

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 16 (1943-1944)

**Artikel:** L'itération directe des opérateurs hermitiens.  
**Autor:** Wavre, R.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-15548>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# L'itération directe des opérateurs hermitiens

Par R. WAVRE, Genève

*Nous dédions ce travail à Monsieur le Professeur Carathéodory  
à l'occasion de son soixante-dixième anniversaire.*

## Rappel

Dans un article paru au numéro précédent des „Commentarii“, nous avons montré quel avantage il y a à entreprendre une étude directe de l'itération d'un opérateur hermitien. Cela permet de reconstruire quelques théories classiques en éliminant presque complètement l'appareil algébrique. Nous voulons ici apporter quelques compléments à cette étude directe.

L'espace  $E$ , dans lequel nous opérons, a été défini dans l'article précédent. Il recouvre l'espace d'Hilbert et l'espace fonctionnel.

Nous posons,  $A$  étant un opérateur hermitien :

$$A^p \mathfrak{h}_0 = l_1 \dots \mathfrak{h}_p, \quad l_1 \dots = l_1 \dots l_p, \quad \|\mathfrak{h}_p\| = 1 \quad p = 0, 1, 2, \dots .$$

Les  $\mathfrak{h}_p$  sont donc les itérés normalisés de  $\mathfrak{h}_0$ . Nous les appellerons les conséquents. Nous formions également :

$$l = \lim l_p, \quad \bar{\omega} = \frac{l_1}{l} \cdot \frac{l_2}{l} \dots$$

nombre liés à  $\mathfrak{h}_0$ . On avait d'ailleurs  $l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq \dots$ ;  $l(\mathfrak{h}_0)$  et  $\bar{\omega}(\mathfrak{h}_0)$  sont des fonctionnelles de  $\mathfrak{h}_0$ .

Nous avions, une parenthèse désignant un produit scalaire :

$$(\mathfrak{h}_p, \mathfrak{h}_{p+r}) = \frac{l_{p+1} \dots l_{p+r}}{l_{p+r+1} \dots l_{p+2r}}. \quad (\mathfrak{h}_p, \mathfrak{h}_{p+2}) = \frac{l_{p+1}}{l_{p+2}} .$$

Le nombre  $\bar{\omega}$  existe toujours s'il existe une infinité de conséquents, ce qui est le cas dans tout l'espace pour les opérateurs bornés, et nous avons démontré que deux cas seulement sont possibles: si  $\bar{\omega} \neq 0$  les éléments  $\mathfrak{h}_{2p}$  et  $\mathfrak{h}_{2p+1}$  convergent fortement vers des limites, racines de

$$(A^2 - l^2) \mathfrak{h} = 0 .$$

Si  $\bar{\omega} = 0$  ces deux suites convergent faiblement vers zéro.

## § 2. Remarques sur la série des carrés des distances de deux conséquents

Nous posons

$$\bar{\omega}_{1,q} = \frac{l_1}{l} \cdots \frac{l_q}{l} .$$

Supposons  $l$  fini et posons

$$\frac{l_i}{l} = 1 - \varepsilon_i \quad \varepsilon_i = \frac{l - l_i}{l}, \quad \frac{l}{l_i} = 1 + \eta_i, \quad \eta_i = \frac{l - l_i}{l_i} .$$

On a

$$\frac{1}{\bar{\omega}_{1,q}} = (1 + \eta_1)(1 + \eta_2) \cdots (1 + \eta_q), \quad \frac{l_1}{l} \eta_i \leq \varepsilon_i \leq \eta_i$$

puis

$$1 + \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_q \leq \frac{1}{\bar{\omega}_{1,q}} \leq e^{\eta_1 + \cdots + \eta_q} ;$$

donc suivant que  $\sum \eta_i$  diverge ou converge  $\bar{\omega} = 0$  ou  $\bar{\omega} \neq 0$ . Il en est de même suivant que  $\sum \varepsilon_i$  diverge ou converge, donc en définitive

$\bar{\omega} = 0$  si  $\sum (l - l_i)$  diverge ;  $\bar{\omega} \neq 0$  si  $\sum (l - l_i)$  converge.

On a d'ailleurs

$$l_2 - l_1 + l_3 - l_2 + \cdots + l_i - l_{i-1} = l_i - l_1 ,$$

d'où :

$$\frac{l_i - l_1}{l} \leq 1 - \frac{l_1}{l_2} + 1 - \frac{l_2}{l_3} + \cdots + 1 - \frac{l_{i-1}}{l_i} \leq \frac{l_i - l_1}{l_2}$$

et en posant :

$$\delta_{q,q+2}^2 = \|x_{q+2} - x_q\|^2 = 2 \left(1 - \frac{l_{q+1}}{l_{q+2}}\right)$$

carré de la distance de deux conséquents  $x_q$  et  $x_{q+2}$ ,

$$2 \frac{l_i - l_1}{l} \leq \delta_{0,2}^2 + \delta_{1,3}^2 + \delta_{2,4}^2 + \cdots + \delta_{i-2,i}^2 \leq 2 \frac{l_i - l_1}{l_2} ;$$

donc si  $l$  est fini

$$2 \frac{l - l_1}{l} \leq \delta_{0,2}^2 + \delta_{1,3}^2 + \cdots \leq 2 \frac{l - l_1}{l_2} ;$$

relation vraie même si  $\bar{\omega} = 0$  donc avec convergence faible des  $x$ , normalisés vers zéro.

Pour tout opérateur hermitien borné, les carrés des distances qui séparent deux conséquents par  $A^2$  forment une série convergente.

### § 3. Le rang d'un élément

Soit  $h$  un élément;  $l(h)$  et  $\bar{\omega}(h)$  les valeurs  $l$  et  $\bar{\omega}$  qui lui sont attachées. La fréquence  $l$  et le caractère 1 ou 0 suivant que  $\bar{\omega} \neq 0$  ou  $\bar{\omega} = 0$  sera le rang de  $h$ . On le notera  $l^1$  ou  $l^0$ . Deux éléments de même rang auront même  $l$  et même caractère 1 ou 0. Un élément  $x$  sera dit avoir un rang plus élevé que  $y$ , si  $l(x) > l(y)$ , ou si  $l(x) = l(y)$  avec  $\bar{\omega}(x) \neq 0$  et  $\bar{\omega}(y) = 0$ . Ce qui se notera:  $x \supset y$ . Cette relation est évidemment transitive.

Les conséquents d'un élément ont même rang que cet élément. Le rang est également invariant quand on passe de  $A$  à  $A^n$ . On a quels que soient  $x_0$  et  $y_0$

$$(A^p x_0, A^p y_0) = (x_0, A^{2p} y_0) = (A^{2p} x_0, y_0)$$

d'où

$$(x_0, y_{2p}) l_{1 \dots 2p}^y = (x_{2p}, y_0) l_{1 \dots 2p}^x ;$$

si  $l^x > l^y$ , on a, en faisant augmenter  $p$  indéfiniment:

$$|(x_{2p}, y_0)| \rightarrow 0 ;$$

et si  $l^x = l^y$  avec  $\bar{\omega}^x \neq 0$  et  $\bar{\omega}^y = 0$  la même conclusion s'impose. *Donc les conséquents d'un élément deviennent orthogonaux à tout élément de rang inférieur.* On démontrerait de même que si le rang de  $x_0$  est inférieur au rang de  $y_0$ :  $x_0 \subset y_0$ :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\|A^{2p} x_0\|}{\|A^{2p} y_0\|} = 0 .$$

Ce rapport tendrait vers une limite finie non nulle, celle de  $\bar{\omega}(x)$  et  $\bar{\omega}(y)$  si les rangs sont égaux et de caractères 1; s'ils sont de caractère 0 tous deux, on ne peut rien dire par cette analyse.

### § 4. Le rang d'un ensemble

Le rang d'un ensemble  $e$  d'éléments de  $E$  est la borne supérieure des rangs des éléments de  $e$ . Dans le cas où une suite tend vers une borne supérieure  $l$  sans l'atteindre, le rang est  $l^0$ .

Soit une suite d'éléments normalisés  $x^i$  et  $c_i$  des constantes. Formons:

$$z = \sum c_i x^i \quad \text{avec} \quad \sum |c_i| \quad \text{convergente.}$$

**Th. I.** *Le rang de la somme est au plus égal au rang de la suite des termes.*

En effet, en affectant les  $l$  d'un indice supérieur indiquant à quels éléments  $x^i$  ils se rapportent, on a, pour tout opérateur borné

$$l_{1 \dots p}^z z_p = \sum_i c_i l_{1 \dots p}^i x_p^i ; \quad l_{1 \dots p}^z \leq \sum_i |c_i| l_{1 \dots p}^i .$$

Soit  $\lambda$  la borne supérieure des  $l^i = \lim l_p^i$ ; on a

$$\frac{l_{1 \dots p}^z}{\lambda^p} \leq \sum_i |c_i| \frac{l_{1 \dots p}^i}{\lambda^p} \leq \sum_i |c_i| .$$

Donc  $l^z \leq \lambda$ . Si  $l^z = \lambda$  alors

$$\bar{\omega}_{1 \dots p}^z \leq \sum_i |c_i| \bar{\omega}_{1 \dots p}^i \left( \frac{l^i}{\lambda} \right)^p .$$

Si  $l^i < \lambda$ , quel que soit  $i$ , alors  $\bar{\omega}^z = 0$ .

Si pour quelques  $j$  on a  $l^j = \lambda$ , il n'y a que ceux-là à retenir à la limite. Si l'un des  $\bar{\omega}^j$  est différent de zéro, alors  $\bar{\omega}(z) \neq 0$ . Si tous sont nuls  $\bar{\omega}(z) = 0$ ; le théorème est démontré.

*Les développements en série d'éléments propres maintiennent le rang.*

Soient, en effet:

$$z = \sum c_i x^i , \quad Ax^i = v_i x^i$$

les  $v_i$  étant tous différents. Alors

$$x_p^i = x^i , \quad (x^i, x^j) = \varepsilon_{i,j} .$$

Il suffit, pour que la série converge fortement, d'avoir  $\sum |c_i|^2$  convergente. Alors

$$l_{1 \dots p}^z z_p = \sum_i c_i v_i^p x^i ; \quad l_{1 \dots p}^{z^2} = \sum_i |c_i|^2 v_i^{2p}$$

d'où en divisant encore par  $\lambda^p$  avec  $\lambda = \overline{\text{borne}} |v_i|$

$$\bar{\omega}_{1 \dots p}^2 = \sum_i |c_i|^2 \bar{\omega}_{1 \dots p}^{i^2} \left( \frac{v_i}{\lambda} \right)^{2p} .$$

L'on déduit de là que, si la borne  $\lambda$  n'est pas atteinte,  $\bar{\omega} = 0$  et si elle est atteinte par un ou plusieurs  $\bar{\omega}^i$ , on aura  $\bar{\omega} \neq 0$  ou  $\bar{\omega} = 0$  suivant que l'un des  $\bar{\omega}^i$  est différent de zéro ou non.

*Si l'on a*

$$c_1 x^1 + c_2 x^2 + \dots = 0$$

*et si l'un des éléments  $x^n$  a un rang supérieur à tous les autres, ce rang est aussi celui de la suite restante.*

En effet, on aurait rang de  $x^n \leqslant$  rang de la suite restante et d'autre part l'on a par définition  $x^n \geqslant$  rang de la suite restante; il n'y a que l'égalité qui puisse convenir.

Le lemme des trois fréquences, lemme  $h$  § 9 de notre précédent article, est un cas particulier. Si  $\alpha x + \alpha' x' + \alpha'' x'' = 0$ , on ne saurait avoir  $l(x) > l(x')$ ,  $l(x) > l(x'')$ , on ne saurait non plus avoir  $l(x) = l(x') = l(x'')$  avec  $\bar{\omega}^x \neq 0$  et  $\bar{\omega}^{x'} = 0$ ,  $\bar{\omega}^{x''} = 0$ .

*L'ensemble des éléments  $x$  de rang inférieur à  $\lambda 0$  ou à  $\lambda 1$  constitue une variété linéaire fermée.*

En effet, soient  $x$  et  $y$  deux tels éléments et  $z = \alpha x + \beta y$ . On a, en vertu du théorème I: rang de  $z \leqslant$  rang maximum de  $x$  et  $y$ . La multiplicité est fermée. En effet, soit  $x^n \rightarrow x$  (fortement). Alors:

$$x = x^1 + (x^2 - x^1) + (x^3 - x^2) + \dots$$

et rang de  $x \leqslant$  rang de la suite  $x^n - x^{n-1}$ , donc de la suite  $x^n$ .

## § 5. La semi-continuité des fonctionnelles $l(x)$ et $\bar{\omega}(x)$ dans tout l'espace $E$

Nous considérons des opérateurs hermitiens bornés. A chaque élément de  $E$  est attaché un nombre  $l$  et un autre  $\bar{\omega}$ .

La fonctionnelle  $l$  est semi-continue inférieurement.

La fonctionnelle  $\bar{\omega}$  est semi-continue supérieurement. C'est-à-dire que pour toute suite  $x^i \rightarrow x$  (fortement) l'on a:

$$\underline{\lim} l(x^i) \geqslant l(x), \quad \overline{\lim} \bar{\omega}(x^i) \leqslant \bar{\omega}(x).$$

On a en effet l'inégalité triangulaire sous deux formes:

$$\text{si } \mathfrak{h} + \varphi + \psi = 0, \quad \|\mathfrak{h}\| \leqslant \|\varphi\| + \|\psi\| \text{ et } \|\mathfrak{h}\| \geqslant \left| \|\varphi\| - \|\psi\| \right|.$$

Ensuite posons,  $\beta$  étant un élément fixe normalisé et  $\gamma$  un élément tel que  $\|\gamma\| \rightarrow 0$

$$\alpha = \beta + \gamma.$$

On a:

$$\|\alpha\| l_1^\alpha \dots l_q^\alpha = l_1^\beta \dots l_q^\beta + \|\gamma\| l_1^\gamma \dots l_q^\gamma. \quad (1)$$

Divisions par le plus grand des  $l^\alpha$ ,  $l^\beta$ ,  $l^\gamma$  à la puissance  $q$  et passons à la limite pour  $q \rightarrow +\infty$ . Différents cas seront à distinguer qui sont les seuls possibles en vertu du lemme des trois fréquences:

- |                                    |       |   |
|------------------------------------|-------|---|
| a) $l^\alpha < l^\beta = l^\gamma$ | alors | $\bar{\omega}^\beta =   \gamma   \bar{\omega}^\gamma$                                       |
| b) $l^\beta < l^\gamma = l^\alpha$ | „     | $  \gamma   \bar{\omega}^\gamma =   \alpha   \bar{\omega}^\alpha$                           |
| c) $l^\gamma < l^\alpha = l^\beta$ | „     | $  \alpha   \bar{\omega}^\alpha = \bar{\omega}^\beta$                                       |
| d) $l^\alpha = l^\beta = l^\gamma$ | „     | $  \gamma   \bar{\omega}^\gamma \geq   \alpha   \bar{\omega}^\alpha - \bar{\omega}^\beta$ . |

Si  $\bar{\omega}^\beta \neq 0$ , a) est exclu dès le moment où  $||\gamma|| < \bar{\omega}^\beta$ , donc  $l^\alpha \geq l^\beta$  ; alors, si b)  $\bar{\omega}^\alpha \rightarrow 0$ , si c)  $\bar{\omega}^\alpha \rightarrow \bar{\omega}^\beta$ , si d)  $\bar{\omega}^\alpha \rightarrow \bar{\omega}^\beta$  et c'est ce qu'il fallait établir dans cette circonstance.

Si  $\bar{\omega}^\beta = 0$ , dans les cas b), c), d) l'on a :

$$l^\alpha \geq l^\beta \quad \text{et} \quad \bar{\omega}^\alpha \rightarrow 0.$$

Reste seulement à examiner le cas a).

Alors supposons que sur une suite  $\alpha^i$  on ait  $l^i < l^\beta - \varepsilon$ , avec  $\alpha^i \rightarrow \beta$  ; on aura pour  $q > Q\varepsilon$  ;  $l^i > l^\beta - \frac{\varepsilon}{2}$  ; alors par (1)

$$\lim_i ||\alpha^i|| (l^\beta - \varepsilon)^q > \lim_i l^i_{1 \dots q} = l^i_{1 \dots q} > l^i_{1 \dots q} \left( l^\beta - \frac{\varepsilon}{2} \right)^{q-Q}.$$

Cette relation est absurde car  $Q$  est fixe et  $q$  aussi grand que l'on veut ; elle équivaut à :

$$\left( \frac{l^\beta - \varepsilon}{l^\beta - \frac{\varepsilon}{2}} \right)^{q-Q} > h(Q)$$

quel que soit  $q > Q$ . Donc  $l^i \rightarrow l^\beta$ .

Nous avons établi  $\underline{l}^\alpha \geq l^\beta$  qui est la semi-continuité de  $l$ .

Il suffit maintenant de prouver que  $\lim \bar{\omega}^{\alpha^i} = 0$  lorsque  $\alpha^i \rightarrow \beta$ .

Si  $\bar{\omega}^{\alpha^i} > 2\varepsilon$  on aurait aussi  $||\alpha^i|| \bar{\omega}^{\alpha^i} > \varepsilon$ , d'où

$$||\alpha^i|| \bar{\omega}^{\alpha^i}_{1 \dots q} > \varepsilon \quad \text{et} \quad \bar{\omega}^{\alpha^i}_{1 \dots q} < \frac{\varepsilon}{2};$$

cette dernière égalité pour  $Q(\varepsilon)$  suffisamment grand. Alors

$$\lim_i \frac{||\alpha^i|| l^i_{1 \dots q}}{(l^i)^q} \left( \frac{l^i}{l^\beta} \right)^q = \frac{l^i_{1 \dots q}}{(l^\beta)^q}; \quad \lim_i \bar{\omega}^{\alpha^i}_{1 \dots q} (1 - \eta_i) = \bar{\omega}^{\alpha^i}_{1 \dots q};$$

avec  $\eta_i \rightarrow 0$  ; ce qui revient à  $\frac{\varepsilon}{2} > \varepsilon$ .

On a donc bien

$$\overline{\lim} \bar{\omega}^\alpha \leq \bar{\omega}^\beta \text{ lorsque } \alpha \rightarrow \beta.$$

C.Q.F.D.

Il est clair qu'en prenant des  $\gamma$  tels que  $l^\gamma > l^\beta$ , les  $l^\alpha$  tendront vers  $l^\gamma$ . Ainsi les points d'accumulation de  $l^\alpha$  sont toutes les valeurs  $l^\gamma$  et leurs points d'accumulation.

On voit aussi que les seuls points d'accumulation de  $\bar{\omega}^\alpha$  sont  $\bar{\omega}^\beta$  et 0, lorsque  $\alpha \rightarrow \beta$ .

On démontrerait également sans difficulté ceci: *de rang d'un élément ne dépasse pas la plus grande limite des rangs des éléments voisins.*

## § 5. Opérateur racine d'un polynôme

Supposons que l'on ait en quelque point  $x_0$  de  $E$ :

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1} A + a_n x_0 = 0.$$

Cette relation donne avec nos notations; les  $a$  étant des constantes:

$$l_{1 \dots n} x_n + a_1 l_{1 \dots n-1} x_{n-1} + \cdots + a_{n-1} l_1 x_1 + a_n x_0 = 0,$$

de sorte que  $x_n$  est dans la multiplicité définie par  $x_0, \dots, x_{n-1}$ . Il en est de même de  $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$ . Or cette suite de conséquents ne peut pas tendre faiblement vers zéro car elle deviendrait orthogonale à tout vecteur de cette variété à  $n$  dimensions en restant elle-même dans cette variété; donc ici  $\bar{\omega} \neq 0$ .

Les *projecteurs* satisfont à  $A^2 - A \equiv 0$ ; quel que soit l'élément de l'espace  $E$ . Dans ce cas  $A\mathbf{h} = \varphi$ ,  $A\varphi = \varphi$ , d'où  $l_2 = l_3 = \cdots = 1$ ,  $l = 1$ ,  $\bar{\omega} = l_1$ .

Cette valeur  $l_1$  n'est autre que le cosinus de l'angle de  $\mathbf{h}$  et de sa projection  $\varphi$ . La multiplicité linéaire de tout à l'heure se réduit ici à un seul vecteur.

La seule fréquence est donc:  $l = 1$ , à laquelle correspond une infinité d'éléments propres; tous les éléments de la variété  $V$  sur laquelle on projette. En repérant  $V$  dans le cas où elle est à une infinité de dimensions, au moyen d'un système d'axes orthogonaux, on aura donc une infinité  $x^i$  d'éléments propres orthogonaux répondant à la même valeur propre  $l = 1$ . Les projecteurs ne sont donc pas complètement continus mais toujours „réguliers“.

## § 6. La décomposition des opérateurs bornés

Soit  $A$  un opérateur borné, puis  $v_i$  et  $x^i$  des valeurs et éléments propres  $Ax^i = v_i x^i$ . Dans un espace séparable, il n'y a qu'une infinité dénombrable d'éléments propres orthogonaux. Posons :

$$A' = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n v_i x^i x^i \quad \text{alors} \quad A'(x^i) = v^i x^i .$$

Puis

$$A = A' + B \quad \text{d'où} \quad B(x^i) = 0 ;$$

$B$  est hermitien comme  $A$  et  $A'$ . L'on a donc :  $BA' = 0$  et

$$0 = (BA'y, z) = (A'y, Bz) = (y, A'Bz)$$

quels que soient  $y$  et  $z$ ; et par conséquent :  $A'B = 0$ . Les deux opérateurs  $A'$  et  $B$  sont orthogonaux. Je prétends que  $\bar{\omega}^B(y) \equiv 0$  quelque soit l'élément  $y$ . Sinon  $\bar{\omega}(y_0) \neq 0$  et alors les conséquents  $y_{2p} \rightarrow y$  fortement et l'on a :  $B^2(y) = v^2 y$ . Donc

$$A^2 y - A'^2 y = v^2 y \quad \text{d'où} \quad A^2 y - \frac{1}{v^2} A'^2 B^2(y) = v^2 y, \quad A^2 y = v^2 y,$$

$y$  serait un  $x^i$  et  $B(y) = 0$ , d'où  $v = 0$  ou  $y = 0$ , ce qui est contradictoire.

*Tout opérateur borné se décompose en un opérateur formé avec le spectre ponctuel et un autre à  $\bar{\omega} \equiv 0$ .* C'est donc dans l'opérateur  $B$  que l'on trouvera les autres formes du spectre.

(Reçu le 9 juin 1943.)