vgl. z. B. van der Waerden, Gruppen von linearen Transformationen (Berlin 1935), 35.

¹⁴⁾ Dieser Hilfsatz, wie auch der übrige Inhalt unseres § 2, hängt eng zusammen mit den Sätzen des 2. Kapitels in der Arbeit⁸⁾ von Freudenthal.

In U gibt es (cf. Nr. 2) eine Umgebung H von E' , deren Begrenzung K' eine kompakte Menge in R' ist. Da die Punkte $f_n(x_n)$ gegen E' streben, hat H mit fast allen Mengen $f_n(Q)$ Punkte gemeinsam; da \mathfrak{G} stark diskontinuierlich ist, ist auf Grund von (A') die Menge K' zu fast allen Mengen $f_n(Q)$ fremd; da diese Mengen zusammenhängend sind, liegen sie daher fast alle in H , also in U ; da $K \subset Q$ ist, ist damit die Behauptung bewiesen.

Bemerkung: Für Anwendungen wichtig ist der Fall, in dem die Folge $\{x_n\}$ mit x zusammenfällt, in dem also für einen festen Punkt x die Konvergenz $f_n(x) \rightarrow E'$ vorausgesetzt wird.

9. Es sei wieder \mathfrak{G} eine Menge stetiger Abbildungen des Raumes R in den Raum R' . Eine Punktmenge $F \subset R$ heiße eine „Fundamentalmenge“ von \mathfrak{G} , wenn sie folgende Bedingung erfüllt: Zu jedem Punkt $x' \in R'$ gibt es wenigstens einen Punkt $x \in F$ und wenigstens eine Abbildung $f \in \mathfrak{G}$ mit $f(x) = x'$.

Die in der üblichen Weise erklärten Fundamentalbereiche von Gruppen topologischer Selbstabbildungen¹³⁾ sind also spezielle Fundamentalmengen.

Wir werden Abbildungsmengen \mathfrak{G} betrachten, welche *kompakte* Fundamentalmengen besitzen.

Hilfssatz 2. \mathfrak{G} besitze eine kompakte Fundamentalmenge F ; dann gibt es zu jedem Ende E' von R' eine Punktfolge $\{x_n\}$ in R , die gegen einen Punkt x konvergiert, und eine Abbildungsfolge $\{f_n\}$ in \mathfrak{G} , so daß die Folge $\{f_n(x_n)\}$ gegen E' konvergiert.

Beweis. Es sei $\{x'_n\}$ eine gegen E' strebende Punktfolge in R' ; zu jedem n gibt es einen Punkt $x_n \in F$ und eine Abbildung $f_n \in \mathfrak{G}$ mit $f_n(x_n) = x'_n$; wegen der Kompaktheit von F dürfen wir, indem wir allenfalls zu einer Teilfolge übergehen, annehmen, daß die x_n gegen einen Punkt x konvergieren.

10. Aus den Hilfssätzen 1 und 2 ergibt sich unmittelbar

Hilfssatz 3. Die Abbildungsmenge \mathfrak{G} sei stark diskontinuierlich und besitze eine kompakte Fundamentalmenge. Dann gibt es zu jedem Ende E' von R' eine Folge $\{f_n\}$ in \mathfrak{G} , welche die Behauptung des Hilfssatzes 1 erfüllt.

Hierin ist enthalten:

Hilfssatz 3'. \mathfrak{G} sei stark diskontinuierlich und besitze eine kompakte Fundamentalmenge; U sei eine vorgegebene Umgebung eines Endes E'

von R' , und K sei eine vorgegebene kompakte Punktmenge in R . Dann gibt es in \mathfrak{G} eine Abbildung f mit $f(K) \subset U$.

11. Wir kommen zu unserem Hauptsatz:

Satz I. Der Raum R sei offen; es gebe eine Menge \mathfrak{G} topologischer Abbildungen von R auf sich, welche stark diskontinuierlich ist und eine kompakte Fundamentalmenge besitzt. Dann hat R entweder genau ein Ende oder zwei Enden oder eine Endenmenge von der Mächtigkeit des Kontinuums.

Die Behauptung läßt sich noch folgendermaßen präzisieren:

Zusatz. Der Raum R erfülle die Voraussetzungen des Satzes I und besitze wenigstens drei Enden. Dann ist die Menge \mathfrak{E} seiner Endpunkte in \bar{R} eine perfekte diskontinuierliche Menge.

Da der Raum \bar{R} kompakt ist und, ebenso wie R , eine überall dichte abzählbare Punktmenge enthält, hat jede perfekte Teilmenge von \bar{R} die Mächtigkeit des Kontinuums und ist, wenn sie diskontinuierlich ist, ein topologisches Bild des Cantorschen Diskontinuums¹⁵⁾). Der „Zusatz“ enthält also den Satz I.

Für jeden offenen Raum R ist \mathfrak{E} abgeschlossen und diskontinuierlich. Für den Beweis des Zusatzes genügt es daher, zu beweisen, daß \mathfrak{E} in sich dicht ist; diese Behauptung läßt sich so formulieren:

Der Raum R erfülle die Voraussetzungen des Satzes I und besitze wenigstens drei Enden; E sei ein beliebiges Ende von R und U eine beliebige Umgebung von E in R . Dann enthält U wenigstens zwei voneinander verschiedene Enden von R .

Zum Zweck des Beweises konstruieren wir zunächst — falls die Komplementärmenge $\bar{R} - U = Q$ von U nicht selbst zusammenhängend ist — eine in U enthaltene Umgebung U' von E , deren Komplementärmenge $\bar{R} - U' = Q'$ zusammenhängend ist: Man überdecke die kompakte Menge Q mit solchen Umgebungen V_1, \dots, V_n von endlich vielen ihrer Punkte, daß keine V_i den Punkt E enthält, daß jede V_i zusammenhängend ist, und daß die abgeschlossenen Hüllen \bar{V}_i kompakt sind; die Vereinigungsmenge $\sum \bar{V}_i$ besteht dann aus endlich vielen Komponenten; da $\mathfrak{E} = \bar{R} - R$ nirgends dicht in \bar{R} ist, enthält jede V_i , also auch jede der genannten Komponenten, Punkte von R ; je zwei Punkte von R lassen sich in R durch ein Kontinuum verbinden; daher kann man die

¹⁵⁾ Man vgl. z. B. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre (Leipzig 1914), 320; Alexandroff-Hopf, l. c., 121.

Menge $\sum \bar{V}_i$ durch Hinzufügung von endlich vielen Kontinuen, welche in R liegen, also den Punkt E nicht enthalten, zu einer zusammenhängenden abgeschlossenen Menge Q' ergänzen, welche E nicht enthält; es ist also, wenn wir $\bar{R} - Q' = U'$ setzen, U' eine Umgebung von E ; da $Q \subset \sum \bar{V}_i \subset Q'$ ist, ist $U' \subset U$. Daß die hiermit beschriebene Konstruktion möglich ist, ergibt sich aus den in Nr. 1 formulierten Eigenschaften von R . Falls bereits Q zusammenhängend ist, kann man natürlich einfach $U' = U$ setzen.

Nun seien E_1, E_2, E_3 drei voneinander verschiedene Enden von R , und H_1, H_2, H_3 solche Umgebungen von ihnen, daß jede nur einen der Punkte E_i enthält, und daß die Begrenzungen K_i der H_i in R gelegene kompakte Mengen sind (cf. Nr. 2) (einer der E_i darf mit E zusammenfallen). Nach dem Hilfssatz 3' gibt es in \mathfrak{G} eine solche Abbildung f , daß $f(K_1 + K_2 + K_3) \subset U'$ ist. Nach Nr. 5 läßt sich f zu einer topologischen Abbildung \bar{f} von \bar{R} auf sich erweitern, welche \mathfrak{G} auf sich abbildet. Falls alle drei Punkte $\bar{f}(E_1), \bar{f}(E_2), \bar{f}(E_3)$ in U' liegen, ist unsere Behauptung gewiß richtig; es liege etwa $\bar{f}(E_1)$ nicht in U' , sondern in Q' . Daraus, daß Q' zusammenhängend ist, den in $\bar{f}(H_1)$ gelegenen Punkt $\bar{f}(E_1)$ enthält und zu der in U' gelegenen Begrenzung $\bar{f}(K_1)$ von $\bar{f}(H_1)$ fremd ist, folgt, daß Q' in $\bar{f}(H_1)$ liegt. Andererseits liegen, da E_2, E_3 nicht in H_1 liegen, die Bilder $\bar{f}(E_2), \bar{f}(E_3)$ nicht in $\bar{f}(H_1)$. Folglich liegen $\bar{f}(E_2), \bar{f}(E_3)$ nicht in Q' , sondern in $\bar{R} - Q' = U'$, also in U .

12. Die übliche Theorie der (unverzweigten) Überlagerungen¹⁾ besitzt Gültigkeit nicht nur für Mannigfaltigkeiten und Polyeder, sondern für alle Räume, welche außer den in Nr. 1 formulierten Eigenschaften noch die des „lokalen einfachen Zusammenhangs“ besitzen; das soll bedeuten: jeder Punkt besitzt beliebig kleine Umgebungen, die einfach zusammenhängend sind, d. h. in denen sich jeder geschlossene Weg auf einen Punkt zusammenziehen läßt. Diese Umgebungen spielen folgende Rolle: wird bei der Überlagerung des Raumes R_0 durch den Raum R der Punkt $x_0 \in R_0$ von dem Punkt $x \in R$ überlagert, und ist U_0 eine einfach zusammenhängende Umgebung von x_0 , so gibt es eine Umgebung U von x , welche U_0 eineindeutig überlagert.

Der Raum R sei eine reguläre Überlagerung des Raumes R_0 ; es gebe also eine Gruppe \mathfrak{G} von topologischen Abbildungen von R auf sich, den Decktransformationen, welche in bekannter Weise R_0 erzeugen. Dann ist \mathfrak{G} stark diskontinuierlich; sind nämlich x, x' Punkte von R und x_0, x'_0 die entsprechenden Punkte von R_0 , so betrachte man, falls $x_0 \neq x'_0$ ist, zwei zueinander fremde, einfach zusammenhängende Um-

gebungen U_0 , U'_0 von x_0 , x'_0 und, falls $x_0 = x'_0$ ist, eine einfach zusammenhängende Umgebung U_0 dieses Punktes; in jedem Falle seien U , U' die entsprechenden Umgebungen von x , x' ; dann gibt es im Falle $x_0 \neq x'_0$ überhaupt keine Abbildung $f \in \mathfrak{G}$, für die $f(U)$ und U' gemeinsame Punkte haben, und im Falle $x_0 = x'_0$ gibt es genau eine solche Abbildung f , nämlich diejenige mit $f(x) = x'$.

Wir setzen weiter voraus, daß R_0 kompakt ist. Dann besitzt \mathfrak{G} eine kompakte Fundamentalmenge F . Um eine solche zu konstruieren, überdecke man R_0 mit endlich vielen Umgebungen U_0^1, \dots, U_0^n , die einfach zusammenhängend und deren abgeschlossenen Hüllen kompakt sind; sind dann U^i die den U_0^i entsprechenden Umgebungen in R , so ist die Vereinigungsmenge der abgeschlossenen Hüllen \bar{U}^i eine kompakte Fundamentalmenge von \mathfrak{G} .

Aus diesen Tatsachen und dem Satz I ergibt sich der folgende Satz, in welchem von dem Raum R vorausgesetzt wird, daß er lokal einfach zusammenhängend sei, was gewiß der Fall ist, wenn er ein Polyeder oder eine Mannigfaltigkeit ist:

Satz II. Ein offener Raum R , der eine reguläre Überlagerung — z. B. die universelle Überlagerung — eines kompakten Raumes ist, hat entweder genau ein Ende oder zwei Enden oder eine Endenmenge von der Mächtigkeit des Kontinuums.

Beispiele für alle drei Fälle sind in der Einleitung angegeben worden. Daß dieselbe Behauptung für nicht-reguläre Überlagerungen im allgemeinen nicht richtig ist, zeigt folgendes Beispiel: man nehme vier Strahlen, die von einem Punkt a ausgehen, und auf jedem von ihnen eine divergente Folge von Punkten ($\neq a$); in jedem dieser Punkte zeichne man einen den betreffenden Strahl berührenden Kreis, so daß diese Kreise zueinander fremd sind; die so entstandene Figur R hat vier Enden und ist eine Überlagerung der Figur R_0 , die aus zwei sich berührenden Kreisen besteht.

§ 3. Die Enden abstrakter Gruppen

13. Wenn der Raum R reguläre Überlagerung des Raumes R_0 und wenn die zugehörige Decktransformationen-Gruppe mit der abstrakten Gruppe \mathfrak{G} isomorph ist, so wollen wir sagen, daß \mathfrak{G} durch diese Überlagerung „dargestellt“ wird. Jede abstrakte Gruppe \mathfrak{G} , welche durch endlich viele ihrer Elemente erzeugt wird, läßt sich in dieser Weise darstellen, und zwar so, daß R_0 ein endliches Polyeder, und sogar so, daß

R_0 ein endliches Polygon ist; denn die Erzeugbarkeit von \mathfrak{G} durch n Elemente bedeutet, daß \mathfrak{G} mit der Faktorgruppe der von n freien Erzeugenden erzeugten freien Gruppe \mathfrak{F}_n nach einem Normalteiler \mathfrak{N} von \mathfrak{F}_n isomorph ist; \mathfrak{F}_n ist die Fundamentalgruppe endlicher Polygone R_0 , z. B. des Polygons, das von n Dreiecken gebildet wird, die einen Eckpunkt gemeinsam haben; die zu der Untergruppe \mathfrak{N} gehörige Überlagerung R von R_0 stellt \mathfrak{G} in der behaupteten Weise dar¹⁶⁾.

Eine Gruppe \mathfrak{G} kann aber durch Überlagerungen sehr verschiedener endlicher Polyeder dargestellt werden. Eigenschaften, welche allen diesen verschiedenen Darstellungen gemeinsam sind, sind Eigenschaften der Gruppe \mathfrak{G} selbst. Es wird sich zeigen, daß die Enden der Polyeder R und daher auch die Anzahl dieser Enden solche Eigenschaften sind.

14. Es handelt sich also darum, Beziehungen zwischen verschiedenen Darstellungen einer Gruppe herzustellen; hierzu dient

Hilfssatz 4. Die unendlichen Polygone R, R' seien reguläre Überlagerungen der endlichen Polygone R_0, R'_0 ; die zugehörigen Decktransformationen-Gruppen seien derselben Gruppe \mathfrak{G} isomorph; die beiden Decktransformationen, die einem Element $g \in \mathfrak{G}$ entsprechen, seien mit T_g bzw. T'_g bezeichnet. Dann gibt es eine stetige Abbildung f von R in R' , welche kompakt ist (cf. Nr. 4) und für jedes $g \in \mathfrak{G}$ die Funktionalgleichung $fT_g = T'_g f$ erfüllt.

Beweis. Für jeden Eckpunkt p von R_0 zeichnen wir einen ihn überlagernden Eckpunkt von R aus und nennen diesen p^* ; für jeden dieser endlich vielen p^* verstehen wir unter $f(p^*)$ einen beliebigen Eckpunkt von R' ; für jeden Eckpunkt q von R gibt es, da q einen Eckpunkt von R_0 überlagert, genau einen Punkt p^* und genau ein Element $g \in \mathfrak{G}$ mit $q = T_g(p^*)$; dann ist $f(q) = fT_g(p^*) = T'_g f(p^*)$ ein wohlbestimmter Eckpunkt von R' . Jetzt zeichnen wir für jede Kante s von R_0 eine sie überlagernde Kante von R aus und nennen diese s^* ; für jede dieser endlich vielen Kanten s^* verstehen wir unter $f(s^*)$ einen beliebigen Streckenzug in R' , der die bereits erklärten Bilder der Endpunkte von s^* verbindet; für jede Kante t von R gibt es genau eine Kante s^* und genau ein Element $g \in \mathfrak{G}$ mit $t = T_g(s^*)$; dann ist $f(t) = fT_g(s^*) = T'_g f(s^*)$ ein wohlbestimmter Streckenzug in R' . Hiermit ist die Abbildung f von R in R' erklärt; sie ist kompakt, da jeder Eckpunkt von R' Bild von höchstens endlich vielen Eckpunkten von R ist und da jede Kante von R' durch die Bilder

¹⁶⁾ Wenn man jedes der oben genannten n Dreiecke nur als eine einzige „Strecke“ mit zusammenfallenden Endpunkten deutet, so sind die unendlichen Polygone oder Streckenkomplexe R die „Dehnschen Gruppenbilder“ von \mathfrak{G} ; zu jeder Erzeugung von \mathfrak{G} durch endlich viele Elemente gehört ein solches Gruppenbild.

von höchstens endlich vielen Kanten von R bedeckt wird; daß f die Funktionalgleichung $fT_g = T'_g f$ erfüllt, ergibt sich unmittelbar aus der Definition.

15. Wir präzisieren jetzt die am Schluß von Nr. 13 angedeutete Rolle der Enden. Die Überlagerung R des endlichen Polyeders R_0 sei eine Darstellung von \mathfrak{G} ; die einem Element $g \in \mathfrak{G}$ entsprechende Decktransformation nennen wir wieder T_g ; die Gruppe \mathfrak{G} sei unendlich, der Raum R also offen. In Nr. 12 wurde gezeigt, daß die Menge der Decktransformationen stark diskontinuierlich ist und eine kompakte Fundamentalmenge besitzt; aus den Hilfssätzen 3 und 1 folgt daher: zu jedem Ende E von R gibt es in \mathfrak{G} Folgen von Elementen $\{g_n\}$, so daß für einen Punkt $x \in R$ die Folgen $\{T_{g_n}(x)\}$ gegen E streben; und zwar besteht diese Konvergenz, falls sie für einen Punkt x besteht, für jeden Punkt x (man beachte hierfür die Bemerkung am Schluß von Nr. 8). Von einer solchen Folge $\{g_n\}$ sagen wir, daß sie „zu dem Ende E von R gehört“. Es gilt nun

Satz III. Die unendliche, von endlich vielen Elementen erzeugte Gruppe \mathfrak{G} werde durch die Überlagerungen R bzw. R' der endlichen Polyeder R_0 bzw. R'_0 dargestellt; $\{g_n\}$ sei eine Folge von Elementen aus \mathfrak{G} , welche zu einem Ende E von R gehört. Dann gehört dieselbe Folge auch zu einem Ende von R' .

Beweis. Wir nehmen zunächst an, daß R_0 und R'_0 Polygone sind; dann existiert eine Abbildung f mit den im Hilfssatz 4 genannten Eigenschaften. Da die Folge $\{g_n\}$ zu E gehört, strebt für einen Punkt $x \in R$ die Folge der Punkte $x_n = T_{g_n}(x)$ gegen E ; wegen der Kompaktheit von f strebt nach Nr. 4 dann die Folge der Punkte $f(x_n)$ gegen ein Ende E' von R' ; wegen der Funktionalgleichung für f ist, wenn wir $f(x) = x'$ setzen, $f(x_n) = T'_{g_n}(x')$; daß die Folge dieser Punkte gegen E' strebt, bedeutet aber: die Folge $\{g_n\}$ gehört zu dem Ende E' von R' .

Der Fall beliebiger Polyeder R_0 , R'_0 läßt sich auf den somit erledigten polygonalen Fall zurückführen: die Polygone, die aus allen Kanten von R bzw. R' (in festen Simplizialzerlegungen) bestehen, überlagern die aus den Kanten von R_0 bzw. R'_0 bestehenden Polygone, und auch diese Überlagerungen stellen \mathfrak{G} dar; andererseits darf man sich nach Nr. 6 bei der Untersuchung der Enden auf die Kantenpolygone von R und R' beschränken; damit ist der Satz III bewiesen.

Zusatz zu dem Satz III: Wenn die Folgen $\{g_n\}$ und $\{h_n\}$ aus \mathfrak{G} zu demselben Ende von R gehören, so gehören sie auch zu demselben Ende von R' .

Denn wenn $\{g_n\}$ und $\{h_n\}$ zu demselben Ende von R gehören, dann

gehört auch die Folge $\{g_1, h_1, g_2, h_2, \dots\}$ zu diesem Ende, also gehört diese Folge nach dem Satz III zu einem Ende von R' , und dies bedeutet: die Folgen $\{g_n\}$ und $\{h_n\}$ gehören zu demselben Ende von R' .

16. \mathfrak{G} bezeichne wie bisher eine abstrakte unendliche Gruppe mit endlich vielen erzeugenden Elementen. Wir definieren: Eine Folge $\{g_n\}$ von Elementen aus \mathfrak{G} „gehört zu einem Ende von \mathfrak{G} “, wenn sie bei einer Darstellung von \mathfrak{G} durch die Überlagerung R eines endlichen Polyeders R_0 zu einem Ende von R gehört; zwei Folgen $\{g_n\}$ und $\{h_n\}$ aus \mathfrak{G} gehören zu „demselben“ Ende von \mathfrak{G} , wenn sie bei einer Darstellung der genannten Art zu demselben Ende von R gehören. Aus dem Satz III und dem Zusatz zu ihm ergibt sich, daß diese Definitionen unabhängig sind von der als Hilfsmittel herangezogenen speziellen Darstellung. Damit ist der Begriff der „Enden einer abstrakten Gruppe“ erklärt.

Insbesondere gehört zu jeder Gruppe \mathfrak{G} eine bestimmte *Anzahl ihrer Enden*; nach dem Satz I ist diese Anzahl *1 oder 2 oder die Mächtigkeit des Kontinuums*; hierdurch ist also eine Einteilung der Gesamtheit der Gruppen \mathfrak{G} in drei Klassen gegeben.

Die Tatsache, daß die Anzahl der Enden einerseits eine Eigenschaft der abstrakten Gruppe \mathfrak{G} , andererseits gleich der Anzahl der Enden eines die Gruppe \mathfrak{G} darstellenden Überlagerungs-Polyeders R ist, läßt sich folgendermaßen als *Zusatz zu dem Satz II* (Nr. 12) formulieren:

Sind die unendlichen Polyeder R , R' reguläre Überlagerungen endlicher Polyeder R_0 , R'_0 und sind die zugehörigen Decktransformationen-Gruppen einander isomorph, so haben R und R' die gleiche Anzahl von Enden. Insbesondere ist die Endenzahl des universellen Überlagerungsraumes R eines endlichen Polyeders R_0 durch die Struktur der Fundamentalgruppe \mathfrak{G} von R_0 bestimmt.

17. Es liegen jetzt die Aufgaben nahe, die Enden einer Gruppe rein algebraisch zu untersuchen oder wenigstens für die Anzahl der Enden ein algebraisches Kriterium anzugeben¹⁷⁾). Wir werden hier nur die zweite dieser Aufgaben etwas weiter verfolgen, aber auch dabei nur zu einem Teilergebnis gelangen.

¹⁷⁾ In einem gewissen Sinne sind diese Aufgaben natürlich dadurch zu lösen, daß man ein Gruppenbild¹⁸⁾ R von \mathfrak{G} betrachtet und die Beschreibung der Enden von R aus der Sprache unserer Nr. 3 ins Algebraische übersetzt, was keine prinzipielle Schwierigkeit bietet. Das Gruppenbild hängt aber noch von der speziellen Wahl der Erzeugenden von \mathfrak{G} ab, und erwünscht wäre es, ohne Bezugnahme auf ein spezielles System von Erzeugenden ein Kriterium dafür zu kennen, wann eine Folge f_1, f_2, \dots von Gruppenelementen zu einem Ende gehört.

Fast selbstverständlich ist folgender Satz:

Satz IV. Wenn \mathfrak{U} eine Untergruppe von endlichem Index in \mathfrak{G} ist, so hat \mathfrak{U} dieselbe Endenzahl wie \mathfrak{G} .

Wenn nämlich die Überlagerung R des endlichen Polyeders P_0 eine Darstellung von \mathfrak{G} ist, so gibt es bekanntlich zu der Untergruppe \mathfrak{U} einen Raum R'_0 , der R_0 so überlagert und von R regulär so überlagert wird, daß folgendes gilt: seine Blätterzahl über R_0 ist gleich dem Index von \mathfrak{U} in \mathfrak{G} , und die Decktransformationen-Gruppe, die zu seiner regulären Überlagerung R gehört, ist \mathfrak{U} . Derselbe Raum R tritt also bei Darstellungen von \mathfrak{G} und von \mathfrak{U} als Überlagerung endlicher Polyeder auf; daraus ist die Gleichheit der Endenzahlen von \mathfrak{G} und \mathfrak{U} ersichtlich. —

Der nächste Satz enthält unser vorhin erwähntes Teilergebnis im Zusammenhang mit der Aufgabe, algebraische Kriterien für die Endenzahl einer Gruppe zu finden:

Satz V. Die Gruppe \mathfrak{G} hat dann und nur dann genau zwei Enden, wenn sie eine Untergruppe \mathfrak{U} enthält, die unendlich zyklisch ist und einen endlichen Index in \mathfrak{G} hat.

Der eine Teil des Satzes folgt leicht aus dem Satz IV: wenn \mathfrak{G} eine Untergruppe der genannten Art enthält, so hat \mathfrak{G} dieselbe Endenzahl wie die unendliche zyklische Gruppe; deren Endenzahl aber ist 2, da sie die Fundamentalgruppe der Kreislinie ist, und da der universelle Überlagerungsraum der Kreislinie, also die Gerade, zwei Enden besitzt. Der andere Teil des Satzes V ist in dem folgenden allgemeineren Satz enthalten:

Satz Va. Der Raum R habe genau zwei Enden; \mathfrak{G} sei eine Gruppe topologischer Selbstabbildungen von R ; sie sei stark diskontinuierlich und besitze eine kompakte Fundamentalmenge F . Dann enthält \mathfrak{G} eine Untergruppe \mathfrak{U} , die unendlich zyklisch ist und in \mathfrak{G} endlichen Index hat.

Hierbei braucht also R kein Polyeder, und insbesondere brauchen die Transformationen aus \mathfrak{G} keine Decktransformationen, sie brauchen also nicht fixpunktfrei zu sein; der Satz gehört daher in den Rahmen unseres § 2; dies wird sich auch in der Beweismethode äußern.

18. Dem Beweis schicken wir einen Hilfssatz voraus:

Hilfssatz 5. Es sei R ein beliebiger offener Raum, \mathfrak{G} eine stark diskontinuierliche Gruppe topologischer Selbstabbildungen von R und \mathfrak{U} eine Untergruppe von \mathfrak{G} , die eine kompakte Fundamentalmenge F

besitzt. Dann ist die Gruppe \mathfrak{U} unendlich, und sie besitzt in \mathfrak{G} endlichen Index.

Beweis. Da F Fundamentalmenge von \mathfrak{U} ist, ist die über alle Transformationen u aus \mathfrak{U} erstreckte Summe $\Sigma u(F)$ der ganze Raum R ; da F kompakt und R offen ist, folgt hieraus die Unendlichkeit von \mathfrak{U} .

Da \mathfrak{G} stark diskontinuierlich und F kompakt ist, gibt es infolge der in Nr. 7 ausgesprochenen Bedingung (A') nur endlich viele Elemente $g \in \mathfrak{G}$, für welche $g(F)$ und F Punkte gemeinsam haben; dies seien die Elemente g_1, \dots, g_n . Es sei nun g ein beliebiges Element aus \mathfrak{G} ; man nehme einen Punkt $p \in F$; da F Fundamentalmenge von \mathfrak{U} ist, gibt es einen Punkt $p' \in F$ und ein Element $u \in \mathfrak{U}$ mit $u(p') = g(p)$; dann ist $u^{-1}g(p) = p'$, also ist $u^{-1}g = g_i$, $g = ug_i$, wobei g_i eines der obigen Elemente g_1, \dots, g_n ist; damit ist die Endlichkeit des Index von \mathfrak{U} bewiesen.

19. Beweis des Satzes Va. Die Enden von R seien E_1, E_2 . Nach Nr. 5 läßt sich jede der Abbildungen $g \in \mathfrak{G}$ zu einer topologischen Abbildung \bar{g} des Raumes $\bar{R} = R + E_1 + E_2$ erweitern; durch \bar{g} wird entweder jeder der beiden Endpunkte festgehalten, oder die beiden Enden werden vertauscht; diejenigen \bar{g} , welche die Enden festhalten, bestimmen eine Untergruppe \mathfrak{G}_1 von \mathfrak{G} , die entweder mit \mathfrak{G} identisch ist oder in \mathfrak{G} den Index 2 hat. Im letzteren Falle sei g' ein nicht in \mathfrak{G}_1 enthaltenes Element von \mathfrak{G} ; dann ist die Menge $F + g'(F)$ eine kompakte Fundamentalmenge von \mathfrak{G}_1 ; außerdem ist \mathfrak{G}_1 als Untergruppe von \mathfrak{G} selbst stark diskontinuierlich.

H sei eine Umgebung von E_1 , die zusammenhängend ist, deren Begrenzung K kompakt ist und in R liegt, und deren abgeschlossene Hülle \bar{H} den Endpunkt E_2 nicht enthält (cf. Nr. 2). Nach dem Hilfssatz 3' (Nr. 10), angewandt auf \mathfrak{G}_1 , gibt es eine Abbildung $u \in \mathfrak{G}_1$, für welche $u(K) \subset \bar{R} - \bar{H}$ ist. \mathfrak{U} sei die von u erzeugte Gruppe; wir behaupten:

\mathfrak{U} besitzt eine kompakte Fundamentalmenge.

Wenn diese Behauptung bewiesen ist, so folgt nach dem Hilfssatz 5, daß die Gruppe \mathfrak{U} , die ja nach ihrer Definition zyklisch ist, die Behauptung des Satzes Va erfüllt.

Wir betrachten die Potenzen u^n , also die Elemente von \mathfrak{U} , und setzen $\bar{u}^n(H) = H_n$, $u^n(K) = K_n$. Da $K_1 \subset \bar{R} - \bar{H}$ ist, ist H fremd zu der Begrenzung K_1 von H_1 ; da $u \in \mathfrak{G}_1$, also $\bar{u}(E_1) = E_1$ ist, haben H und H_1 den Punkt E_1 gemeinsam; ferner ist H zusammenhängend; aus diesen Tatsachen folgt: $H \subset H_1$, und folglich: $H_{n-1} \subset H_n$ für alle n , und folglich: $H \subset H_n$ für alle $n > 0$. Hätte K_n für ein $n > 0$ einen Punkt mit H gemeinsam, so nach dem eben Bewiesenen auch mit H_n , was nicht der

Fall ist, da die H_n offene Mengen sind; mithin sind die K_n für $n > 0$ fremd zu H . Es sei nun x ein Punkt von K ; die Folge der Punkte $u^n(x)$ mit $n = 1, 2, \dots$ kann wegen der starken Diskontinuität von \mathfrak{G} keinen Häufungspunkt in R besitzen; auch E_1 ist nicht Häufungspunkt der Folge, da, wie soeben gezeigt wurde, kein Punkt der Folge in H liegt; folglich strebt die Folge gegen E_2 . Nach dem Hilfssatz 1 strebt daher sowohl für jeden Punkt $y \in R$ die Folge der Punkte $u^n(y)$, als auch die Folge der Mengen K_n mit $n \rightarrow +\infty$ gleichmäßig gegen E_2 (man beachte die Bemerkung am Schluß von Nr. 8); es gibt also insbesondere zu jeder Umgebung U von E_2 ein solches positives n , daß $K_n \subset U$ ist.

Es sei jetzt y ein beliebiger Punkt von R . Die soeben genannte Umgebung U von E_2 wählen wir so, daß sie weder y noch E_1 enthält, und daß ihre Komplementärmenge $\bar{R} - U = Q$ zusammenhängend ist (daß man diese letzte Bedingung erfüllen kann, ist in Nr. 11 gezeigt worden). In U gibt es ein K_n ; da die zusammenhängende Menge Q somit fremd zu der Begrenzung K_n von H_n ist, mit H_n aber den Punkt E_1 gemeinsam hat, ist $Q \subset H_n$ und daher auch $y \in H_n$.

Andererseits kann y in höchstens endlich vielen Mengen H_{-n} mit $n > 0$ enthalten sein; denn andernfalls lägen für unendlich viele positive n die Punkte $u^n(y)$ in H , entgegen der oben bewiesenen Tatsache, daß diese Punkte gegen E_2 streben.

Da also die Menge der Indizes n , für welche $y \in H_n$ ist, einerseits nicht leer ist, andererseits höchstens endlich viele negative Zahlen enthält, enthält sie eine kleinste Zahl; diese heiße $m + 1$; dann ist $y \in H_{m+1} - H_m$ und folglich $u^{-m}(y) \in H_1 - H$ und erst recht $u^{-m}(y) \in \bar{H}_1 - H$. Das bedeutet, daß die Menge $\bar{H}_1 - H$ eine Fundamentalmenge von \mathfrak{U} ist; da sie kompakt ist und in R liegt, ist damit die Behauptung bewiesen.

20. Dank dem Satz V reduziert sich die Aufgabe, algebraische Kriterien für die Endenzahl einer Gruppe zu finden, auf die Frage nach einem algebraischen Unterscheidungsmerkmal zwischen den Gruppen mit einem Ende und denen mit unendlich vielen Enden. Ich kenne kein solches Merkmal und muß mich auf die Angabe der einfachsten Beispiele beschränken.

Das direkte Produkt \mathfrak{G} zweier unendlicher Gruppen hat stets genau ein Ende; denn in diesem Falle besitzt \mathfrak{G} eine Darstellung durch eine Überlagerung R eines offenen Polyeders, wobei R das topologische Produkt zweier offener Räume ist, und ein solches Produkt hat nach einem Satz von Freudenthal¹⁸⁾ immer nur ein Ende.

¹⁸⁾ l. c., § 3.

Zu diesen Gruppen gehören die *Abelschen Gruppen*, deren Rang > 1 ist. Andere Gruppen mit einem Ende sind die *Fundamentalgruppen der geschlossenen Flächen positiven Geschlechts*; denn die universelle Überlagerung dieser Flächen, die Ebene, hat ein Ende.

Die freien Gruppen \mathfrak{F}_n mit n freien Erzeugenden und $n > 1$ haben unendlich viele Enden; denn \mathfrak{F}_n ist die Fundamentalgruppe eines Polygons R_0 , das von n Dreiecken mit einem gemeinsamen Eckpunkt gebildet wird, und die universelle Überlagerung von R_0 ist mit einem Baumkomplex homöomorph, der regulär vom Grade $2n$ ist⁷⁾; daß dieser Baum für $n > 1$ unendlich viele Enden hat, sieht man sofort z. B. mit Hilfe des Kriteriums aus Nr. 3.

Daraus, daß \mathfrak{F}_2 unendlich viele Enden hat, folgt übrigens mit Hilfe des in Nr. 16 formulierten Zusatzes zu Satz II die in der Einleitung erwähnte Tatsache, daß die universelle Überlagerung der 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit, welche die topologische Summe⁸⁾ zweier Exemplare des topologischen Produktes von Kreis und Kugel ist, unendlich viele Enden besitzt.

Ohne Beweis¹⁹⁾ sei noch auf folgende Gruppen mit unendlich vielen Enden hingewiesen: das freie Produkt²⁰⁾ zweier Gruppen, von denen keine die Identität ist, hat unendlich viele Enden — mit einer einzigen Ausnahme: das freie Produkt zweier Gruppen der Ordnung 2 hat zwei Enden (diese Gruppe enthält eine unendlich zyklische Untergruppe vom Index 2). Hieraus folgt: sind M_1 , M_2 , zwei geschlossene Mannigfaltigkeiten, mindestens 3-dimensional und keine von ihnen einfach zusammenhängend, so hat die universelle Überlagerung M ihrer topologischen Summe unendlich viele Enden — abgesehen von dem Fall, in dem die Fundamentalgruppen von M_1 und von M_2 die Ordnung 2 haben; dann hat M zwei Enden; in der Tat wird die Summe zweier projektiver Räume von dem topologischen Produkt von Gerade und Kugel überlagert.

(Eingegangen den 28. Juni 1943.)

¹⁹⁾ Der Beweis ist mit Hilfe von Gruppenbildern zu führen.

²⁰⁾ Seifert-Threlfall, I. c., 300.