Systeme von Richtungsfeldern in Sphären und stetige Lösungen komplexer linearer Gleichungen

Von BENO ECKMANN, Zürich

§ 1. Einleitung

1. Die Frage, ob es in einer m-dimensionalen geschlossenen differenzierbaren Mannigfaltigkeit M^m stetige Richtungsfelder gibt, kann durch Homologiebetrachtungen vollständig beantwortet werden; es gilt nämlich der bekannte Satz: Dann und nur dann gibt es in M^m stetige Richtungsfelder, wenn die Eulersche Charakteristik von M^m den Wert 0 hat. In Verallgemeinerung dieser Frage hat Stiefel[1]) — ebenfalls mit Homologiemethoden — untersucht, ob es sogar Systeme von k stetigen Richtungsfeldern gibt, die in jedem Punkt von M^m linear unabhängig sind (sogenannte „k-Felder“), und notwendige Bedingungen für ihre Existenz gefunden. In dieser Arbeit soll die Existenz solcher Systeme von Richtungsfeldern in den einfachsten geschlossenen Mannigfaltigkeiten, den Sphären, untersucht werden; gerade weil die Sphären bezüglich ihrer Homologieeigenschaften so einfach sind, versagt nämlich bei ihnen die Methode von Stiefel, die im Falle der projektiven Räume zu weitgehenden Resultaten geführt hat [2]. Unsere Methode ist von der seinen wesentlich verschieden und den Sphären besonders angepaßt; sie liegt im Rahmen der neuern *Homotopietheorie*.

2. Es ist leicht, aus einem k-Feld in einer Sphäre (oder allgemeiner in einer mit Riemann'scher Metrik versehenen Mannigfaltigkeit) ein anderes herzuleiten, bei welchem in jedem Punkte der Sphäre die k dort angebrachten Richtungen paarweise orthogonal sind; wir können uns also auf solche k-Felder beschränken und festsetzen:

Unter einem *k-Feld in der m-dimensionalen Sphäre S^m* $(0 < k \leqslant m)$ verstehen wir ein System von k tangentialen, stetigen, singularitätenfreien Richtungsfeldern dieser Sphäre, derart, daß in jedem ihrer Punkte die k dort angebrachten Richtungen paarweise orthogonal sind. Die Sphäre S^m geben wir dabei immer als Einheitssphäre des $(m+1)$-dimensionalen Euklidischen Raumes R^{m+1}, deren Ortsvektor $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1})$ der Bedingung $\mathfrak{x}^2 = 1$ genügt, und ein Richtungsfeld in S^m durch ein Feld von tangentialen Einheitsvektoren, d. h. durch eine für $\mathfrak{x}^2 = 1$ definierte

[1]) vgl. [1] und [2]. — Die Zahlen in eckigen Klammern [ ] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

stetige Vektorfunktion $\mathfrak{y}(\mathfrak{x})$, für welche $\mathfrak{y}(\mathfrak{x})^2 = 1$ und $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y}(\mathfrak{x}) = 0$ ist; wir nennen dies im folgenden kurz ein *Vektorfeld in* S^m.

In einer Sphäre gerader Dimension gibt es keine k-Felder; denn nach dem klassischen Satz von Poincaré-Brouwer[2]) gibt es bei geradem m in S^m nicht einmal *ein* Vektorfeld. Hingegen gibt es in jeder Sphäre ungerader Dimension m ein Vektorfeld, nämlich z. B. das durch den Vektor

$$\mathfrak{x}^* = (x_2, -x_1, \ldots, x_{m+1}, -x_m)$$

definierte (die Bedingungen $\mathfrak{x}^{*2} = 1$, $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x}^* = 0$ sind erfüllt). Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Aufgabe festzustellen, ob es auf Sphären ungerader Dimension auch für $k > 1$ k-Felder gibt; es wird ein Beitrag zu ihrer Lösung gegeben (Satz I), der mit stetigen Lösungen komplexer linearer Gleichungen eng zusammenhängt (Satz IV und V).

Besonders wichtig ist die Frage, ob es in S^m ein m-Feld gibt; wenn dies der Fall ist, so sagt man[3]), die Sphäre S^m sei *parallelisierbar*, da man dann einen Fernparallelismus zwischen Tangentialvektoren in verschiedenen Punkten der Sphäre definieren kann. Es ist bekannt, daß die Sphären S^1, S^3, S^7 parallelisierbar sind; man kann in diesen Fällen besonders einfache m-Felder auf S^m explizite angeben[4]); ob es noch andere parallelisierbare Sphären gibt, weiß man nicht.

3. Unser Beitrag zur Beantwortung der genannten Fragen besteht in folgendem Satz:

Satz I. *In einer Sphäre der Dimension* $4p + 1$ *gibt es kein* 2-*Feld.*

Korollar. Die Sphären der Dimensionen $4p + 1$ *sind nicht parallelisierbar.*

Bemerkungen: a) *In jeder Sphäre der Dimension* $4p - 1$ *gibt es ein* 2-*Feld;* es gibt sogar ein 3-Feld, das man leicht explizite angeben kann (siehe Nr. 4).

b) Der Satz I für $p = 1$ („in der S^5 gibt es kein 2-Feld") ist schon in einer frühern Arbeit[5]) von mir bewiesen worden, und zwar unter Heranziehung eines Satzes von Pontrjagin [4] über unitäre Gruppen; einen ähnlichen Zusammenhang mit unitären Gruppen gibt es aber für $p > 1$ nicht. Mit Satz I wird der Fall $p = 1$ (und zugleich der genannte Satz von Pontrjagin) jetzt neu bewiesen; er spielt aber in dem vorliegenden Beweis auch eine gewisse Ausnahmerolle (vgl. Nr. 9 h).

---

[2]) *Alexandroff-Hopf*, Topologie I (Berlin 1935), S. 481, Satz IIIa.

[3]) vgl. [1], S. 6.

[4]) s. *Stiefel* [1], S. 45.

[5]) s. [3], Nr. 16.

c) Durch ein 2-Feld in einer Sphäre S^m wird immer ein stetiges Feld von (orientierten oder nichtorientierten) tangentialen 2-dimensionalen Flächenelementen dieser Sphäre „aufgespannt"; wir nennen dies kurz ein „Feld von Flächenelementen in der Sphäre S^m". Es gilt aber auch umgekehrt der Satz[6]), daß jedes Feld von Flächenelementen in einer Sphäre der Dimension $m > 2$ durch ein 2-Feld aufgespannt werden kann. Es kann also in einer Sphäre gerader Dimension $m > 2$ und nach Satz I auch in einer Sphäre der Dimension $4p + 1$ kein Feld von Flächenelementen geben; in den Sphären der Dimension $4p - 1$ dagegen gibt es ein solches Feld, und natürlich auch in der Sphäre S^2. Wir sehen also:

In den Sphären der Dimensionen $4p - 1$ und in der S^2 gibt es Felder von Flächenelementen, in allen andern Sphären nicht.

Der Beweis von Satz I erfolgt in zwei Schritten:

Satz II. *Wenn es in der Sphäre S^m ein 2-Feld gibt, so läßt sich jedes Vektorfeld in S^m zu einem 2-Feld ergänzen* (durch Hinzufügen eines zweiten Vektorfeldes, das in jedem Punkt der S^m zum ersten orthogonal ist).

Satz III. *Das oben genannte spezielle Vektorfeld $\mathfrak{x}^*$ in einer Sphäre ungerader Dimension m läßt sich, wenn $m = 4p + 1$ ist, nicht zu einem 2-Feld ergänzen.*

Der Satz I folgt offenbar aus den Sätzen II und III. Den Satz II habe ich früher[7]) im Rahmen einer allgemeinen Theorie „gefaserter Räume" bewiesen. Wir haben somit nur noch den Satz III zu beweisen. Dieser Satz ist aber nicht nur wegen seines Zusammenhanges mit der Existenz von k-Feldern in Sphären (Satz I) von Interesse; er ist nämlich, wie wir gleich sehen werden, äquivalent mit einem Satz über stetige Lösungen komplexer linearer Gleichungen (Satz IV), der mir selbständiges Interesse zu verdienen scheint und der zu algebraischen Folgerungen Anlaß gibt. Der Beweis dieses Satzes IV ist das Ziel der vorliegenden Arbeit; mit Satz IV werden zugleich die Sätze III und I bewiesen sein.

4. Wir betrachten die lineare Gleichung

$$\sum_{j=1}^{r} u_j \overline{v_j} = 0 \tag{1}$$

in den Unbekannten $\overline{v}_j$ und lassen die Koeffizienten u_j alle komplexen

[6]) s. *Eckmann* [3], Nr. 17, Satz 29.

[7]) [3], Nr. 16, Satz 25.

Werte mit $\sum_{j=1}^{r} u_j \overline{u_j} = 1$ durchlaufen. Dann verstehen wir unter einer „*stetigen Lösung der komplexen linearen Gleichung* (1)“ ein System von r Funktionen

$$v_j = f_j(u_1, \ldots, u_r) \qquad j = 1, \ldots, r \ ,$$

die für alle Werte der u_j mit $\sum_{j=1}^{r} u_j \overline{u_j} = 1$ definiert und stetig sind und die Beziehung $\sum_{j=1}^{r} v_j \overline{v_j} = 1$ erfüllen, und die die Gleichung (1) für alle zugelassenen Werte der u_j gleichzeitig lösen; d. h. es soll

$$\sum_{j=1}^{r} u_j \overline{f_j(u_1, \ldots, u_r)} = 0$$

sein für alle Werte der u_j mit $\sum_{j=1}^{r} u_j \overline{u_j} = 1$.

Satz IV. *Bei ungeradem r besitzt die komplexe lineare Gleichung*

$$\sum_{j=1}^{r} u_j \overline{v_j} = 0$$

keine stetige Lösung.

Zusatz: Bei geradem r dagegen besitzt die komplexe lineare Gleichung (1) eine stetige Lösung:

$$\begin{aligned} v_{2k-1} &= \overline{u_{2k}} \\ v_{2k} &= -\overline{u_{2k-1}} \end{aligned} \qquad k = 1, 2, \ldots, \frac{r}{2} \ .$$

Der Satz IV für $r = 3$ läßt sich auch aus dem schon erwähnten Satz von Pontrjagin [4] folgern; er ist sogar mit ihm äquivalent (man vergleiche Nr. 9 i).

Daß die Sätze III und IV äquivalent sind, kann man folgendermaßen einsehen:

Durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} u_j &= x_{2j-1} + i\, x_{2j} \qquad & j = 1, \ldots, r \\ v_j &= y_{2j-1} + i\, y_{2j} \qquad & j = 1, \ldots, r \end{aligned} \tag{2}$$

ordnen wir die (reellen) Vektoren $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_{2r})$ des R^{2r} eineindeutig den komplexen r-Tupeln $u_1, \ldots, u_r$ und die Vektoren $\mathfrak{y} = (y_1, \ldots, y_{2r})$ den r-Tupeln $v_1, \ldots, v_r$ zu. Dann ist, wenn $\mathfrak{x}^*$ wieder den Vektor $(x_2, -x_1, \ldots, x_{2r}, -x_{2r-1})$ bedeutet,

$$\sum_{j=1}^{r} u_j \overline{u_j} = \mathfrak{x}^2 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{r} v_j \overline{v_j} = \mathfrak{y}^2$$
$$\sum_{j=1}^{r} u_j \overline{v_j} = \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} + i\,\mathfrak{x}^* \cdot \mathfrak{y} \; . \tag{3}$$

Daraus sieht man: Wenn $\mathfrak{y}(\mathfrak{x})$ ein Vektorfeld auf $S^{2r-1}(\mathfrak{x}^2 = 1)$ ist, welches das spezielle Feld $\mathfrak{x}^*$ zu einem 2-Feld ergänzt, so bilden wegen

$$\mathfrak{y}^2 = 1 \; , \qquad \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y}(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}^* \cdot \mathfrak{y}(\mathfrak{x}) = 0$$

die vermöge (2) zu $\mathfrak{y}(\mathfrak{x})$ gehörigen Funktionen $v_1, \ldots, v_r$ von $u_1, \ldots, u_r$ eine stetige Lösung der komplexen linearen Gleichung $\sum_{j=1}^{r} u_j \overline{v_j} = 0$; und umgekehrt findet man vermittelst der Zuordnung (2) aus jeder solchen stetigen Lösung ein Vektorfeld $\mathfrak{y}$ in S^{2r-1}, welches $\mathfrak{x}^*$ zu einem 2-Feld ergänzt. Die Sätze III und IV sagen also beide aus, daß es für $r = 2p + 1$ weder ein solches Vektorfeld noch eine stetige Lösung von (1) gibt. (Anderseits folgt aus dem Zusatz zu Satz IV, daß es ($r = 2p$) in S^{4p-1} ein Vektorfeld $\mathfrak{y}$ gibt, welches $\mathfrak{x}^*$ zu einem 2-Feld ergänzt; man kann dieses 2-Feld sogar zu einem 3-Feld ergänzen, nämlich durch das Vektorfeld $\mathfrak{y}^*$.)

Dem Beweis des Satzes IV sind die §§ 2 und 3 gewidmet; wir geben diesem Satz dort wiederum eine topologische, aber von Satz III verschiedene Deutung, indem wir ihn als Satz über gewisse, zunächst näher zu beschreibende „unitäre Vektormannigfaltigkeiten" formulieren und auf die Wesentlichkeit spezieller Sphärenabbildungen zurückführen. Dabei werden Sätze aus der „Homotopietheorie gefaserter Räume" benützt, die ich an anderer Stelle [3] ausführlich dargelegt habe, ferner Sätze über Abbildungen von Sphären auf Sphären [6] und Eigenschaften der Fundamentalgruppe der Mannigfaltigkeiten der orthogonalen Gruppen.

Der *Diskussion der speziellen Sphärenabbildung*, auf welche der ganze Beweis schließlich hinausläuft, messen wir auch selbständiges Interesse bei; der betreffende Abschnitt (§ 3) ist unabhängig vom übrigen lesbar. Die dort angewendete Methode ist einer weitgehenden Verallgemeinerung fähig, und ich hoffe mit ihrer Hilfe weitere Resultate über Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension zu erhalten; diese Methode ist übrigens teilweise inspiriert von einer Note von Pontrjagin [11].

5. Aus dem Satz IV folgt:

Satz V. *r sei ungerade, und $f_j(u_1, \ldots, u_r)$, $j = 1, \ldots, r$, seien r stetige komplexe Funktionen der komplexen Variabeln $u_1, \ldots, u_r$. Wenn für alle Werte der u_j*

$$\sum_{j=1}^{r} u_j f_j(u_1, \ldots, u_r) = 0$$

ist, so haben die Funktionen f_j mindestens eine von $(0, \ldots, 0)$ verschiedene gemeinsame Nullstelle.

Denn wenn keine solche Nullstelle vorhanden wäre, so könnte man aus den Funktionen f_j eine stetige Lösung der komplexen linearen Gleichung $\sum_{j=1}^{r} u_j \overline{v_j} = 0$ konstruieren, indem man

$$v_j = \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^{r} f_k \overline{f_k}\right)^{1/2}} \cdot \overline{f_j} \qquad j = 1, \ldots, r$$

setzt. Man braucht übrigens in Satz V nur vorauszusetzen, daß die f_j für $(u_1, \ldots, u_r) \neq (0, \ldots, 0)$ stetig sind; in dieser Form ist er mit Satz IV äquivalent.

Wenn man den Satz V statt für beliebige stetige Funktionen für *Polynome* ausspricht, so erhält man einen *algebraischen Satz;* es wäre interessant zu wissen, ob dieser Satz, den wir auf topologischem Wege gefunden und bewiesen haben, sich auch rein algebraisch beweisen läßt, bzw. in welchen Körpern er gilt. Satz V ist übrigens auch im Körper der reellen Zahlen, d. h. wenn sowohl die Variabeln als auch die Funktionen nur reelle Werte annehmen, unverändert gültig, ebenso der Satz IV; das ist eine direkte Folge des in Nr. 2 erwähnten Satzes von Poincaré-Brouwer. Wenn man für die Funktionen f_j nur Formen in den u_j zuläßt, so läßt sich der Satz V (im Komplexen) auch schon aus einem Fixpunktsatz von Hopf[8]) folgern.

§ 2. Die unitären Vektormannigfaltigkeiten $U_{n,m}$

6. U_n sei der unitäre Raum mit n komplexen bzw. $2n$ reellen Dimensionen. Unter einem *m-System des U_n* $(0 < m < n)$, das wir mit $\tau_{n,m}$ bezeichnen, verstehen wir ein System von m paarweise unitär-orthogonalen Einheitsvektoren des U_n, die im Ursprung des U_n angebracht sind. Führt man in der Menge aller m-Systeme $\tau_{n,m}$ des U_n in naheliegender Weise

[8]) nämlich aus dem Fixpunktsatz für die komplexen projektiven Räume, s. [5], S. 85, Satz VII.

eine Metrik ein, so wird diese Menge zu einer Mannigfaltigkeit, deren (reelle) Dimension leicht zu bestimmen wäre, und die wir mit $U_{n,m}$ bezeichnen. Diese Mannigfaltigkeiten $U_{n,m}$ stellen genau das komplexe Analogon der von Stiefel[9]) eingeführten reellen Vektormannigfaltigkeiten $V_{n,m}$ dar. $U_{n,1}$ ist die Mannigfaltigkeit aller im Ursprung des U_n angebrachten Einheitsvektoren, also homöomorph zur $(2n-1)$-dimensionalen Sphäre S^{2n-1}. Legt man im U_n ein festes Koordinatensystem zugrunde, so entspricht jedem m-System $\tau_{n,m}$ eine unitäre Matrix von m Zeilen und n Kolonnen; insbesondere ist $U_{n,n-1}$ zur Mannigfaltigkeit aller quadratischen n-reihigen unitär-unimodulären Matrizen, d. h. zur Gruppe A_{n-1} (in der Killing-Cartan'schen Aufzählung der einfachen Gruppen), homöomorph (in einer solchen Matrix ist nämlich die $n$te Zeile durch die $n-1$ ersten vollständig bestimmt).

Wir geben nun *retrahierbare Zerlegungen*[10]) der Mannigfaltigkeiten $U_{n,m}$ an. Man erhält eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von $U_{n,m}$ in abgeschlossene, disjunkte Teilmengen, wenn man jeweils diejenigen Systeme $\tau_{n,m}$ zusammenfaßt, die in den $k < m$ ersten Vektoren übereinstimmen; jedes Element dieser Zerlegung ist eine Mannigfaltigkeit $U_{n-k,m-k}$ und wird charakterisiert durch Angabe der ersten k Vektoren der in ihm enthaltenen Systeme, also durch einen Punkt von $U_{n,k}$; ordnet man jedem Punkt $a \in U_{n,m}$ den durch die ersten k Vektoren des m-Systems a gegebenen Punkt $A \in U_{n,k}$ zu, so entsteht eine stetige Abbildung P von $U_{n,m}$ auf $U_{n,k}$, die wir *Projektion* nennen, und bei welcher die Urbilder $\overline{A} = P^{-1}(A)$ der Punkte $A \in U_{n,k}$ genau die Elemente der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ sind (die auch „Fasern" genannt werden): $U_{n,k}$ ist der „Zerlegungsraum" oder „Faserraum" der Zerlegung. Gemäß der früher[10]) festgesetzten Terminologie ist eine solche Zerlegung eines Raumes R in Fasern, die einem Raum F homöomorph sind, mit der Projektion P und dem Zerlegungsraum $Z = PR$ durch eine Gleichung

$$R / F = Z$$

zu beschreiben; für die angegebene Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von $U_{n,m}$ lautet diese Gleichung

$$U_{n,m} / U_{n-k,m-k} = U_{n,k}\,. \tag{1}$$

Daß diese Zerlegung retrahierbar ist, beweist man genau so, wie wir dies an anderer Stelle[11]) für analoge Zerlegungen der reellen Vektormannig-

[9]) s. [1], S. 8 ff.

[10]) Wegen dieses Begriffes vgl. man [3], insbes. § 1; in dieser Arbeit ist die Homotopietheorie solcher Zerlegungen und Faserungen ausführlich dargestellt.

[11]) [3], Nr. 2g.

faltigkeiten $V_{n,m}$ getan haben (man hat nur das gewöhnliche skalare Produkt $(\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y})$ zweier reeller Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, das a. a. O.[11]) verwendet wird, durch das unitäre Produkt $\mathfrak{u} \cdot \bar{\mathfrak{v}}$ der unitären Vektoren $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ zu ersetzen).

7. Die Eigenschaften derartiger retrahierbarer Zerlegungen $R / F = Z$ (wo R, F und Z zusammenhängende, lokal zusammenziehbare Kompakten sind) sind an anderer Stelle [3] ausführlich entwickelt worden; wir berichten hier nur kurz über diejenigen, welche im folgenden gebraucht werden, insbesondere erinnern wir an die Begriffe „Schnittfläche" und „Schnittelement".

Ist g eine stetige Abbildung (wir lassen das Beiwort „stetig" meistens weg) eines Kompaktums X in R, so heißt die Abbildung $G = Pg$ von X in Z — wo P die zur Zerlegung $\mathfrak{Z}: R / F = Z$ gehörige Projektion ist — die *Spur* von g. Eine Abbildung $\mathfrak{j}$ von Z in R, deren Spur $P\mathfrak{j}$ die Identität von Z ist, heißt eine *Schnittfläche* von $\mathfrak{Z}$; $\mathfrak{j}$ ist also eine topologische Abbildung von Z in R, bei welcher das Bild jede Faser genau einmal trifft. Nicht jede Zerlegung besitzt eine Schnittfläche.

Wenn speziell der Zerlegungsraum Z eine Sphäre S^m ist, dann besitzt die Zerlegung immer ein *Schnittelement*. Darunter verstehen wir folgendes: V^m sei die m-dimensionale Vollkugel, Σ^{m-1} ihre Randsphäre, A ein beliebiger, fest gewählter Punkt der S^m. Als Schnittelement bezeichnen wir nun eine Abbildung t von V^m in R, derart, daß $Pt = T$ das Innere der V^m topologisch auf $S^m - A$ und Σ^{m-1} auf A abbildet; wegen $T(\Sigma^{m-1}) = A$ muß $t(\Sigma^{m-1})$ in der Faser $\bar{A} = P^{-1}A$ liegen; zu t gehört also eine Abbildung t' von Σ^{m-1} in $\bar{A}$, die wir als *Rand des Schnittelements* t bezeichnen. Es gilt nun der Satz[12]): In der Gesamtheit aller derjenigen Abbildungen f von V^m in R, bei welchen $f(\Sigma^{m-1}) \subset \bar{A}$ ist, ist die Klasse eines Schnittelements t (bei naheliegender Festsetzung der Orientierungen, vgl.[12])) eindeutig bestimmt, d. h. sind alle Schnittelemente t einander homotop, und zwar derart, daß auch bei der Deformation das Bild von Σ^{m-1} immer in $\bar{A}$ liegt. Also sind auch die Ränder t' aller Schnittelemente als Abbildungen von Σ^{m-1} in $\bar{A}$ einander homotop; oder: *Die Ränder aller Schnittelemente t' einer Zerlegung, bei welcher der Zerlegungsraum eine Sphäre S^m ist, gehören in eine durch die Zerlegung eindeutig bestimmte Abbildungsklasse von Σ^{m-1} in $\bar{A}$.*

Wenn nun die Zerlegung eine Schnittfläche $\mathfrak{j}$ besitzt, und wir unter T eine Abbildung von V^m auf S^m verstehen, welche das Innere von V^m topologisch auf $S^m - A$ und Σ^{m-1} auf A abbildet, so ist $t = \mathfrak{j}T$ ein

[12]) [3], Nr. 10b.

Schnittelement, dessen Rand t' eine Abbildung von Σ^{m-1} auf einen Punkt $\mathfrak{j}A$ von $\bar{A}$ ist; wir finden also[13]):

Wenn eine Zerlegung $R/F = Z$, deren Zerlegungsraum eine Sphäre ist, eine Schnittfläche besitzt, so ist der Rand t' eines jeden Schnittelementes t der Zerlegung zusammenziehbar, d. h. t' läßt sich in eine Abbildung deformieren, bei welcher das Bild ein Punkt ist.

Oder: Wenn die Zerlegung ein Schnittelement t besitzt, dessen Rand t' eine nicht-zusammenziehbare Abbildung von Σ^{m-1} in $\bar{A}$ ist, so besitzt sie keine Schnittfläche.

8. Wir betrachten nun spezielle der oben beschriebenen Zerlegungen (1) und bezeichnen sie mit $\mathfrak{Z}_r$:

$$\mathfrak{Z}_r : U_{r,2}/U_{r-1,1} = U_{r,1} \quad ; \tag{2}$$

sie können auch durch

$$\mathfrak{Z}_r : U_{r,2}/S^{2r-3} = S^{2r-1} \tag{2'}$$

dargestellt werden. Ein Punkt $a \in U_{r,2}$ ist durch zwei Vektoren $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ des unitären Raumes U_r, mit den Komponenten u_k bzw. $v_k (k = 1, \ldots, r)$, gegeben, die die Relationen

$$\mathfrak{u}\bar{\mathfrak{u}} = \mathfrak{v}\bar{\mathfrak{v}} = 1 \quad , \qquad \mathfrak{u}\bar{\mathfrak{v}} = 0 \tag{3}$$

d. h.

$$\sum_{k=1}^{r} u_k \overline{u_k} = \sum_{k=1}^{r} v_k \overline{v_k} = 1 \quad , \quad \sum_{k=1}^{r} u_k \overline{v_k} = 0 \tag{3'}$$

erfüllen; die Projektion P_r, die zur Zerlegung $\mathfrak{Z}_r$ gehört, können wir dadurch geben, daß wir dem Punkt $a = (\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) \in U_{r,2}$ den Vektor $\mathfrak{u}$, aufgefaßt als Ortsvektor (oder als Punkt) der S^{2r-1} im U_r, zuordnen: $P_r a = P_r(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) = \mathfrak{u}$.

Eine *Schnittfläche von* $\mathfrak{Z}_r$ ist eine Abbildung $\mathfrak{j}$ von S^{2r-1} in $U_{r,2}$, bei welcher

$$P_r \mathfrak{j}(\mathfrak{u}) = \mathfrak{u}$$

ist, also

$$\mathfrak{j}(\mathfrak{u}) = (\mathfrak{u}, \mathfrak{v}(\mathfrak{u})) \quad ; \tag{4}$$

dabei bedeutet $\mathfrak{v}(\mathfrak{u})$ eine für $\mathfrak{u}\bar{\mathfrak{u}} = 1$ definierte, stetige Vektorfunktion von $\mathfrak{u}$, die für jedes solche $\mathfrak{u}$ die Relationen

---

13) Diesen Satz wie auch seine Umkehrung haben wir schon in [3] bewiesen; aus den Sätzen 11 und 12 der Nr. 10 von [3] ist nämlich zu entnehmen: es gibt dann und nur dann eine Schnittfläche, wenn die von der Klasse von t' erzeugte Untergruppe der $(m - 1)$-ten Homotopiegruppe von $\bar{A}$ die Nullgruppe ist; das bedeutet aber, daß t' zusammenziehbar ist.

$$\mathfrak{v}(\mathfrak{u}) \cdot \bar{\mathfrak{v}}(\mathfrak{u}) = 1 \;, \quad \mathfrak{u} \cdot \bar{\mathfrak{v}}(\mathfrak{u}) = 0$$

erfüllt. Die Existenz einer Schnittfläche $\mathfrak{j}$ von $\mathfrak{Z}_r$ ist somit völlig gleichbedeutend mit der Existenz einer solchen Vektorfunktion $\mathfrak{v}(\mathfrak{u})$, bzw. mit der Existenz von r Funktionen $v_k = f_k(u_1, \ldots, u_r)$, $k = 1, \ldots, r$, die für $\sum\limits_{k=1}^{r} u_k \overline{u_k} = 1$ definiert und stetig sind und dort die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{r} f_k(u_1, \ldots, u_r) \,.\, \overline{f_k(u_1, \ldots, r_r)} = 1 \;, \quad \sum_{k=1}^{r} u_k \overline{f_k(u_1, \ldots, u_r)} = 0$$

erfüllen. Solche Funktionen bilden aber gerade eine stetige Lösung der komplexen linearen Gleichung $\sum\limits_{k=1}^{r} u_k \overline{v_k} = 0$ (vgl. Nr. 4), und wir haben damit gezeigt, daß der Satz IV, dessen Beweis das Ziel unserer Ausführungen ist, mit dem folgenden äquivalent ist:

Satz IV'. Die Zerlegung $\mathfrak{Z}_r$ besitzt bei ungeradem r keine Schnittfläche.

Zusatz: Bei geradem r besitzt $\mathfrak{Z}_r$ eine Schnittfläche (diese wird durch den Zusatz zu Satz IV und die Formel (4) explizite gegeben).

Den Beweis von Satz IV' erbringen wir nun auf Grund der in Nr. 7 genannten Beziehungen dadurch, daß wir ein spezielles Schnittelement t von $\mathfrak{Z}_r$ konstruieren und dann zeigen, daß dessen Rand t' bei ungeradem r eine wesentliche (also nicht-zusammenziehbare) Abbildung der Randsphäre Σ^{2r-2} von V^{2r-1} auf die Faser (die hier eine Sphäre S^{2r-3} ist) darstellt. Dagegen ist t' bei geradem r eine unwesentliche (zusammenziehbare) Abbildung — das folgt schon aus dem Zusatz zu IV', wir können es aber auch direkt beweisen.

9. *Schnittelement der Zerlegung $\mathfrak{Z}_r$.*

a) Die $(2n - 1)$-dimensionale Sphäre S^{2n-1} läßt sich im unitären Raum U_n (vgl. Nr. 6) durch die Gleichung

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{u_j} u_j = 1$$

darstellen, und die $(2n - 2)$-dimensionale Sphäre S^{2n-2} als diejenige Großsphäre dieser S^{2n-1}, die durch die Bedingung

$$u_k = \text{reell}$$

(wo k eine der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ ist) bestimmt wird, und die wir gelegentlich als S_k^{2n-2} bezeichnen.

K_{n-1} $(n \geqslant 2)$ sei der komplexe projektive Raum von $(n-1)$ komplexen, $2n-2$ reellen Dimensionen. Seine Punkte z sind die Verhältnisse komplexer Zahlen $z_1 : z_2 : \ldots : z_n$, ausgenommen $0 : 0 : \ldots : 0$; wenn wir sie durch normierte n-Tupel $z_1, z_2, \ldots, z_n$ mit $\sum_{j=1}^{n} \overline{z_j}\, z_j = 1$ geben, so bedeuten zwei n-Tupel $z_1, z_2, \ldots, z_n$ und $z_1', z_2', \ldots, z_n'$ dann und nur dann denselben Punkt z von K_{n-1}, wenn

$$z_j' = \lambda z_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

ist, mit $\lambda \bar{\lambda} = 1$.

b) Zwischen K_{n-1} und den Sphären S^{2n-1} und S^{2n-2} gibt es zwei „natürliche" Abbildungen:

Mit f oder $f^{(n)}$ bezeichnen wir die Abbildung der im U_n dargestellten S^{2n-1} auf K_{n-1}, die dem Punkt mit den Koordinaten $u_1, u_2, \ldots, u_n$ der S^{2n-1} den Punkt $u_1 : u_2 : \ldots : u_n$ des K_{n-1} zuordnet. Die Urbilder der einzelnen Punkte des K_{n-1} sind dabei Großkreise der S^{2n-1}, die eine „Faserung" der S^{2n-1} bilden[14]). f soll deshalb kurz „Faserabbildung" heißen.

Ferner kann man den K_{n-1} mit dem Grade 1 auf die Sphäre S^{2n-2} abbilden: Man wählt auf S^{2n-2} einen Punkt p; $K_{n-2} \subset K_{n-1}$ sei der durch $z_k = 0$ bestimmte Unterraum von K_{n-1}; $K_{n-1} - K_{n-2}$ ist dem $(2n-2)$-dimensionalen Euklidischen Raum homöomorph. Man bilde nun $K_{n-1} - K_{n-2}$ topologisch (mit dem Grade $+1$) auf $S^{2n-2} - p$ und K_{n-2} auf p ab. Eine derartige Abbildung erhält man leicht vermittelst stereographischer Projektion; dabei findet man folgende Formeln:

Durch

$$s_{kj}(z) = 2\overline{z_k}\, z_j - \delta_{kj} \quad , \qquad j = 1, 2, \ldots, n \;, \tag{5}$$

(wobei k eine bestimmte der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ ist) ist eine Abbildung s_k (oder $s_k^{(n)}$, um die Dimensionszahl hervorzuheben) von K_{n-1} in den U_n gegeben; denn es ist $(\overline{\lambda z_k})(\lambda z_j) = \overline{z_k} z_j$ für $\lambda\bar{\lambda} = 1$. Dabei gilt

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \overline{s_{kj}(z)}\; s_{lj}(z) &= \sum_{j=1}^{n} (2 z_k \overline{z_j} - \delta_{kj})(2\overline{z_l} z_j - \delta_{lj}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \delta_{kj}\,\delta_{lj} - 4 z_k \overline{z_l} + 4 z_k\, \overline{z_l} \cdot \sum_{j=1}^{n} \overline{z_j} z_j \;,\end{aligned}$$

also

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{s_{kj}(z)}\; s_{lj}(z) = \delta_{kl} \;. \tag{6}$$

Ferner ist

$$\overline{s_{kj}(z)} = s_{jk}(z) \;. \tag{6'}$$

14) vgl. *Hopf* [7], 438—440; ferner: [8], S. 52 und 55.

Insbesondere ist also $\sum_{j=1}^{n} \overline{s_{kj}(z)}\, s_{kj}(z) = 1$ und $s_{kk}(z) =$ reell; s_k ist also eine Abbildung von K_{n-1} auf die Sphäre S_k^{2n-2} im U_n, und man verifiziert leicht, daß sie die gewünschten Eigenschaften hat: $K_{n-2}(z_k = 0)$ wird auf den Punkt p_k mit den Koordinaten $u_j = -\delta_{kj}$ abgebildet, und $K_{n-1} - K_{n-2}$ topologisch auf $S_k^{2n-2} - p_k$.

c) Im unitären Raum $U'_{n-1} (n \geqslant 2)$ mit den Koordinaten $w_2, w_3, \ldots, w_n$ wird durch die Bedingung

$$\sum_{j=2}^{n} \overline{w_j}\, w_j \leqslant 1$$

eine $(2n-2)$-dimensionale Vollkugel V^{2n-2} mit der Randsphäre Σ^{2n-3}

$$\sum_{j=2}^{n} \overline{w_j}\, w_j = 1$$

bestimmt. $g^{(n)}$ sei die Abbildung dieser Vollkugel auf K_{n-1}, die dem Punkt $w \in V^{2n-2}$ mit den Koordinaten $w_2, \ldots, w_n$ den Punkt $z \in K_{n-1}$ mit den Koordinaten

$$z_1 = \sqrt{1 - \sum_{j=2}^{n} \overline{w_j}\, w_j} \;; \qquad z_j = w_j \,, \quad j = 2, \ldots, n$$

zuordnet. Bei dieser Abbildung wird die Randsphäre Σ^{2n-3} vermöge der Abbildung $f^{(n-1)}$ (vgl. Nr. 9a) auf den durch $z_1 = 0$ bestimmten $K_{n-2} \subset K_{n-1}$ abgebildet, und das Innere der V^{2n-2} topologisch auf $K_{n-1} - K_{n-2}$; haben nämlich zwei Punkte $w_2, \ldots, w_n$ und $w'_2, \ldots, w'_n$ von $V^{2n-2} - \Sigma^{2n-3}$ denselben Bildpunkt in K_{n-1}, so muß

$$\frac{w_j}{\sqrt{1 - \Sigma\, \overline{w_k}\, w_k}} = \frac{w'_j}{\sqrt{1 - \Sigma\, \overline{w'_k}\, w'_k}}, \quad j = 2, 3, \ldots, n$$

sein, also

$$\frac{\Sigma\, \overline{w_j}\, w_j}{1 - \Sigma\, \overline{w_k}\, w_k} = \frac{\Sigma\, \overline{w'_j}\, w'_j}{1 - \Sigma\, \overline{w'_k}\, w'_k} \,,$$

und daraus folgt $\sum_{k=2}^{n} \overline{w_k}\, w_k = \sum_{k=2}^{n} \overline{w'_k}\, w'_k$ und $w'_j = w_j$ $(j = 2, 3, \ldots, n)$.

d) Setzen wir nun

$$h_k^{(n)} = s_k^{(n)} g^{(n)} \,,$$

so ist dies eine *Abbildung von* V^{2n-2} in den U_n, genauer *auf die Sphäre* S_k^{2n-2}, die durch Funktionen

$$h_{kj}(w) = s_{kj}(g^{(n)}(w)) \ , \quad j = 1, \ldots, n$$

gegeben ist; diese Funktionen genügen wegen (6), (6') den Relationen

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{h_{kj}(w)} \cdot h_{lj}(w) = \delta_{kl} \tag{7}$$

$$\overline{h_{kj}(w)} = h_{jk}(w) \ . \tag{7'}$$

Die Abbildung $h_1^{(n)}$ zeichnet sich vor den andern dadurch aus, daß bei ihr die ganze Randsphäre Σ^{2n-3} auf den Punkt p_1 von S_1^{2n-2} abgebildet wird.

e) α sei ein reeller Parameter, der die Strecke $V^1(-1 \leqslant \alpha \leqslant +1)$ durchläuft. Wir definieren eine Abbildung H_k (oder $H_k^{(n)}$) des topologischen Produktes $V^{2n-2} \times V^1$ in den U_n durch die Funktionen

$$H_{kj}(w, \alpha) = h_{kj}(w) \cos \frac{\pi}{2} \alpha + i \delta_{kj} \sin \frac{\pi}{2} \alpha \ .$$

Es ist

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{H_{kj}(w, \alpha)} \, H_{lj}(w, \alpha) = \cos^2 \frac{\pi}{2} \alpha \cdot \sum_{j=1}^{n} \overline{h_{kj}(w)} \, h_{lj} \cdot (w) + \sin^2 \frac{\pi}{2} \alpha \cdot \delta_{kl}$$

$$+ i \cdot \sin \frac{\pi}{2} \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{2} \alpha \cdot (\overline{h_{kl}(w)} - h_{lk}(w)) \ ,$$

also wegen (7), (7')

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{H_{kj}(w,\alpha)} \, H_{lj}(w, \alpha) = \delta_{kl} \ ; \tag{8}$$

insbesondere ist $\sum_{j=1}^{n} \overline{H_{kj}(w, \alpha)} \, H_{kj}(w, \alpha) = 1$.

Man sieht, daß H_k eine Abbildung von $V^{2n-2} \times V^1$ auf die Sphäre S^{2n-1} im U_n ist, und zwar von folgender Art: S_k^{2n-2} werde als „Äquator" der S^{2n-1} aufgefaßt; $V^{2n-2} \times (0)$ wird vermöge der Abbildung h_k auf S_k^{2n-2} abgebildet, $V^{2n-2} \times (\alpha)$ auf den „Parallelkreis" $u_k = i \sin \frac{\pi}{2} \alpha$, $V^{2n-2} \times (+1)$ auf den „Nordpol", $V^{2n-2} \times (-1)$ auf den Südpol der S^{2n-1}. Man kann also in naheliegender Weise H_k auch auffassen als Abbildung der $(2n-1)$-dimensionalen Vollkugel V^{2n-1} auf die S^{2n-1}; dabei hat $V^{2n-2} \times (+1)$ dem Nordpol, $V^{2n-2} \times (-1)$ dem Südpol, $V^{2n-1} \times (\alpha)$ bei festem α einem Parallelkreis der V^{2n-1} zu entsprechen, und $\Sigma^{2n-3} \times V^1$ entspricht dann der Randsphäre Σ^{2n-2} von V^{2n-1}. Bezeichnen wir die Abbildung, die Σ^{2n-2} bei H_k erfährt, mit H'_k und die Abbildung, die Σ^{2n-3} bei h_k erfährt, mit h'_k, so kann man den geschilderten Zusammenhang zwischen H_k und h_k für die Randabbildungen H'_k und h'_k kurz so formulieren: Die Abbildung H'_k von Σ^{2n-2} in S^{2n-1} geht durch *Einhängung* (im Sinne von Freudenthal[15])) aus der Abbildung h'_k von Σ^{2n-3} in S_k^{2n-2} hervor:

$$H'_k = \mathfrak{E} h'_k \ .$$

Bei der Abbildung H'_1 speziell wird Σ^{2n-2} auf den zu $p_1 \in S_1^{2n-2}$ gehörigen (Halb-) Meridian μ der S^{2n-1} abgebildet; seine Punkte haben die Koordinaten

$$u_1 = -\cos\frac{\pi}{2}\alpha + i\cdot\sin\frac{\pi}{2}\alpha\ , u_2 = \cdots = u_n = 0\ , \ (-1 \leqslant \alpha \leqslant +1).$$

f) Wir definieren nun eine Abbildung t_r von V^{2r-1} bzw. von $V^{2r-2} \times V^1$ in die Mannigfaltigkeit $U_{r,2}$ (vgl. Nr. 8) durch

$$\left.\begin{aligned} u_j &= H_{1j}^{(r)}(w,\alpha) \\ v_j &= H_{2j}^{(r)}(w,\alpha) \end{aligned}\right\} \quad j = 1, 2, \ldots, r \ .$$

Wegen (8) sind die Relationen (3) bzw. (3′) erfüllt, d. h. durch die u_j, v_j ist wirklich ein Punkt von $U_{r,2}$ gegeben. Wir behaupten, daß t_r ein *Schnittelement der Zerlegung* $\mathfrak{Z}_r$ *von* $U_{r,2}$ ist.

Zunächst gilt für die Projektion P_r in der Zerlegung $\mathfrak{Z}_r$:

$$P_r t_r = H_1^{(r)} \ ;$$

das ist eine Abbildung von V^{2r-1} auf S^{2r-1}, bei welcher Σ^{2r-2} auf den Meridian μ von S^{2r-1} abgebildet wird, und das Innere von V^{2r-1} topologisch auf $S^{2r-1} - \mu$. Bei einem Schnittelement müßte allerdings das Bild von Σ^{2r-2} ein Punkt sein; unsere Behauptung wird also erst dann richtig, wenn wir alle Punkte von μ identifizieren und μ als einen Punkt M betrachten (bzw. auf einen seiner Punkte zusammenziehen, etwa auf p_1). Dabei haben wir auch die in $U_{r,2}$ zu den Punkten von μ gehörigen Fasern, die alle durch

$$\begin{aligned} &u_1 = -\cos\frac{\pi}{2}\alpha + i\ \sin\ \frac{\pi}{2}\alpha\ , \ u_2 = \cdots = u_r = 0 \\ &v_1 = 0\ , \quad \sum_{j=2}^{r} \overline{v}_j v_j = 1\ , \end{aligned} \tag{9}$$

charakterisiert sind und somit das topologische Produkt $\mu \times S^{2r-3}$ bilden, zu identifizieren und als eine Faser $\overline{M}$ zu betrachten; das hat natürlich so

[15]) Definition s. [6], S. 303.

zu geschehen, daß man immer alle die Punkte (9) von $U_{r,2}$ identifiziert, die in $v_2, v_3, \ldots, v_r$ übereinstimmen. Die Punkte der Faser $\overline{M}$ sind dann durch diese Zahlen $v_2, \ldots, v_r$ mit $\sum_{j=2}^{r} \overline{v}_j v_j = 1$ gegeben, also ist $\overline{M}$ zur S^{2r-3} (mit den Koordinaten $v_2, \ldots, v_r$) homöomorph. Bei der beschriebenen Identifizierung geht offenbar $U_{r,2}$ in eine zu ihr homöomorphe Mannigfaltigkeit über.

g) Wir haben noch den Rand t'_r des Schnittelements t_r zu untersuchen, d. h. die durch t_r bewirkte Abbildung von Σ^{2r-2} auf die Faser $\overline{M}$. Sie ist gegeben durch (vgl. e))

$$\left.\begin{aligned} u_j &= H'_{1j}(w, \alpha) = \delta_{1j} \cdot \left(-\cos\frac{\pi}{2}\alpha + i\sin\frac{\pi}{2}\alpha\right) \\ v_j &= H'_{2j}(w, \alpha) \end{aligned}\right\} \quad j = 1, 2, \ldots, r\ ;$$

wegen der oben vorgenommenen Identifizierung genügt zur Beschreibung dieser Abbildung die Angabe der v_j ($j = 2, 3, \ldots, r$). Also ist

$$t'_r = H'_2\ ,$$

wobei aber H'_2 nicht als Abbildung von Σ^{2r-2} in S^{2r-1}, sondern in S^{2r-3} ($v_1 = 0$) aufzufassen ist. Für H'_2 gilt nach e)

$$H'_2 = \mathfrak{E} h'_2\ ,$$

wobei wiederum h'_2 als Abbildung von Σ^{2r-3} in S_2^{2r-4} ($v_1 = 0$, $v_2 =$ reell) aufzufassen ist. Gemäß ihrer Definition ist

$$h'_2 = s_2^{(r-1)} f^{(r-1)}\ ;$$

diese Abbildung entsteht also so: *man bilde Σ^{2r-3} vermöge der Faserabbildung $f^{(r-1)}$ auf K_{r-2} ab und dann K_{r-2} mit dem Grade 1 vermöge $s^{(r-1)}$ auf* S^{2r-4} (den Index 2 lassen wir weg, da er jetzt keine Rolle mehr spielt). Wir bezeichnen sie im folgenden mit $\vartheta^{(r-1)}$. Also

$$t'_r = \mathfrak{E}\, \vartheta^{(r-1)}\ .$$

Nach einem Satze von Freudenthal[16]) ist für $n \geqq 4$ und eine beliebige Abbildung h von S^n auf S^{n-1} die Abbildung $\mathfrak{E}h$ dann und nur dann wesentlich, wenn h es ist; also ist t'_r für $r > 3$ dann und nur dann wesentlich, wenn $\vartheta^{(r-1)}$ eine wesentliche Abbildung von Σ^{2r-3} auf S^{2r-4} ist. *Der Satz IV'*

[16]) [6], S. 300, Satz II, 1.

wird somit für $r > 3$ bewiesen sein, sobald wir gezeigt haben, daß für ungerades r die Abbildung $\vartheta^{(r-1)}$ wesentlich ist. Dies werden wir im § 3 tun.

h) Den Fall $r = 3$ können wir aber direkt erledigen. Wenn nämlich h eine beliebige Abbildung von Σ^3 auf S^2 ist, so ist nach Freudenthal[17]) $\mathfrak{E}h$ dann (und nur dann) wesentlich, wenn die Hopf'sche Invariante[18]) von h ungerade ist (daß h wesentlich ist, ist natürlich für die Wesentlichkeit von $\mathfrak{E}h$ notwendig, aber in diesem Fall nicht hinreichend); das ist aber bei $\vartheta^{(2)}$ der Fall: K_1, die komplexe projektive Gerade, ist zur S^2 homöomorph, und $\vartheta^{(2)}$ ist identisch mit der „Faserabbildung" $f^{(2)}$ (vgl. 9b) von Σ^3 auf K_1, abgesehen von der stereographischen Projektion, die K_1 topologisch auf S^2 abbildet. $\vartheta^{(2)}$ ist also nichts anderes als die von Hopf[19]) gefundene wesentliche Abbildung von Σ^3 auf S^2 mit der Invarianten $\gamma = 1$. Also ist

$$t_3' = \mathfrak{E}\,\vartheta^{(2)}$$

wesentlich.

Damit ist der Beweis der Sätze IV′ und IV für $r = 3$, und des Satzes I für die S^5, schon beendet.

i) Der Satz IV′ (und infolgedessen auch der Satz IV) für $r = 3$ ist übrigens fast identisch mit dem Satz von Pontrjagin [4], mit dessen Hilfe ich schon früher den Satz I für den Spezialfall der S^5 bewiesen habe, und der folgendermaßen lautet: Der Gruppenraum der unitären Gruppe A_2 kann nicht einem topologischen Produkt homöomorph sein, in welchem ein Faktor eine Sphäre S^3 ist.

Daß aus diesem Satz der Satz IV′ für $r = 3$ folgt, ist leicht einzusehen: $U_{3,2}$ ist zur Gruppe A_2 homöomorph, und die Zerlegung $\mathfrak{Z}_3$ ist nichts anderes als die Zerlegung von A_2 in Restklassen nach einer mit A_1 isomorphen Untergruppe A_1', die zum Wirkungsraum S^5 der Gruppe A_2 gehört[20]). Wenn aber eine solche Zerlegung eine Schnittfläche besitzt, so zerfällt der Gruppenraum in ein topologisches Produkt[21]), in unserm Falle in das Produkt $S^5 \times A_1'$; A_1' ist aber zur Sphäre S^3 homöomorph.

Daß umgekehrt aus der Nicht-Existenz einer Schnittfläche in dieser Restklassenzerlegung leicht folgt, daß A_2 nicht einem topologischen Produkt $S^3 \times R$ homöomorph sein kann, habe ich an anderer Stelle gezeigt[22]).

---

[17]) [6], S. 301, bes. Satz III.

[18]) Definition s. [9], S. 645 ff.; ferner [6], S. 304—305.

[19]) [9], S. 654.

[20]) vgl. [3], Nr. 8d und 16c.

[21]) nach einem allgemeinen Satz, s. [3], Nr. 11, Satz 16.

[22]) das ist den Ausführungen von Nr. 16c der Arbeit [3] zu entnehmen, wenn es auch dort nicht explizite formuliert wird.

Unser Beweis des Satzes IV$'$ für $r = 3$ bzw. des Satzes von Pontrjagin benützt aber keine gruppentheoretischen Eigenschaften der unitären Gruppen; wir haben keinen Gebrauch von der Tatsache gemacht, daß $U_{3,2}$ ein Gruppenraum ist.

§ 3. Untersuchung einer speziellen Sphärenabbildung

10. Wir befassen uns in diesem Paragraphen mit der Abbildung $\vartheta^{(n)}$ der Sphäre S^{2n-1} auf die Sphäre S^{2n-2}, die für den Beweis des Satzes IV$'$ eine entscheidende Rolle spielt; sie ist gemäß Nr. 9g so definiert: Man bilde S^{2n-1} vermöge der Faserabbildung $f^{(n)}$ auf den komplexen projektiven Raum K_{n-1} ab und dann K_{n-1} mit dem Grade 1 (vermöge der Abbildung $s^{(n)}$) auf S^{2n-2}; die Abbildung von S^{2n-1} auf S^{2n-2}, die man so erhält, heißt $\vartheta^{(n)}$. Wie aus der Definition von $f^{(n)}$ und $s^{(n)}$ und der Formel (5) (siehe Nr. 9b) zu entnehmen ist, kann man diese Abbildung $\vartheta^{(n)}$ folgendermaßen explizite durch Formeln angeben: S^{2n-1} sei im unitären Raum U'_n mit den Koordinaten $w_1, \ldots, w_n$ durch $\sum_{j=1}^{n} \overline{w_j}\, w_j = 1$ dargestellt, S^{2n-2} im U_n mit den Koordinaten $u_1, \ldots, u_n$ durch $\sum_{j=1}^{n} \overline{u_j}\, u_j = 1$, $u_1 =$ reell; dann ist $\vartheta^{(n)}$ durch die Gleichungen

$$u_j = \vartheta_j^{(n)}(w_1, \ldots, w_n) = 2\overline{w_1}\, w_j - \delta_{1j} \quad , \quad j = 1, \ldots, n$$

gegeben. Wir werden unabhängig von den früheren Betrachtungen zeigen:

Satz IV$''$. Die Abbildung $\vartheta^{(n)}$ ist bei geradem n wesentlich, bei ungeradem n unwesentlich ($n \geqslant 2$).

Bemerkungen: a) In diesem Satz ist Satz IV$'$ (für $r > 3$) enthalten, mit ihm werden also auch die Sätze IV, III, I und V vollständig bewiesen sein.

b) Im Falle $n = 2$ ist Satz IV$''$ schon bekannt (siehe Nr. 9h); wir haben den Satz IV$''$ somit nur noch für $n \geqslant 3$ zu beweisen.

c) *Ein Korollar zu Satz IV$''$.* Im komplexen projektiven Raum K_n sei K_{n-1} der durch $z_1 = 0$ bestimmte Teilraum. Die Abbildung $s^{(n)}$ von K_{n-1} auf S^{2n-2} vom Grade 1 läßt sich bei geradem n *nicht* zu einer Abbildung von K_n auf S^{2n-2} erweitern, wohl aber bei ungeradem n.

Beweis: Die Abbildung $s^{(n)}$ von K_{n-1} auf S^{2n-2} läßt sich dann und nur dann zu einer Abbildung $s_0^{(n)}$ von K_n auf S^{2n-2} erweitern, wenn die Abbildung $\vartheta^{(n)}$ der Randsphäre Σ^{2n-1} der Vollkugel V^{2n} auf S^{2n-2} sich zu einer Abbildung $\vartheta_0^{(n)}$ von V^{2n} auf S^{2n-2} erweitern läßt, d. h. wenn $\vartheta^{(n)}$ unwesentlich ist; das sieht man ein, wenn man die Abbildung $g^{(n+1)}$ (siehe Nr. 9c) von V^{2n} auf K_n zu Hilfe nimmt, bei welcher Σ^{2n-1} vermöge der Faserabbildung $f^{(n)}$ auf K_{n-1} abgebildet wird, und

$$\vartheta_0^{(n)} = s_0^{(n)} g^{(n+1)}$$

bezw.

$$s_0^{(n)} = \vartheta_0^{(n)} (g^{(n+1)})^{-1}$$

setzt.

11. a) Zum Beweis von Satz IV″ stellen wir einige Hilfssätze bereit, die uns auch sonst zur Untersuchung spezieller, explizite gegebener Abbildungen von Sphären auf Sphären nützlich erscheinen (sie lassen sich zum Teil auch auf andere Dimensionszahlen übertragen).

Die Sphäre S^{d+1} sei im Euklidischen Raum R^{d+2} mit den Koordinaten $x_1, \ldots, x_{d+2}$ durch $\sum\limits_{j=1}^{d+2} x_j^2 = 1$ gegeben, die Sphäre S^d im R^{d+1} mit den Koordinaten $y_1, \ldots, y_{d+1}$ durch $\sum\limits_{j=1}^{d+1} y_j^2 = 1$. Bezeichnungen: Es bedeute

$V' \subset S^d$ die Kalotte $\quad y_{d+1} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ von S^d ,

$V'' \subset S^d$ die Kalotte $\quad y_{d+1} \leqslant -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ von S^d ,

$\Sigma \subset S^d$ den gemeinsamen Rand von V' und V'' ,

$p \in V'$ den Punkt $y_j = \delta_{d+1,j} (j = 1, \ldots, d+1)$ der S^d; ferner

$T' \subset S^{d+1}$ den „Volltorus“ $\sum\limits_{j=1}^{d} x_j^2 \leqslant x_{d+1}^2 + x_{d+2}^2$ in der S^{d+1} ,

$T'' \subset S^{d+1}$ den „Volltorus“ $\sum\limits_{j=1}^{d} x_j^2 \geqslant x_{d+1}^2 + x_{d+2}^2$ in der S^{d+1} ,

$P \subset S^{d+1}$ den gemeinsamen Rand $\sum\limits_{j=1}^{d} x_j^2 = x_{d+1}^2 + x_{d+2}^2 = \frac{1}{2}$ von T' und T'', der dem topologischen Produkt $S^1 \times S^d$ homöomorph ist (ein „Torus“),

$K \subset T'$ den Großkreis $\sum\limits_{j=1}^{d} x_j^2 = 0$, $x_{d+1}^2 + x_{d+2}^2 = 1$ der S^{d+1}; seine Punkte ξ können wir durch zwei Zahlen $\xi_1 = x_{d+1}$, $\xi_2 = x_{d+2}$ mit $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$ geben.

Ein Punkt $y \in V'$ ist durch die Angabe von $y_1, \ldots, y_d$ (mit $\sum_{j=1}^{d} y_j^2 \leqslant \frac{1}{2}$) bestimmt. T' ist dem topologischen Produkt $V' \times K$ homöomorph: man ordne dem Punkt $x = (x_1, \ldots, x_{d+2}) \in T'$ den Punkt $y \in V'$:

$$y_j = x_j \ , \qquad j = 1, \ldots, d$$

nnd den Punkt $\xi \in K$:

$$\xi_j = \frac{x_{d+j}}{\sqrt{x_{d+1}^2 + x_{d+2}^2}} \quad , \qquad j = 1 \ , 2$$

zu. Im folgenden soll in diesem Sinne ein Punkt $x \in T'$ statt durch $x_1, \ldots, x_{d+2}$ immer durch $x_1, \ldots, x_d$ mit $\sum_{j=1}^{d} x_j^2 \leqslant \frac{1}{2}$ und $\xi \in K$ gegeben werden.

b) Eine Abbildung f von S^{d+1} in S^d soll *regulär* heißen, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

1. $f(T') = V'$, $f(T'') \subset V''$. — Die von f in diesem Fall induzierten Abbildungen von T' auf V' und von T'' in V'' sollen f' bzw. f'' heißen.

2. Die Abbildung f' von T' auf V' kann durch Gleichungen

$$y_j = \sum_{k=1}^{d} a_{jk}(\xi)\, x_k \quad , \qquad j = 1, \ldots, d$$

beschrieben werden, wobei die a_{jk} stetige Funktionen von $\xi \in K$ sind und die Matrix $(a_{jk}(\xi))_d$ für jedes $\xi \in K$ orthogonal ist und die Determinante $+1$ hat.

Die Forderung 2. bedeutet mit andern Worten: Bei der Abbildung f' wird, wenn man T' wie oben als topologisches Produkt $V' \times K$ auffaßt, $V' \times (\xi)$ für jedes $\xi \in K$ orthogonal auf V' abgebildet. Dabei ist $f'(K) = p$, und der Rand P von T' wird auf den Rand Σ von V' abgebildet; diese Abbildung von P auf Σ soll f''' heißen.

c) Durch die eben in der Definition genannte Matrix $(a_{jk}(\xi))$ ist eine Abbildung von K in die Gruppe Ω_d aller d-reihigen orthogonalen Matrizen mit der Determinante $+1$ gegeben, d. h. ein geschlossener Weg in Ω_d; da die Abbildung f' durch diesen Weg völlig definiert ist, wollen wir ihn auch f' nennen. Jeder solche Weg repräsentiert ein Element der Fundamentalgruppe $F(\Omega_d)$ von Ω_d, das wir mit $\alpha(f)$ bezeichnen. (Einen Anfangspunkt für diese Wege auszuzeichnen, ist zwar nicht nötig, da es sich um Wege in einem Gruppenraum handelt, aber für die Zusammensetzung der Wege angenehm; man kann etwa verlangen, daß für den Punkt $\xi^0 \in K$ mit $\xi_1^0 = 1$, $\xi_2^0 = 0$

$$a_{jk}(\xi^0) = \delta_{jk}$$

sei.)

Zu jeder regulären Abbildung f von S^{d+1} in S^d gehört also ein Element $\alpha(f)$ der Fundamentalgruppe von Ω_d.

d) *Hilfssatz* 1: f und g seien zwei reguläre Abbildungen von S^{d+1} in S^d; wenn $\alpha(f) = \alpha(g)$ ist, so sind die Abbildungen f und g homotop.

Beweis: $\alpha(f) = \alpha(g)$ bedeutet, daß die zu f und g gehörigen Wege f' und g', also auch die Abbildungen f' und g' von T' auf V' homotop sind; es gibt also eine Deformation von f' in g', d. h. eine stetige Schar von Abbildungen φ'_t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ von T' auf V', die alle die Eigenschaft 2. haben, mit $\varphi'_0 = f'$, $\varphi'_1 = g'$. Es entsteht dabei auch eine Deformation der Abbildung f''' von P auf Σ in die Abbildung g''' von P auf Σ, wobei das Bild von P immer $= \Sigma$ ist; diese Deformation läßt sich nach einem elementaren Erweiterungssatz[23]) zu einer Deformation φ''_t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ von f'' erweitern, mit $\varphi''_t(T'') \subset V''$. Die Deformationen φ'_t und φ''_t ergeben zusammen eine Deformation f_t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ der Abbildung $f = f_0$ in eine reguläre Abbildung f_1, für welche

$$f'_1 = \varphi'_1 = g'$$

ist; für jeden innern Punkt y von V' ist also $f_1^{-1}(y) = g^{-1}(y)$, und daraus folgt[24]), daß f_1 und g, also auch f und g homotop sind.

e) *Hilfssatz* 2: Die Abbildung f von S^{d+1} in S^d, gegeben durch die Funktionen $y_j(x_1, \ldots, x_{d+2})$, $j = 1, \ldots, d+1$, habe folgende Eigenschaften: $f^{-1}(p) = K$; in der Umgebung von K seien die y_j stetig differenzierbar, und wir setzen $b_{jk}(\xi) = \left(\dfrac{\partial y_j}{\partial x_k}\right)_{x_1 = \cdots = x_d = 0}$ für $j, k = 1, \ldots, d$; für alle $\xi \in K$ sei die Funktionaldeterminante $|b_{jk}(\xi)| > 0$. Dann ist f einer regulären Abbildung h von S^{d+1} in S^d homotop, bei welcher h' durch diejenige orthogonale Matrix $(a_{jk}(\xi))$ mit der Determinante $+1$ gegeben ist, die aus $(b_{jk}(\xi))$ durch Orthogonalisieren hervorgeht (wobei man natürlich für das Orthogonalisieren ein eindeutiges und stetiges Verfahren festzulegen hat).

---

[23]) s. *Alexandroff-Hopf*[2]), S. 501, Hilfssatz I.
[24]) s. *Alexandroff-Hopf*[2]), S. 502, Hilfssatz III.

Beweis (wir führen nicht alle Einzelheiten ausführlich durch): Für einen Punkt $x \in S^{d+1}$ mit den Koordinaten $x_1, \ldots, x_{d+2}$ sei $r(x) = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} x_j^2}$, analog für $y \in S^d$ mit den Koordinaten $y_1, \ldots, y_{d+1}$ $r(y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} y_j^2}$. Ferner sei $V_r (r < 1)$ die r-Umgebung von $p (r(y) < r,\ y_{d+1} > 0)$ in S_d, U_r die r-Umgebung von K, $r(x) < r$, in S^{d+1} (also ein offener Volltorus, homöomorph dem topologischen Produkt $V_r \times K$), P_r der Rand von U_r, $r(x) = r$. Wir können V_r normal in die Ebene $y_{d+1} = 0$ projizieren und dort als offene Vollkugel im d-dimensionalen Euklidischen Raum auffassen.

g sei die Abbildung

$$y_j = \sum_{k=1}^{d} b_{jk}(\xi)\, x_k \qquad j = 1, \ldots, d$$

von U_r in die Umgebung von p. Es gibt eine Zahl $\delta > 0$, so daß bei beliebigem $r > 0$, $r(g(x)) > \delta r$ ist für alle x mit $r(x) = r$. Mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung stellt man leicht fest, daß man $r > 0$ so wählen kann, daß

$$\varrho\,(f(x)\,,\ g(x)) < \frac{\delta}{2}\, r$$

ist für alle $x \in P_r$. Wir wählen nun eine Zahl $r' (< \frac{\delta}{2} r)$, so daß

$$f(S^{d+1} - U_r) \subset S^d - V_{r'}\ .$$

Deformieren wir nun innerhalb U_r die Abbildung f in g, indem wir $f(x)$ geradlinig nach $g(x)$ wandern lassen, so liegt bei dieser ganzen Deformation das Bild von P_r in $S^d - V_{r'}$; man kann also diese Deformation zu einer Deformation der ganzen Abbildung f von S^{d+1} in S^d erweitern, derart, daß das Bild von $S^{d+1} - U_r$ immer in $S^d - V_{r'}$ liegt. Man erhält dadurch eine zu f homotope Abbildung f_1 von S^{d+1} in S^d, bei welcher $f_1^{-1}(V_{r'}) \subset U_r$ ist, und die in U_r durch g gegeben ist.

Aus $(b_{jk}(\xi))$ bilden wir nun durch Orthogonalisieren der Zeilenvektoren in bestimmter Reihenfolge eine orthogonale Matrix $(a_{jk}(\xi))$ (wobei die Determinante $|a_{jk}(\xi)| = +1$ ist). Dann gibt es eine stetige Schar von nichtsingulären Matrizen $b_{jk}(\xi, t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, derart, daß

$$b_{jk}(\xi, 0) = b_{jk}(\xi) \quad \text{und} \quad b_{jk}(\xi, 1) = a_{jk}(\xi)$$

ist [25]; diese Schar liefert uns eine Schar g_t von Abbildungen, durch

[25]) das ist etwa den Ausführungen von § 2.2 der Arbeit [1] von *Stiefel* zu entnehmen.

welche die Abbildung $g_0 = g$ von U_r in die Umgebung von p in die Abbildung g_1

$$y_j = \sum_{k=1}^{d} a_{jk}(\xi)\, x_k \qquad j = 1, \ldots, d$$

deformiert wird. Dabei gibt es eine Umgebung $V_{r''}$ von p ($r'' < r'$), derart, daß $g_t(P_r) \subset S^d - V_{r''}$ ist, und infolgedessen läßt sich diese Deformation von g in g_1 zu einer Deformation der Abbildung f_1 in eine Abbildung f_2 von S^{d+1} in S^d fortsetzen, für welche gilt:

$$f_2^{-1}(V_{r''}) = U_{r''} \ ;$$

dabei ist die zugehörige Abbildung von $U_{r''}$ auf $V_{r''}$ durch

$$y_k = \sum_{k=1}^{d} a_{jk}(\xi)\, x_k \qquad j = 1, \ldots, d$$

mit der orthogonalen Matrix $(a_{jk}(\xi))$ gegeben.

Diese Abbildung f_2 aber läßt sich leicht in eine reguläre Abbildung deformieren, die alle im Hilfssatz 2 genannten Eigenschaften besitzt.

Hilfssatz 3: Wenn f eine reguläre Abbildung von S^{d+1} in S^d ist, so ist die Abbildung $\mathfrak{E}f$ von S^{d+2} in S^{d+1}, die aus f durch *Einhängung*[15]) hervorgeht, auch regulär; ist der Weg f' in Ω_d durch die Matrix $a(\xi)$ gegeben, so ist der Weg $(\mathfrak{E}f)'$ in Ω_{d+1} durch die Matrix $A(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a(\xi) \end{pmatrix}$ gegeben.

Beweis: Man kann die Einhängung[15]) folgendermaßen beschreiben: Wir fügen zum R^{d+2} bzw. R^{d+1} noch eine Koordinate x_0 bzw. y_0 hinzu und erhalten die Räume R_1^{d+3} bzw. R_1^{d+2}; S_1^{d+2} bzw. S_1^{d+1} seien ihre Einheitssphären. Eine Abbildung g von S^{d+1} in S^d sei gegeben durch Gleichungen

$$y_j = g_j(x_1, \ldots, x_{d+2}) \qquad j = 1, \ldots, d+1 \ .$$

Dann kann die eingehängte Abbildung $\mathfrak{E}g$ von S_1^{d+2} in S_1^{d+1} durch die Gleichungen (r ist als Abkürzung für $\sqrt{\sum_{j=1}^{d} x_j^2}$ gesetzt)

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0 \\ y_j &= r \cdot g_j\left(\frac{x_1}{r}, \ldots, \frac{x_{d+2}}{r}\right), \quad && j = 1, \ldots, d+1, \text{ für } r > 0 \\ y_j &= 0\ , && j = 1, \ldots, d+1, \text{ für } r = 0 \\ & && \text{d. h. } x_0 = y_0 = \pm 1) \end{aligned}$$

beschrieben werden.

f sei eine reguläre Abbildung von S^{d+1} in S^d, wie sie oben in der Definition beschrieben ist. Dann folgt aus der eben genannten Darstellung der Einhängung für die Abbildung $\mathfrak{E}f$:

1. $(\mathfrak{E}f)^{-1}(V_1') = T_1'$ (V_1', T_1', ... seien analog wie V', T', ... definiert).
2. Die Abbildung $(\mathfrak{E}f)$ von T_1' auf V_1' wird beschrieben durch

$$y_0 = x_0 \; ,$$
$$y_j = \sum_{k=1}^{d} a_{jk}(\xi)\, x_k \qquad j = 1, \ldots, d \; ;$$

damit ist der Hilfssatz 3 bewiesen.

Hilfssatz 4: Wenn für eine reguläre Abbildung f von S^{d+1} in S^d $\alpha(f) = 0$ ist (d. h. der Weg f in Ω_d nullhomotop), so ist f unwesentlich (also nullhomotop).

Beweis: Nach Hilfssatz 1 genügt es, eine unwesentliche reguläre Abbildung g von S^{d+1} in S^d anzugeben, bei welcher $\alpha(g) = 0$ ist. Eine solche ist die folgende:

$$y_j = x_j \; , \qquad j = 1, \ldots, d \; ;$$
$$y_{d+1} = +\sqrt{x_{d+1}^2 + x_{d+2}^2} \; ;$$

diese Abbildung ist unwesentlich, da das Bild $g(S^{d+1})$ ganz in der Halbsphäre $y_{d+1} \geqslant 0$ liegt. Ferner ist g' definiert durch

$$y_j = x_j \, , \qquad j = 1, \ldots, d \; ;$$

die zugehörige Matrix ist für alle $\xi \in K$ die Einheitsmatrix, also ist der zugehörige Weg in Ω_d ein Punkt.

Von diesem Hilfssatz gilt auch die Umkehrung: *Wenn für die reguläre Abbildung f von S^{d+1} in S^d $\alpha(f) \neq 0$ ist, so ist f wesentlich.* Sie wird im folgenden bei der Diskussion der Abbildungen $\vartheta^{(n)}$ bewiesen (nur für $d \geqslant 3$).

12. a) Die Abbildungen $\vartheta^{(n)}$ werden am einfachsten durch komplexe Gleichungen beschrieben (siehe Nr. 10); um die Hilfssätze der vorigen Nummer anwenden zu können, haben wir die unitären Räume U_n' und U_n als Euklidische Räume R^{2n}, bzw. den zu reellem u_1 gehörigen Teilraum von U_n als R^{2n-1}, aufzufassen; dabei sollen die reellen Koordinaten mit dem Real- und Imaginärteil der komplexen Koordinaten identifiziert und so nummeriert werden, daß K der Großkreis

$$w_2 = \ldots = w_n = 0 \quad , \quad \overline{w_1} w_1 = 1$$

der S^{2n-1} und p der Punkt $u_j = \delta_{j1} (j = 1, \ldots, n)$ der S^{2n-2} ist. Dann ist

$$\vartheta^{(n)^{-1}}(p) = K \quad ;$$

da $\vartheta^{(n)}$ in der Umgebung von K stetig differenzierbar ist, berechnen wir die im Hilfssatz 2 auftretende Funktionalmatrix, und zwar gerade in der komplexen Schreibweise: $\vartheta^{(n)}$ ist gegeben durch

$$u_j = 2\,\overline{w_1}\,w_j - \delta_{1j} \;, \qquad j = 1, \ldots, n \quad ;$$

also ist (in allen Ableitungen ist $w_2 = \ldots = w_n = 0$ zu setzen) für $j = 2, \ldots, n$ und $k = 2, \ldots, n$

$$\frac{\partial u_j}{\partial w_k} = 2\,\overline{w_1}\,\delta_{jk}$$

oder, wenn man $w_j = w_j' + i w_j''$, $u_j = u_j' + i u_j''$ (w_j', w_j'', u_j', u_j'' reell) und auf $K - w_1 = \cos\varphi + i \sin\varphi$ setzt,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_j}{\partial w_k'} &= \frac{\partial u_j}{\partial w_k} = 2\,\delta_{jk}(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ \frac{\partial u_j}{\partial w_k''} &= i\,\frac{\partial u_j}{\partial w_k} = 2\,\delta_{jk}(-\sin\varphi + i\cos\varphi) \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} j &= 2, \ldots, n \\ k &= 2, \ldots, n, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j'}{\partial w_k'} &= \;\; 2\,\delta_{jk}\cos\varphi \;, & \frac{\partial u_j''}{\partial w_k'} &= 2\,\delta_{jk}\sin\varphi \\ \frac{\partial u_j'}{\partial w_j''} &= -2\,\delta_{jk}\sin\varphi \;, & \frac{\partial u_j''}{\partial w_k''} &= 2\,\delta_{jk}\cos\varphi \end{aligned} \qquad \begin{aligned} j &= 2, \ldots, n \\ k &= 2, \ldots, n \;; \end{aligned}$$

dadurch ist die Funktionalmatrix in jedem Punkt von $K (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ bestimmt. Durch Orthogonalisieren (das hier nur in einem Normieren besteht) erhält man daraus die $2(n-1)$-reihige orthogonale Matrix

$$A_{n-1}(\varphi) = \begin{pmatrix} A(\varphi) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A(\varphi) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & A(\varphi) \end{pmatrix} \in \Omega_{2(n-1)} \;,$$

wobei $A(\varphi) = A_1(\varphi)$ ein 2-reihiges „Kästchen“ $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ bedeutet.

Aus dem Hilfssatz 2 folgt also: *Die Abbildung $\vartheta^{(n)}$ von S^{2n-1} auf S^{2n-2} ist einer regulären Abbildung $\vartheta_1^{(n)}$ homotop, bei welcher der zugehörige Weg in $\Omega_{2(n-1)}$ durch die Matrix $A_{n-1}(\varphi)$ gegeben ist.*

b) Insbesondere gehört zu der Abbildung $\vartheta^{(n)}$ von S^3 auf S^2 (der Hopfschen Faserabbildung, vgl. Nr. 9), genauer zu $\vartheta_1^{(2)}$ der Weg $A_1(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ in Ω_2. Durch wiederholte Einhängung erhält man aus $\vartheta_1^{(2)}$ eine Abbildung $\mathfrak{E} \ldots \mathfrak{E}\,\vartheta_1^{(2)}$ von S^{d+1} auf S^d ($d \geqslant 3$), die nach einem Satze von Freudenthal[17]) wesentlich ist; der zugehörige Weg in Ω_d ist durch die d-reihige Matrix

$$B_d(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & & A(\varphi) \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Fundamentalgruppe $F(\Omega_d)$ hat für $d \geqslant 3$ die Ordnung 2; wir bezeichnen ihre Elemente[26]) mit 0 und α. Es ist bekannt und leicht zu sehen, daß die Matrix $B_d(\varphi)$ das Element $\alpha \neq 0$ repräsentiert[27]) (ebenso jede Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots\, 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & A(\varphi) & & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

aus Ω_d).

Man findet also für die wesentliche Abbildung $\mathfrak{E} \ldots \mathfrak{E}\vartheta_1^{(2)}$ von S^{d+1} auf S^d

$$\alpha(\mathfrak{E} \ldots \mathfrak{E}\,\vartheta_1^{(2)}) = \alpha \ .$$

Damit ist auch (für $d \geqslant 3$) die Umkehrung von Hilfssatz 4 bewiesen; wenn nämlich für eine reguläre Abbildung f von S^{d+1} auf S^d gilt: $\alpha(f) \neq 0$, so ist $\alpha(f) = \alpha$, also ist f nach Hilfssatz 1 der wesentlichen Abbildung $\mathfrak{E} \ldots \mathfrak{E}\vartheta_1^{(2)}$ homotop, also selbst wesentlich.

c) Der Weg in $\Omega_{2(n-1)}$, der zu der Abbildung $\vartheta_1^{(n)}$ gehört, ist durch die Matrix $A_{n-1}(\varphi)$ gegeben, die man auch als Produkt

---

[26]) Die Fundamentalgruppe von Ω_d ist abelsch, wir schreiben sie additiv.

[27]) man vgl. etwa *H. Weyl*, The classical groups (Princeton N. J., 1939), S. 269.

$$A_{n-1}(\varphi) = \begin{pmatrix} A(\varphi) & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & A(\varphi) & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & A(\varphi) \end{pmatrix}$$

schreiben kann; nach einem bekannten Satz[28]) ist dieser Weg homotop der Summe[26]) der durch die Faktoren gegebenen Wege, die alle das Element α repräsentieren. Also gilt

$$\alpha(\vartheta_1^{(n)}) = \alpha + \alpha + \dots + \alpha = (n-1)\alpha \ ,$$

somit

$$\alpha(\vartheta_1^{(n)}) = 0 \ , \ \text{wenn } n \text{ ungerade,}$$

$$= \alpha, \ \text{wenn } n \text{ gerade ist.}$$

Nach Hilfssatz 4 und seiner Umkehrung ist also *für* $n \geqslant 3$ *die Abbildung* $\vartheta_1^{(n)}$ *unwesentlich, wenn* n *ungerade, und wesentlich, wenn* n *gerade ist.* Da $\vartheta_1^{(n)}$ zu $\vartheta^{(n)}$ homotop ist, ist damit Satz IV″ bewiesen.

(Eingegangen den 12. November 1941.)

LITERATUR

[1] *E. Stiefel*, Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Comm. math. helv. 8 (1935), 3—51.

[2] *E. Stiefel*, Über Richtungsfelder in den projektiven Räumen und einen Satz aus der reellen Algebra, Comm. math. helv. 13 (1941), 201—218.

[3] *B. Eckmann*, Zur Homotopietheorie gefaserter Räume, Comm. math. helv. 14 (1941).

[4] *L. Pontrjagin*, Über die topologische Struktur der Lie'schen Gruppen, Comm. math. helv. 13 (1941), 277—283.

[5] *H. Hopf*, Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, Crelles Journal 163 (1930), 71—88.

[6] *H. Freudenthal*, Über die Klassen der Sphärenabbildungen I, Comp. math. V (1935), 299—314.

[7] *H. Hopf*, Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension, Fund. math. XXV (1935), 427—440.

[8] *H. Hopf* und *M. Rueff*, Über faserungstreue Abbildungen der Sphären, Comm. math. helv. 11 (1939), 49—61.

[9] *H. Hopf*, Über die Abbildungen der 3-dimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, Math. Ann. 104 (1931), 637—665.

[10] *B. Eckmann*, Über die Homotopiegruppen von Gruppenräumen, Comm. math. helv. 14 (1942).

[11] *L. Pontrjagin*, A classification of continous transformations of a complex into a sphere. I, C. R. Acad. Sc. URSS, XIX, 3 (1938), 147—149.

[28]) s. *Hurewicz*, Proc. Akad. Amsterdam 38 (1935), 112—119, Satz XI; oder: *Eckmann*, [10], Satz II.