Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 15 (1942-1943)

Artikel: Sopra una dimostrazione di R. Fueter per un teorema di Hartogs.
Autor: Martinelli, Enzo di
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14896

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sopra una dimostrazione di R. Fueter per un teorema di Hartogs

Di Enzo Martinelli, Roma

Introduzione

1. In due recenti note[1]), *Rud. Fueter* ha dato un'interessante dimostrazione di un classico teorema di *Hartogs* per le funzioni analitiche di due o più variabili complesse. Nello spazio $2n$-dimensionale S_{2n}, ove si rappresentano le n variabili complesse $z_1, \ldots, z_n$, sia D_{2n} un dominio $2n$-dimensionale, univalente e limitato, con il contorno costituito da una ipersuperficie chiusa irriducibile Γ_{2n-1}. Il teorema di *Hartogs*, cui ci si riferisce, afferma che: "Ogni funzione $f(z_1, \ldots, z_n)$, $n > 1$, analitica regolare ed univocamente definita su Γ_{2n-1}, può prolungarsi analiticamente in modo regolare ed univoco in tutto il dominio D_{2n},,.

La dimostrazione citata è ottenuta da *Fueter* applicando l'idea suggestiva, e già manifestantesi feconda, di subordinare la teoria delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse alla teoria delle funzioni regolari di una variabile quaternione o di una variabile ipercomplessa più generale.

Mi propongo qui di riottenere il teorema di *Hartogs* ricalcando nella sua linea concettuale il ragionamento di *Fueter*, ma restando nell'ambito della teoria delle funzioni di ordinarie variabili complesse. A questo scopo mi appoggio sopra una formula integrale già da me stabilita per le funzioni analitiche di n variabili complesse[2]), e sull'uso sistematico dell'operazione di differenziazione esterna delle forme differenziali, introdotta da *E. Cartan*, ciò che mi permette di superare nella maniera più spedita le difficoltà essenziali, in guisa che la dimostrazione risultante in definitiva per il teorema di *Hartogs* mi sembra possa considerarsi come notevolmente semplice.

La formula integrale cui ho ora alluso (e che è ricordata al n. 2) permette di esprimere una $f(z_1, \ldots, z_n)$ analitica in un dominio D_{2n} mediante i valori che la funzione assume sul contorno Γ_{2n-1} di D_{2n}, con un inte-

---

[1]) *R. Fueter*, Über einen Hartogs'schen Satz, Comm. Math. Helvetici, vol. 12 (1939), pag. 75; e Über einen Hartogs'schen Satz in der Theorie der analytischen Funktionen von n komplexen Variablen, ibidem, vol. 14 (1942), pag. 394.

[2]) Alcuni teoremi integrali per le funzioni analitiche di più variabili complesse, Mem. della R. Accad. d'Italia, vol. IX (1938), pag. 269.

grale $(2n-1)$-plo sopra Γ_{2n-1}. Benché tale formula si riduca per $n=1$, com'è naturale, all'ordinaria formula di *Cauchy*, essa ha tuttavia una struttura formale nettamente diversa da quest'ultima, per modo che il ragionamento che conduce al teorema di *Hartogs* viene a cadere completamente per $n=1$. E si sa bene che questo teorema non sussiste per le funzioni di una sola variabile.

D'altra parte la formula di *Cauchy* può estendersi al caso di n variabili anche con un'altra formula di struttura formale più prossima al caso $n=1$, nella quale appare però una integrazione sopra una varietà chiusa di dimensione n anziché $2n-1$; varietà che, quando si presenti la formula nel suo aspetto più generale, è vincolata soltanto da certe condizioni topologiche, già da me[3]) determinate per $n=2$, e da *B. Segre*[4]) per n qualunque, e che sono più oltre ricordate (n. 7).

Ebbene, in una seconda parte di questo lavoro, dò un'altra dimostrazione del teorema di *Hartogs* basata appunto sull'applicazione di questa seconda formula integrale. La dimostrazione (che espongo per semplicità nel caso $n=2$, ma che è facilmente estensibile al caso generale) è limitata all'ipotesi restrittiva che la ipersuperficie Γ_3, ove è assegnata la $f(z_1, z_2)$, sia contorno di un dominio convesso. Penso nondimeno che la dimostrazione possa presentare qualche interesse, perché essa mette in luce le ragioni topologiche che determinano la validità del teorema d'*Hartogs* per $n>1$ e la non validità per $n=1$. Ecco, in breve, di cosa si tratta.

Assegnata la funzione analitica regolare $f(z)$ sopra una linea chiusa irriducibile Γ_1 (delimitante un dominio D_2 del piano ove si distende la variabile complessa z), la formula

$$g(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(z)\,dz}{z-\zeta} \tag{1}$$

definisce una funzione $g(\zeta)$ regolare in tutti i punti interni a D_2. D'altronde la $f(z)$, per essere regolare su Γ_1, resta in conseguenza definita, in modo regolare ed univoco, in tutta una corona Σ_2 comprendente Γ_1 all'interno. Ora, se ζ è un punto della corona interno a quella parte, Σ_2', di Σ_2 che appartiene a D_2, il secondo membro della (1) darebbe, in base alla formula di *Cauchy*, il valore $f(\zeta)$ e in conseguenza varrebbe il teorema

[3]) La formula di Cauchy per le funzioni analitiche di due variabili complesse, Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. XXV, s. 6a, gennaio 1937, pag. 33.

[4]) *B. Segre*, Sull'estensione della formula integrale di Cauchy e sui residui degli integrali n-pli, nella teoria delle funzioni di n variabili complesse, Atti del 1° Congresso dell'Un. Mat. Ital., aprile 1937, pag. 174.

d'*Hartogs*, qualora la linea Γ_1 potesse soddisfare entro Σ_2' alle condizioni topologiche occorrenti per la validità della formula di *Cauchy* (cioè di essere omologa a zero ed avvolgente il punto ζ), come vi soddisfa entro D_2. Questo non accade; mentre la proprietà topologica in certo senso analoga a quella che qui occorrerebbe, vale invece per $n > 1$, e ciò sostanzialmente a causa del maggior dislivello che intercede tra la dimensione $2n$ di uno strato Σ_{2n} comprendente Γ_{2n-1} all'interno, e la dimensione n della varietà d'integrazione, tracciata su Γ_{2n-1}, che appare nella estensione della formula di *Cauchy* nella seconda forma.

Osserverò infine che il ragionamento da me sviluppato in questa seconda dimostrazione del teorema d'*Hartogs* ha qualche rassomiglianza con quello su cui *F. Severi*[5]) basò la dimostrazione del suo analogo teorema, valevole per le funzioni analitiche di una variabile reale e di una complessa, e dal quale egli dedusse il teorema d'*Hartogs* medesimo.

I.

Richiamo della prima formula integrale

2. Cominciamo col ricordare la prima formula integrale valida per le funzioni analitiche di n variabili complesse, cui si è sopra alluso. Sia $f(z_1, \ldots, z_n)$ analitica regolare in un dominio D_{2n}, contorno Γ_{2n-1} incluso.

Il valore di f in ogni punto $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ *interno* a D_{2n}, può esprimersi, mediante i valori che la f stessa assume sul contorno Γ_{2n-1}, colla formula:

$$f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \\ = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_{2n-1}} \frac{f(z_1, \ldots, z_n) \sum_1^n{}_\alpha (-1)^{\alpha-1} (\bar{z}_\alpha - \bar{\zeta}_\alpha)\, d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_1, \ldots_{[\alpha]} \ldots, \bar{z}_n)}{\left(\sum_1^n{}_\alpha (z_\alpha - \zeta_\alpha)\,(\bar{z}_\alpha - \bar{\zeta}_\alpha)\right)^n}, \tag{2}$$

dove s'indicano con sopralineature i valori complessi coniugati, e con $d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_1, \ldots_{[\alpha]} \ldots, \bar{z}_n)$ s'intende il differenziale di grado $2n-1$, $dz_1 \cdots dz_n d\bar{z}_1 \cdots d\bar{z}_{\alpha-1} d\bar{z}_{\alpha+1} \cdots d\bar{z}_n$, nel quale manca l'elemento $d\bar{z}_\alpha$ [6]).

---

[5]) *F. Severi*, Una proprietà fondamentale dei campi di olomorfismo di una funzione analitica di una variabile reale e di una variabile complessa, Rend. della R. Accad. dei Lincei, Vol. XV, s. 6a, aprile 1932, pag. 487.

[6]) Alla formula (2) può venir dato un aspetto più semplice (che è non però qui opportuno), una volta introdotta sopra l'ipersuperficie Γ_{2n-1} una certa congruenza $[s]$ di linee, come ho dimostrato nel lavoro: Studio di alcune questioni della teoria delle funzioni biarmoniche e delle funzioni analitiche di due variabili complesse coll'ausilio del calcolo differenziale assoluto, Mem. della R. Accad. d'Italia, vol. XII (1942), pag. 143, n. 17 e Oss.

La (2) sussiste per una conveniente scelta della orientazione di Γ_{2n-1}, che non occorre qui ricordare, e, una volta dimostrata nell'ipotesi che D_{2n} si riduca ad una $2n$-cella, vale immutata per un dominio D_{2n} qualunque il cui contorno Γ_{2n-1} sia anche eventualmente spezzato in più cicli irriducibili, bastando, per persuadersi di questo, ripetere un ragionamento ben noto, dopo aver decomposto D_{2n} in $2n$-celle.

Due proposizioni fondamentali

3. Suppongasi ora che la funzione $f(z_1, \ldots, z_n)$ sia definita, analitica e regolare, soltanto sul contorno irriducibile Γ_{2n-1} del dominio D_{2n}, nelle ipotesi del teorema d'*Hartogs* (n. 1). Si può nondimeno considerare ancora l'integrale a secondo membro della (2), essendo $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ un punto *interno*, ovvero anche un punto *esterno*, a Γ_{2n-1}. Il risultato dell'integrazione sarà, a priori, in ogni caso una funzione analitica $g(\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_n)$ delle variabili $\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_n$, considerate come indipendenti, poiché è una funzione analitica di quelle variabili la funzione integranda. Indicata brevemente la forma differenziale di grado $2n-1$ a secondo membro della (2) con $\omega(\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_n)$ (ove si son messe in evidenza soltanto le variabili che non sono variabili d'integrazione), si ha cioè:

$$g(\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_n) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_{2n-1}} \omega(\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_n) \,. \tag{3}$$

Ebbene, proveremo (nn. 5, 6) i due fatti fondamentali seguenti:

a) *Se* $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ *è interno a* Γ_{2n-1}, *la funzione* g *è indipendente dalle variabili* $\bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_n$, *e risulta quindi funzione analitica regolare di* $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$;

b) *Se* $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ *è esterno a* Γ_{2n-1}, *la funzione* g *è identicamente nulla.*

Dimostrazione del teorema d'Hartogs

4. Una volta stabiliti a) e b), la dimostrazione del teorema di *Hartogs* si ottiene immediatamente seguendo *R. Fueter*. Invero, poiché per ipotesi $f(z_1, \ldots, z_n)$ è analitica regolare su Γ_{2n-1}, in ogni punto M di Γ_{2n-1} $f(z_1, \ldots, z_n)$ è sviluppabile in una serie n-pla di potenze, ed esiste un'ipersfera di centro M e raggio massimo, nel cui interno la serie converge. Al variare di M su Γ_{2n-1} i raggi delle ipersfere hanno un minimo non nullo,

come si prova con un ragionamento consueto; perciò la $f(z_1, \ldots, z_n)$ esiste ed è regolare in tutto uno strato $2n$-dimensionale, Σ_{2n}, comprendente all'interno Γ_{2n-1}. Sia Γ'_{2n-1} un'ipersuperficie chiusa appartenente a Σ_{2n}, interna e prossima a Γ_{2n-1}. Se $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ è un punto interno allo strato Σ'_{2n}, contenuto in Σ_{2n} e delimitato da Γ_{2n-1} e Γ'_{2n-1}, la formula (2), applicata nel dominio Σ'_{2n}, dà

$$f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \left\{ \int_{\Gamma_{2n-1}} \omega - \int_{\Gamma'_{2n-1}} \omega \right\},$$

con convenienti orientazioni di Γ_{2n-1} e Γ'_{2n-1}.

Ora, in virtù di b) il secondo integrale è nullo, onde risulta, per $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ interno a Σ'_{2n},

$$f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_{2n-1}} \omega \ ;$$

e poiché il secondo membro della precedente rappresenta, in virtù di a), una funzione analitica regolare in ogni punto $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ interno a Γ_{2n-1}, questa funzione coincide con $f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ per $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ interno a Σ'_{2n}, e si conclude col teorema d'*Hartogs*.

Dimostrazione del teorema a)

5. Per stabilire l'affermazione a), ricordiamo che la forma differenziale ω a secondo membro della (3) è integrabile, vale a dire che si annulla identicamente il differenziale di *Cartan* $d\omega$. Questo fatto, che è di verifica immediata e che trovasi nel lavoro citato in [2]), trae seco, in base ad un teorema fondamentale, che esiste una forma differenziale di grado $2n-2$, Ω, della quale ω è *differenziale esatto*: $d\Omega = \omega$ [7]). La dimostrazione stessa del teorema citato offre il mezzo di costruire una forma Ω (che, si sa, risulta definita soltanto a meno della più generale forma differenziale dello stesso grado, la quale sia a sua volta differenziale esatto di una forma di grado $2n-3$). Si ottiene così, per esempio,

$$\Omega = \sum_{2}^{n}{}_{\beta} \frac{(-1)^{\beta-1}}{n-1} f(z_1, \ldots, z_n) \frac{\bar{z}_\beta - \bar{\zeta}_\beta}{z_1 - \zeta_1} r^{2-2n} d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_2, \ldots_{[\beta]} \ldots, \bar{z}_n), \tag{4}$$

[7]) Cfr. p. es. *E. Goursat*, Leçons sur le problème de Pfaff, Paris, J. Hermann (1922), pag. 106.

ove si è indicato, per semplicità di scrittura, con $r^2 = \sum_1^n {}_\alpha (z_\alpha - \zeta_\alpha)(\bar{z}_\alpha - \bar{\zeta}_\alpha)$ il quadrato della distanza del punto $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ dal punto $(z_1, \ldots, z_n)$ che scorre su Γ_{2n-1}. La verifica della relazione $d\Omega = \omega$ è anch'essa immediata.

Si osserverà che nella (4) la variabile z_1 ha un ufficio privilegiato di fronte alle altre variabili $z_2, \ldots, z_n$. Ma è evidente, a causa della simmetria della forma ω rispetto a tutte le variabili $z_1, \ldots, z_n$, che una forma Ω', analoga alla (4), nella quale l'ufficio privilegiato sia tenuto anziché dalla variabile z_1, da un'altra qualunque delle variabili $z_2, \ldots, z_n$, soddisfa ancora alla $d\Omega' = \omega$.

Se nelle forme Ω ed ω si pensa ora $\bar{\zeta}_1$ come un parametro indipendente, e si deriva rispetto ad esso, si ottiene: $d\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\zeta}_1}\right) = \frac{\partial \omega}{\partial \bar{\zeta}_1}$. D'altronde dalla (4) si ha:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\zeta}_1} = \sum_2^n {}_\beta (-1)^{\beta-1} f(z_1, \ldots, z_n)(\bar{z}_\beta - \bar{\zeta}_\beta)\, r^{-2n}\, d(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_2, \ldots_{[\beta]} \ldots, \bar{z}_n)\ ; \tag{5}$$

donde appare che, quando il punto $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ si mantiene interno a Γ_{2n-1}, la forma $\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\zeta}_1}$ è *regolare ed uniforme* su Γ_{2n-1} (il che, si badi, non accade per la forma Ω).

Ciò posto, si ha dalla (3) derivando rispetto a $\bar{\zeta}_1$:

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}_1} = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_{2n-1}} \frac{\partial \omega}{\partial \bar{\zeta}_1}\ . \tag{6}$$

Ma la forma $\frac{\partial \omega}{\partial \bar{\zeta}_1}$ è differenziale esatto di una forma regolare ed uniforme su Γ_{2n-1}, e quindi l'integrale a secondo membro della (6) è nullo, come segue dalla formula di *Green-Stokes* generale[8]).

---

[8]) La formula generale di *Green-Stokes* (che esprime l'uguaglianza fra l'integrale sopra una varietà a $p+1$ dimensioni del differenziale esterno $d\omega$ di una forma ω di grado p e l'integrale di ω sul contorno della varietà stessa; cfr. p. es. *F. Severi*, Lezioni di analisi, Zanichelli, Bologna (1942), II_1, pag. 381) può facilmente estendersi al campo complesso. D'altronde, per l'applicazione che qui ne occorre, basta pensare di aver preventivamente separato la parte reale e l'immaginaria nella (6), e passare alle variabili reali $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ mediante la trasformazione $z_j = x_j + i y_j$, $z_j = x_j - i y_j$ tenendo conto dell'invarianza dell'operazione di differenziazione esterna di fronte ai cambiamenti di variabili. Cfr. il mio lavoro cit. in [2]), particolarmente al n. 2.

La funzione $g(\zeta_1, \ldots, \zeta_n, \bar{\zeta}_1, \ldots, \bar{\zeta}_n)$ non dipende dunque da $\bar{\zeta}_1$; similmente si dimostra ch'essa non dipende da $\bar{\zeta}_2, \ldots, \bar{\zeta}_n$. Cioè g è funzione analitica di $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, per $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ interno a Γ_{2n-1}[9]), e il teorema a) è così stabilito.

Dimostrazione del teorema b)

6. Passiamo a dimostrare il teorema b). Si suppone qui il punto $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ esterno a Γ_{2n-1}.

Le argomentazioni sviluppate nel n. 5 sussistono inalterate in questo caso; onde intanto risulta ancora g funzione analitica di $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$.

D'altra parte, essendo Γ_{2n-1} limitata, è finito il $\max |z_1|$ sopra Γ_{2n-1}, che indicheremo con μ. E allora, per tutti i punti $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ esterni a Γ_{2n-1}, soddisfacenti alla condizione $|\zeta_1| > \mu$, altresì la forma Ω data dalla (4) risulta *regolare ed uniforme* su Γ_{2n-1}, come già $\frac{\partial \Omega}{\partial \bar{\zeta}_1}$. In queste condizioni si conclude, analogamente a sopra, che è nullo l'integrale a secondo membro della (3).

La funzione g, analitica in $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, deve dunque essere nulla per $|\zeta_1| > \mu$, onde è nulla identicamente. Così è provato anche il teorema b).

II.

Richiamo della seconda formula integrale

7. Come si è detto al n. 1 daremo ora una nuova dimostrazione del teorema di *Hartogs*, esponendola per semplicità nel caso di $n = 2$ variabili, e limitandoci all'ipotesi della convessità del dominio D_4 contornato dalla ipersuperficie Γ_3, ove è assegnata la funzione $f(z_1, z_2)$. La dimostrazione è basata sulla estensione della formula di *Cauchy* nella seconda forma, che cominciamo col ricordare.

Se (ζ_1, ζ_2) è un punto interno a Γ_3, ho dimostrato, nel lavoro citato in[3]), che i piani caratteristici $z_2 = \zeta_2$, $z_1 = \zeta_1$ segano Γ_3 rispett. secondo due linee chiuse C_{ζ_1}, C_{ζ_2}, che sono tra loro *allacciate sopra* Γ_3 come due anelli di una catena. Se il punto (ζ_1, ζ_2) si muove entro D_4, C_{ζ_1} e C_{ζ_2} si conservano allacciate e non s'incontrano mai, fin tanto che il punto non cada su Γ_3.

Sia σ_{ζ_1} una superficie, del tipo topologico del toro, descritta sopra Γ_3 da un piccolo circuito allacciato con C_{ζ_1}, che scorra lungo C_{ζ_1} stessa senza mai incontrare nè C_{ζ_1}, nè C_{ζ_2}. Sia σ_{ζ_2} una superficie analogamente

[9]) Cfr. il lavoro ora richiamato, al n. 1.

ottenuta facendo scorrere lungo C_{ζ_2} un piccolo circuito allacciato con C_{ζ_2}. Tenendo conto che l'ambiente Γ_3 è uno spazio sferico, si vede facilmente che, con una deformazione continua, si può passare da una superficie del tipo di σ_{ζ_1} ad una del tipo di σ_{ζ_2}, senza incontrare C_{ζ_1}, C_{ζ_2} e restando entro Γ_3[10]). Ciascuna delle due superficie σ_{ζ_1}, σ_{ζ_2} è dunque allacciata simultaneamente, ed in maniera simmetrica, con C_{ζ_1}, C_{ζ_2}, per deformazioni sopra Γ_3.

Ebbene, sia $f(z_1, z_2)$ analitica regolare nel dominio convesso D_4, contorno Γ_3 incluso. Se σ è una superficie qualunque sopra Γ_3, del tipo topologico del toro, allacciata con C_{ζ_1}, C_{ζ_2} nel modo descritto (e quindi riducibile per deformazione, senza incontrare C_{ζ_1}, C_{ζ_2}, tanto a σ_{ζ_1} che a σ_{ζ_2}), il valore della $f(z_1, z_2)$ nel punto (ζ_1, ζ_2), si esprime colla formula:

$$f(\zeta_1, \zeta_2) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_\sigma \frac{f(z_1, z_2)\, d(z_1, z_2)}{(z_1 - \zeta_1)(z_2 - \zeta_2)} \,. \tag{7}$$

Seconda dimostrazione del teorema d'Hartogs

8. Ciò ricordato, suppongasi sia nota la $f(z_1, z_2)$ soltanto sopra Γ_3, e ivi sia analitica e regolare, nelle condizioni del teorema di *Hartogs*. Allora, in ogni punto (ζ_1, ζ_2) *interno* a Γ_3, può considerarsi la funzione $g(\zeta_1, \zeta_2)$, definita dalla

$$g(\zeta_1, \zeta_2) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\sigma(\zeta_1, \zeta_2)} \frac{f(z_1, z_2)\, d(z_1, z_2)}{(z_1 - \zeta_1)(z_2 - \zeta_2)} \,, \tag{8}$$

essendo $\sigma(\zeta_1, \zeta_2)$ una superficie tracciata sopra Γ_3, dipendente dalla posizione del punto (ζ_1, ζ_2) e simultaneamente allacciata con le linee C_{ζ_1}, C_{ζ_2} nel modo sopra espresso. È chiaro che $g(\zeta_1, \zeta_2)$ resta univocamente definita dalla (8) nonostante l'arbitrarietà della scelta della superficie $\sigma(\zeta_1, \zeta_2)$ (subordinatamente alle condizioni topologiche indicate): infatti, in base al classico teorema di *Cauchy-Poincaré*, il secondo membro della (8) non varia comunque si deformi $\sigma(\zeta_1, \zeta_2)$ sopra Γ_3 senza incontrare C_{ζ_1}, C_{ζ_2}, perché, così facendo, non si viene ad attraversare alcuna singolarità della funzione integranda.

---

[10]) Ciò risulta a priori nel lavoro citato, poiché ivi si dimostra che una particolare superficie (toro circolare dello S_4), che è definita in modo simmetrico rispetto a z_1 e z_2, può ridursi per deformazione a σ_{ζ_1}. A causa della simmetria indicata, del pari accade che la superficie può ridursi a σ_{ζ_2}; e quindi σ_{ζ_1} può ridursi a σ_{ζ_2}, e viceversa.

Inoltre la $g(\zeta_1, \zeta_2)$ definita risulta analitica regolare nelle variabili ζ_1, ζ_2. Ci si convince immediatamente di ciò, riflettendo che una superficie $\sigma(\zeta_1^0, \zeta_2^0)$ che sia adatta a definire $g(\zeta_1, \zeta_2)$, mediante la (8), in un punto qualunque fissato (ζ_1^0, ζ_2^0) interno a Γ_3, è altresì adatta a definire la funzione stessa per tutti i punti (ζ_1, ζ_2) di un intorno abbastanza ristretto di (ζ_1^0, ζ_2^0), in quanto, se $\sigma(\zeta_1^0, \zeta_2^0)$ è allacciata con le linee $C_{\zeta_1^0}, C_{\zeta_2^0}$, è allacciata altresì con le linee C_{ζ_1}, C_{ζ_2}, che son molto prossime a $C_{\zeta_1^0}, C_{\zeta_2^0}$, quando (ζ_1, ζ_2) sia molto prossimo a (ζ_1^0, ζ_2^0). Pertanto, nell'intorno di (ζ_1^0, ζ_2^0) si può supporre *fissa* la superficie d'integrazione nella (8), e quindi $g(\zeta_1, \zeta_2)$ risulta funzione analitica regolare di ζ_1, ζ_2, in quell'intorno, come la è la funzione integranda $\dfrac{f(z_1, z_2)}{(z_1 - \zeta_1)(z_2 - \zeta_2)}$ per qualunque posizione di (z_1, z_2) sopra $\sigma(\zeta_1^0, \zeta_2^0)$.

9. Abbiamo già osservato (n. 4) che, essendo $f(z_1, z_2)$ analitica regolare sopra Γ_3, essa risulta senz'altro definita e regolare in tutto uno strato 4-dimensionale Σ_4 comprendente Γ_3 all'interno, ed in particolare in uno strato Σ_4' compreso tra Γ_3 e una ipersuperficie Γ_3' interna a Γ_3 e prossima ad essa.

Si consideri nello $S_4(x_1, x_2, y_1, y_2)$, essendo $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, il fascio di iperpiani paralleli rappresentati dall'equazione

$$y_2 + \lambda = 0 , \tag{9}$$

al variare del parametro reale λ [11]).

Sia $\lambda' \vdash\!\dashv \lambda''$ $(\lambda' < \lambda'')$ l'intervallo (finito) di variabilità del parametro λ, entro il quale, estremi inclusi, l'iperpiano (9) incontra Γ_3, e fuori del quale non ha alcun punto comune con Γ_3. I due iperpiani $y_2 + \lambda' = 0$, $y_2 + \lambda' + \varepsilon = 0$ staccano dal dominio D_4 circondato da Γ_3 una porzione che, per ε positivo abbastanza piccolo, è contenuta nello strato Σ_4' delimitato da Γ_3 e Γ_3'. Questa porzione, che indicheremo con $\overline{\Sigma}_4'$, risulta convessa e delimitata da un pezzo $\overline{\Gamma}_3$ dell'ipersuperficie Γ_3 e da un pezzo $\overline{\Pi}_3$ dell'iperpiano $y_2 + \lambda' + \varepsilon = 0$.

Ebbene facciamo vedere che, in ogni punto (ζ_1, ζ_2) interno al dominio convesso $\overline{\Sigma}_4'$, il valore della funzione $f(\zeta_1, \zeta_2)$ e quello della funzione $g(\zeta_1, \zeta_2)$ si possono esprimere colla identica formula integrale: onde le due funzioni coincidono in $\overline{\Sigma}_4'$ e quindi in tutto Σ_4'; ciò che prova il teorema d'*Hartogs*.

---

[11]) Tutte le considerazioni successive potrebbero ripetersi più in generale assumendo in luogo di (9) il fascio di iperpiani paralleli $ax_2 + by_2 + \lambda = 0$, ovvero $ax_1 + by_1 + \lambda = 0$, essendo a, b costanti reali arbitrariamente fissate.

Basta all'uopo mostrare che tra le superficie $\sigma(\zeta_1, \zeta_2)$ tracciate su Γ_3 e simultaneamente allacciate con C_{ζ_1}, C_{ζ_2}, che possono assumersi come superficie d'integrazione nella (8), ne esistono di quelle che sono al tempo stesso tracciate sul contorno $\overline{\Gamma}_3 + \overline{\Pi}_3$ di $\overline{\Sigma}'_4$ ed allacciate simultaneamente con le linee $\overline{C}_{\zeta_1}$, $\overline{C}_{\zeta_2}$ intersezioni di $\overline{\Gamma}_3 + \overline{\Pi}_3$ rispett. con i piani caratteristici $z_2 = \zeta_2, z_1 = \zeta_1$. Ora il piano caratteristico $z_2 = \zeta_2$ appartiene all'iperpiano del fascio (9) $y_2 - \eta_2 = 0$ (essendo $\zeta_2 = \xi_2 + i\eta_2$), il quale non ha punti comuni con $\overline{\Pi}_3$, onde la linea $\overline{C}_{\zeta_1}$ è tracciata per intero su $\overline{\Gamma}_3$ e quindi coincide con C_{ζ_1}. In conseguenza, una superficie del tipo σ_{ζ_1} considerato al n. 7, che sia abbastanza prossima alla linea $C_{\zeta_1} = \overline{C}_{\zeta_1}$, soddisfa senz'altro al requisito espresso.

(Reçu le 5 janvier 1943.)