Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 15 (1942-1943)

Artikel: Über Parallelinvarianten bei Eikörpern.

Autor: Hadwiger, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14877

Über Parallelinvarianten bei Eikörpern

H. HADWIGER, Bern

In einer kürzlich erschienenen Note[1]) habe ich die Parallelinvarianten ebener Eibereiche behandelt, und für diese einige geometrische Deutungen gegeben. Die hier vorliegende kurze Bemerkung bezieht sich auf die analog definierten Invarianten bei Eikörpern.

Wir gehen von zwei Eikörpern $\mathfrak{G}_i$ ($i = 1{,}2$) aus. Es bezeichne wie üblich M_i das Integral der mittleren Krümmung, F_i die Oberfläche und V_i das Volumen von $\mathfrak{G}_i$.

Eine mit stetigen partiellen Ableitungen versehene Funktion Φ von 6 Veränderlichen nennen wir eine *Parallelinvariante* für zwei Eikörper, wenn der Funktionswert

$$\Phi\{M_1, F_1, V_1; M_2, F_2, V_2\} \tag{1}$$

beim Übergang von den Eikörpern $\mathfrak{G}_i$ zu den äußeren Parallelkörpern $\mathfrak{G}_i(\xi)$ im Abstand ξ unverändert bleibt.

Nach den Formeln von *J. Steiner*[2]) gilt für die Parallelkörper

$$\begin{aligned} M_i(\xi) &= M_i + 4\pi\xi, \\ F_i(\xi) &= F_i + 2M_i\xi + 4\pi\xi^2, \\ V_i(\xi) &= V_i + F_i\xi + M_i\xi^2 + \frac{4\pi}{3}\xi^3, \end{aligned} \tag{2}$$

so daß die aufgestellte Invarianzforderung als Funktionalgleichung

$$\Phi\{M_1(\xi), F_1(\xi), V_1(\xi); M_2(\xi), F_2(\xi), V_2(\xi)\} = C \tag{3}$$

geschrieben werden kann.

Aus dem Verschwinden des totalen Differentials von (3) folgert man die Gültigkeit der partiellen Differentialgleichung

$$F_1\frac{\partial\Phi}{\partial V_1} + F_2\frac{\partial\Phi}{\partial V_2} + 2M_1\frac{\partial\Phi}{\partial F_1} + 2M_2\frac{\partial\Phi}{\partial F_2} + 4\pi\frac{\partial\Phi}{\partial M_1} + 4\pi\frac{\partial\Phi}{\partial M_2} = 0. \tag{4}$$

---

[1]) *H. Hadwiger*, Über Parallelinvarianten bei Eibereichen. Comment. math. helv. **13**, 252—256 (1940/41).

[2]) *J. Steiner*, Über parallele Flächen, Werke **2**, 173—176.

Die 5 Parallelinvarianten

$$\begin{aligned} X &= M_1 - M_2\,, \\ Y_i &= M_i^2 - 4\pi F_i && (i = 1,2)\,, \\ Z_i &= M_i^3 - 6\pi F_i M_i + 24\pi^2 V_i && (i = 1,2)\,, \end{aligned} \tag{5}$$

bilden ein Fundamentalsystem, da der Rang der Funktionalmatrix

$$\frac{\partial\,[X\,, Y_1\,, Y_2\,, Z_1\,, Z_2]}{\partial\,[M_1\,, M_2\,, F_1\,, F_2\,, V_1\,, V_2]} \tag{6}$$

maximal ist, d. h. den Wert 5 aufweist. Jede Parallelinvariante (1) ist somit darstellbar als

$$\Phi = \chi\{\,X\,,\; Y_1\,,\; Y_2\,, Z_1\,, Z_2\,\}\,, \tag{7}$$

wo χ eine mit stetigen partiellen Ableitungen versehene Funktion von 5 Veränderlichen ist.

Ein Beispiel eines parallelinvarianten Funktionals wird durch das *Zerfallsintegral*

$$\Lambda = \int (\varkappa\,[\,\mathfrak{G}_1\,,\; \mathfrak{G}_2\,] - 1\,)\,\dot{\mathfrak{G}}_2 \tag{8}$$

der Durchdringung zweier Eiflächen geliefert. In (8) bezeichnet $\varkappa[\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2]$ die Anzahl der verschiedenen zusammenhängenden Kontinua, in welche der Durchschnitt der Oberflächen der beiden Eikörper $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ zerfällt; $\mathfrak{G}_1$ wird als fest, $\mathfrak{G}_2$ dagegen als beweglich angenommen, $\dot{\mathfrak{G}}_2$ ist die kinematische Dichte[3]) von $\mathfrak{G}_2$, und die Integration ist über alle Lagen von $\mathfrak{G}_2$ zu erstrecken, die einen nicht leeren Durchschnitt der Eikörper $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ ergeben.

Die Parallelinvarianz von (8) ergibt sich auf Grund der Tatsache, daß die Zerfallszahl $\varkappa\,[\,\mathfrak{G}_1\,,\, \mathfrak{G}_2\,]$ beim Übergang zu den Parallelkörpern

a) keine Änderung erleidet, wenn $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ einen inneren Punkt gemeinsam haben,

b) höchstens den Zuwachs 1 erfährt, wenn $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ keinen Punkt gemeinsam haben.

Dieser Satz stellt die Erweiterung eines früher[4]) für ebene Eibereiche festgestellten Sachverhaltes auf Eikörper dar[5]). Die Parallelinvarianz von (8)

---

[3]) Vgl. *W. Blaschke,* Vorlesungen über Integralgeometrie, 2. Heft, S. 63. B. G. Teubner; Leipzig und Berlin 1937.

[4]) Die in Fußnote [1]) zitierte Arbeit, S. 255.

[5]) Für diesen Satz habe ich noch keinen einfachen Beweis finden können. Er wird aber im folgenden nicht gebraucht. Es schien mir immerhin zweckmäßig, doch auf die Parallelinvarianz des Zerfallsintegrals hinzuweisen, um eventuell weitere Studien in dieser Richtung anzuregen.

bedeutet noch nicht, daß das Zerfallsintegral eine Parallelinvariante in dem oben bezeichneten Sinne ist; es scheint im Gegenteil zweifelhaft, ob das Integral im allgemeinen Fall durch die Konstanten M_i, F_i und V_i allein ausgedrückt werden kann.

Ich teile noch ein Resultat mit, das sich auf eine spezielle Klasse von Eiflächen bezieht.

$\mathfrak{G}_i$ sei äußerer Parallelbereich einer Strecke der Länge a_i im Abstand R_i (es handelt sich um einen wohlbekannten Eikörper, der aus einem Kreiszylinder und zwei an den Kreisflächen angesetzten Halbkugeln besteht).

Für das Zerfallintegral (8) ergibt sich, $R_1 \leqq R_2$ vorausgesetzt,

$$\varLambda = \frac{4\pi^3}{3}(R_1 - R_2)\{8(R_1 - R_2)^2 + 6(a_1 - a_2)(R_1 - R_2) - 3a_1a_2\} . \quad (9)$$

Die Parallelinvarianz von $\varLambda$ kann aus der Formel unmittelbar abgelesen werden, da die Abhängigkeit von den Radien R_1 und R_2 nur eine solche von der Differenz $R_1 - R_2$ ist. Beiläufig bemerkt man noch, daß das Zerfallsintegral (8), das für zwei kongruente Körper stets einen nicht negativen Wert haben muß, nicht nur für die Kugel verschwindet, sondern auch für Eikörper der oben bezeichneten Art. Damit wird eine gelegentlich aufgeworfene Frage[6]), ob die Kugel die einzige Eifläche ist, die mit einer kongruenten Eifläche einen stets zusammenhängenden Schnitt aufweist, im negativen Sinn entschieden.

Die Parallelinvarianten (5) der betrachteten speziellen Eikörper sind:

$$\begin{aligned} X &= \pi(a_1 - a_2) + 4\pi(R_1 - R_2) , \\ Y_i &= \pi^2 a_i^2 \qquad (i = 1, 2) , \\ Z_i &= \pi^3 a_i^3 \qquad (i = 1, 2) . \end{aligned} \quad (10)$$

Nach einiger Umrechnung kann (9) auf die Form

$$\varLambda = \frac{1}{6}\{X^3 + 2(Z_1 - Z_2) - 3X(Y_1 + Y_2)\} \quad (11)$$

gebracht werden. Damit ist in diesem speziellen Fall eine Darstellung des Zerfallintegrals durch die 5 Parallelinvarianten gewonnen.

(Eingegangen den 3. Februar 1942.)

[6]) *T. Bonnesen* und *W. Fenchel*, Theorie der konvexen Körper, S. 141. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 3, 1934.