Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 15 (1942-1943)

Artikel: Stetige Lösungen linearer Gleichungssysteme.

Autor: Eckmann, Beno

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14895

Stetige Lösungen linearer Gleichungssysteme

Von Beno Eckmann, Lausanne

1. In dem System

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = 0 \ , \qquad i = 1, \ldots, r < n \tag{1}$$

von r linearen homogenen Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ sollen die Koeffizienten $a_{ik} = a_{ik}(u)$ stetige reelle Funktionen einer Variablen u sein, welche einen Raum R durchläuft (es wird sich im speziellen um einfache kompakte metrische Räume handeln). Unter einer *stetigen Lösung* dieses Systems (1) verstehen wir n stetige reelle Funktionen $x_k(u)$ von u, welche für alle $u \in R$ die Relationen

$$\sum_{k-1}^{n} a_{ik}(u)\, x_k(u) = 0 \ , \qquad i = 1, \ldots, r$$

erfüllen. Wir werden im folgenden die Beiwörter „reell" und „stetig" meistens weglassen. Lösungen des Systems (1) heißen *linear unabhängig*, wenn sie für alle $u \in R$ im üblichen Sinn linear unabhängig sind; *eine* linear unabhängige Lösung ist also eine solche, die nie (d. h. für kein $u \in R$) die triviale Null-Lösung wird.

Unser Problem lautet in der allgemeinsten Form folgendermaßen:

I. *Ein Gleichungssystem* (1) *sei gegeben, dessen Koeffizientenmatrix* $(a_{ik}(u))$ *für alle* $u \in R$ *den Rang* r *hat. Besitzt es linear unabhängige Lösungen, bzw. welches ist deren maximale Anzahl?*

So allgemein ist die Frage natürlich kaum zu beantworten; dagegen kann man bei spezieller Wahl des Raumes R mit Hilfe topologischer Methoden einige Ergebnisse finden, die mit verschiedenen geometrischen und algebraischen Problemen aufs Engste verknüpft sind. Wir werden auf diese Zusammenhänge in folgenden Fällen eingehen:

a) R sei ein Element in einem Euklidischen Raum (etwa ein Würfel oder eine Vollkugel), allgemeiner ein in sich zusammenziehbarer Raum. Dann besitzt jedes System (1), das durchwegs den Rang r hat, $n - r$ linear unabhängige Lösungen. (Satz von Ważewski [1], vgl. Nr. 3).

b) R sei eine q-dimensionale Sphäre, d. h. die Koeffizienten a_{ik} seien Funktionen von $q + 1$ reellen Variabeln, deren Quadratsumme 1 ist. Es ist naheliegend, in diesem Fall unser Problem mit den Hurewicz'schen *Homotopiegruppen*[1]) in Zusammenhang zu bringen; man kommt so zu Aussagen, die in Nr. 5 (Satz 2—4) formuliert sind. — Für $q = n - 1$ tritt als Spezialfall die Frage nach der Existenz eines Systems von Richtungsfeldern in der Sphäre S^{n-1} auf.

c) Wir wählen für R die Mannigfaltigkeit *aller* Koeffizientenmatrizen (a_{ik}) des Systems (1) vom Rang r, und die Funktionen $a_{ik}(u)$, $u \in R$, sollen einfach die Identität von R darstellen; d. h. *die Koeffizienten des Systems* (1) *sollen alle reellen Werte annehmen, für welche die Matrix* (a_{ik}) *den Rang r hat, und wir suchen Lösungen von* (1), *die stetig von den Koeffizienten* a_{ik} *abhängen und durchwegs linear unabhängig sind.* Wir werden zeigen (Satz 5): *Es gibt keine derartigen Lösungen, wenn* $n - r$ *gerade ist, und wenn* $n - r = 3$ *oder* 7 *und* $r \geqslant 2$ *ist.* Hingegen sind solche Lösungen in folgenden Fällen bekannt: Für $r = n - 1$, für gerade n und $r = 1$, ferner (vgl. Nr. 8 am Schluß) für $n = 7$ und $r = 2$. Daraus folgt natürlich für diese Zahlen n und r auch die Existenz einer nie-trivialen Lösung von (1) bei *beliebigem* R.

Der Beweis dieser Aussage (Satz 5), das Hauptziel der vorliegenden Arbeit, wird im § 2 erbracht; er beruht im Wesentlichen auf der Bestimmung von Homotopiegruppen gewisser Mannigfaltigkeiten $V_{n,m}$ (so bezeichnen wir die Mannigfaltigkeit aller reellen orthogonalen Matrizen von n Kolonnen und m Zeilen[2])) und verläuft im Rahmen der Theorie der *Faserungen* [4]. Im § 1 übertragen wir unser allgemeines Problem I in die Sprache dieser Theorie, die sich auf *Matrizen stetiger Funktionen*, um die es sich hier handelt, besonders gut anwenden läßt; anschließend werden die Fälle a) und b), wo R ein Element bzw. eine Sphäre ist, besprochen, wobei es sich zum Teil um fast triviale Betrachtungen oder nur um andere Formulierungen schon bekannter Sätze und Beweise handelt. — In einem Anhang kommen wir nochmals auf den Fall c) zurück und betrachten eine stetige Lösung als Verallgemeinerung des *Vektorproduktes* von r Vektoren im n-dimensionalen Euklidischen Raum R^n; während das übliche Vektorprodukt (für diejenigen n und r, für die es überhaupt definiert ist) multilinear ist bezüglich der Komponenten der r Vektoren, verlangen wir vom verallgemeinerten nur, daß es stetig von ihnen abhängt, und im übrigen soll es dieselben Eigenschaften haben. Die unter c) genannten Resultate lassen sich auch als Aussagen über solche „ste-

[1]) Definition s. [2], S. 114, ferner [3], S. 203. — Die Nummern in eckiger Klammer [] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

[2]) Diese Mannigfaltigkeiten hat *Stiefel* ([6], S. 8 ff.) betrachtet; vgl. auch [4], S. 152.

tigen Vektorprodukte" deuten. Das Vektorprodukt von *zwei* Vektoren steht aber auch mit andern topologischen und algebraischen Fragen im Zusammenhang (Nr. 9).

Es sei noch darauf hingewiesen, daß alle Sätze, in denen ausgesagt wird, daß ein spezielles System (1) keine nie-triviale Lösung besitzt (also insbesondere Satz 5), auch in der folgenden Form ausgesprochen werden können:

Wenn n Funktionen $f_k(u)$ für alle $u \in R$ die Relationen

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(u) f_k(u) = 0 \qquad i = 1, \ldots, r$$

erfüllen, so besitzen sie eine gemeinsame Nullstelle $u_0 \in R$. Sind dabei die gegebenen Funktionen $a_{ik}(u)$ Polynome reeller Variabeln (etwa, wenn R eine Sphäre ist, der Koordinaten), und wählt man für die $f_k(u)$ beliebige Polynome derselben Variabeln, so erhält man Sätze der reellen Algebra, nämlich *Existenzsätze für Nullstellen von Polynomen, die gewissen Relationen genügen*; diese sind im Falle von Satz 5 besonders einfach.

Man kann natürlich unsere Frage I auch im Komplexen stellen, d. h. sowohl für die Koeffizienten $a_{ik}(u)$ als auch für die Unbekannten $x_k(u)$ komplexe statt reelle Funktionen zulassen; die hierbei dem Fall c) (Satz 5) entsprechende Fragestellung habe ich für $r = 1$ an anderer Stelle [7] behandelt.

§ 1. Matrizen, deren Elemente stetige Funktionen sind

2. R sei ein kompakter metrischer Raum, und alle im folgenden vorkommenden Funktionen von $u \in R$ sollen reell und stetig sein. Mit $A_{n,m}(R)$ bezeichnen wir eine Matrix von n Kolonnen und m Zeilen, deren Elemente Funktionen von $u \in R$ sind.

Mit unserem Problem I ist die folgende Frage nahe verwandt:

II. *$A_{n,r}(R)$ sei durchwegs, d. h. für alle $u \in R$, orthogonal; kann man diese Matrix durch Hinzufügen von l Zeilen zu einer durchwegs orthogonalen Matrix $A_{n,m}(R)$, $m = r + l$, ergänzen, bzw. welches ist die größte Zahl $l = l^*$ $(0 \leqslant l^* \leqslant n - r)$, für welche das möglich ist?*

Der Zusammenhang mit I ist leicht herzustellen: Aus der Koeffizientenmatrix des Systems (1) bilde man durch Orthogonalisieren eine durchwegs orthogonale Matrix $A_{n,r}(R)$; zu dieser gehört eine gewisse Zahl l^*, und l^* ist offenbar gleich der Anzahl der linear unabhängigen Lösungen von (1).

Man kann die Frage II in verschiedener Weise auffassen: Einerseits soll man für spezielle, besonders wichtige Matrizen $A_{n,r}(R)$ die Zahl l^* bestimmen; andererseits sucht man etwas allgemeiner bei gegebenem R, n und r eine Übersicht über alle möglichen Matrizen $A_{n,r}(R)$ zu gewinnen und anzugeben, für welche Matrizen etwa $l^* = 0$ und für welche $l^* > 0$ oder sogar $l^* = n - r$ ist. Es gibt natürlich immer Matrizen $A_{n,r}(R)$, für welche $l^* = n - r$ ist, nämlich die konstanten Matrizen. Und es gibt einfache Matrizen $A_{n,r}(R)$ mit $l^* = 0$, etwa ($n = 3$, $r = 1$, $R =$ Kugelfläche, gegeben durch Koordinaten u_1, u_2, u_3 mit $\sum_{i=1}^{3} u_i^2 = 1$)

$$A_{3,1}(R) = (u_1, u_2, u_3) ;$$

eine zweite, durchwegs orthogonale Zeile hinzuzufügen würde hier bedeuten: ein stetiges Feld von tangentialen Einheitsvektoren der Kugel angeben, was bekanntlich unmöglich ist (vgl. Nr. 5).

3. Die gewünschte Übersicht über alle Matrizen $A_{n,r}(R)$ läßt sich, wenigstens in gewissem Sinne, leichter angeben, wenn man sich der Sprechweise der *Abbildungen in gefaserte Räume* bedient. Wir haben alles, was man hierbei aus der allgemeinen Theorie der Faserungen benützt, schon an anderer Stelle[3]) ausführlich dargelegt und fassen hier nur die wichtigsten Begriffe und Sätze kurz zusammen.

Wir bezeichnen mit $V_{n,m}$ die Mannigfaltigkeit aller orthogonalen Matrizen von n Kolonnen und m Zeilen. $V_{n,m}$ gestattet einfache Zerlegungen in Teilmengen (Fasern), von denen jede aus solchen Matrizen besteht, die in den ersten r Zeilen übereinstimmen ($r < m$). Diese Zerlegung ist retrahierbar[4]), die Fasern sind zu $V_{n-r,m-r}$ homöomorph und der Zerlegungsraum[4]) (Faserraum) ist zu $V_{n,r}$ homöomorph, da jede Faser durch die r ersten Zeilen der zu ihr gehörigen Matrizen charakterisiert wird. Die Abbildung P von $V_{n,m}$ auf $V_{n,r}$, die jedem Punkt von $V_{n,m}$ seine Faser zuordnet, heißt Projektion; sie besteht einfach darin, daß man in den Matrizen aus $V_{n,m}$ die letzten $m - r$ Zeilen wegläßt.

Die eben beschriebene Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von $V_{n,m}$ deuten wir gemäß einer früher[4]) gewählten Bezeichnung durch

$$\mathfrak{Z} : V_{n,m} / V_{n-r,m-r} = V_{n,r}$$

symbolisch an.

[3]) s. [4], besonders die §§ 3 und 4. Wir werden verschiedene Teile dieser Arbeit im folgenden benützen.

[4]) Vgl. [4], § 1, besonders S. 152—153. — Der Fall $m = n$ wird zwar dort nicht behandelt, bietet aber keine Schwierigkeiten.

Ist f eine Abbildung[5]) eines Raumes X in $V_{n,m}$, so nennen wir die Abbildung $F = Pf$ von X in $V_{n,r}$ die *Spur* von f bezüglich $\mathfrak{Z}$. Im allgemeinen ist nicht jede Abbildung F von X in $V_{n,r}$ eine Spur (einer stetigen Abbildung von X in $V_{n,m}$); aber ein grundlegendes Lemma besagt[6]), *daß jede zu einer Spur homotope Abbildung selbst eine Spur ist.*

Eine durchwegs orthogonale Funktionenmatrix $A_{n,r}(R)$, wie sie in II genannt wird, bedeutet nun nichts anderes als eine Abbildung von R in $V_{n,r}$; und das Problem II lautet mit andern Worten:

III. *Ist die durch die durchwegs orthogonale Funktionenmatrix $A_{n,r}(R)$ gegebene Abbildung von R in $V_{n,r}$ bezüglich der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von $V_{n,m}$ eine Spur, bzw. welches ist die größte Zahl $m = m^* = r + l^*$ ($\leqslant n$), für welche dies der Fall ist?*

Nach dem oben erwähnten Lemma lautet die Antwort auf diese Frage für zwei homotope Abbildungen gleich. Bezeichnen wir zwei orthogonale Matrizen $A_{n,r}(R)$ und $A'_{n,r}(R)$ als *homotop*, wenn die zugehörigen Abbildungen von R in $V_{n,r}$ homotop sind, so lautet also die Antwort auf die Frage II (oder III) für zwei homotope Matrizen $A_{n,r}(R)$ gleich, bzw. *zu homotopen Matrizen $A_{n,r}(R)$ gehört dieselbe Zahl l^*.*

Eine Abbildung von R in $V_{n,r}$, bei welcher das Bild ein Punkt ist (also eine konstante Matrix $A_{n,r}(R)$) ist, wie schon oben bemerkt, immer eine Spur. Also ist jede auf einen Punkt zusammenziehbare (nullhomotope) Abbildung von R in $V_{n,r}$ bezüglich $\mathfrak{Z}$ eine Spur, selbst für $m = n$. Also gilt

Satz 1. *Wenn die orthogonale Matrix $A_{n,r}(R)$ einer konstanten Matrix homotop ist, so kann man sie zu einer quadratischen orthogonalen Matrix $A_{n,n}(R)$ ergänzen (also $l^* = n - r$).*

Ist speziell der Raum R *in sich auf einen Punkt zusammenziehbar, so ist jede Abbildung von R nullhomotop,* also läßt sich Satz 1 auf jede Matrix $A_{n,r}(R)$ anwenden; darin ist der Satz von Ważewski [1] enthalten, den wir in Nr. 1 erwähnt haben.

4. Die folgenden fast trivialen Bemerkungen machen es verständlich, daß nicht jede Matrix $A_{n,r}(R)$ zu einer Matrix $A_{n,m}(R)$ mit $m > r$ ergänzt werden kann, daß vielmehr hiezu besondere Eigenschaften notwendig sind.

a) $A_{n,r}(R)$ sei eine orthogonale Matrix, *für welche $l^* > 0$ ist.* Vertauscht man in $A_{n,r}(R)$ zwei Zeilen (für $r \geqslant 2$), oder multipliziert man eine Zeile

---

[5]) es sollen ausschließlich stetige Abbildungen vorkommen.

[6]) s. [4], S. 155.

mit -1 (für $r \geqslant 1$), so entsteht eine zu $A_{n,r}(R)$ homotope Matrix $A'_{n,r}(R)$.

Beweis: $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ seien die Zeilenvektoren von $A_{n,r}(R)$, $\mathfrak{a}_0$ der Zeilenvektor, der nach Voraussetzung immer hinzugefügt werden kann ($\mathfrak{a}_0^2 = 1$, $\mathfrak{a}_0 \cdot \mathfrak{a}_i = 0$ für $i = 1, \ldots, r$). In dem von $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_0$ aufgespannten Raum kann man $\mathfrak{a}_1$ mit $\mathfrak{a}_2$ durch eine Drehung vertauschen. Ebenso kann man in der durch $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_0$ aufgespannten Ebene $\mathfrak{a}_1$ durch eine Drehung in $-\mathfrak{a}_1$ überführen.

b) Aus einer orthogonalen Matrix $A_{n,m}(R)$ kann man auf $\binom{m}{r}$ Arten $r \leqslant m$ verschiedene Zeilen auslesen und zu einer Matrix $A_{n,r}(R)$ zusammenfügen. Alle Matrizen $A_{n,r}(R)$, die man so erhält, sind homotop.

Beweis: Es sei etwa $r < m$ (für $r = m$ ist nichts zu beweisen) und $A_{n,r}(R)$ aus den Zeilenvektoren $\mathfrak{a}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{a}_{i_r}$, $A'_{n,r}(R)$ aus den Vektoren $\mathfrak{a}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{a}_{j_r}$ von $A_{n,m}(R)$ gebildet. Wegen a) können wir annehmen, daß $j_l \neq j_p$ ist für $l \neq p$. Dann wird die Überführung von $A_{n,r}(R)$ in $A'_{n,r}(R)$ durch eine Matrix B geleistet, die von $u \in R$ und einem Deformationsparameter $t \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ stetig abhängt und deren Zeilenvektoren $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_r$ durch

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{b}_l &= \mathfrak{a}_{i_l} \cos t + \mathfrak{a}_{j_l} \sin t \qquad && \text{für } i_l \neq j_l \,, \\ \mathfrak{b}_l &= \mathfrak{a}_{i_l} && \text{für } i_l = j_l \,, \end{aligned}\right\} \quad l = 1, \ldots, r$$

gegeben sind; in der Tat ist dann für alle t zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$

$$\mathfrak{b}_l^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \;, \quad \text{bzw. } \mathfrak{b}_l^2 = \mathfrak{a}_{i_l}^2 = 1$$

und

$$\mathfrak{b}_l \cdot \mathfrak{b}_p = 0 \quad \text{für } l \neq p \;, \qquad \text{wegen } i_l \neq j_p \;,$$

d. h. B ist für alle t orthogonal.

Zu einer orthogonalen Matrix $A_{n,m}(R)$ gehört also für jedes $r \leqslant m$ eine wohlbestimmte Abbildungsklasse χ_r von R in $V_{n,r}$.

5. Wir wählen jetzt für R eine Sphäre S^q. Die Klassen der Abbildungen von S^q in $V_{n,m}$ sind die Elemente der q-ten Homotopiegruppe[1]) von $V_{n,m}$, $\pi_q(V_{n,m})$ (man kann von der Festhaltung des Bildes eines Punktes der S^q absehen[7])). Nach den Ausführungen von Nr. 4 gehört zu einer

[7]) nach der Terminologie von *Eilenberg* [9] ist $V_{n,m}$ „q-simple" für alle q, da für $m \leq n-2$ $V_{n,m}$ einfach zusammenhängend, und $V_{n,n-1}$ ein Gruppenraum ist.

orthogonalen Matrix $A_{n,m}(S^q)$ für jede ganze Zahl $r\,(0 < r \leqslant m)$ ein wohlbestimmtes Element χ_r von $\pi_q(V_{n,r})$, das wir die r-te *Homotopieklasse der Matrix* $A_{n,m}(S^q)$ nennen. Unsere Fragestellung (I, II, III) läuft darauf hinaus, festzustellen, welche Elemente von $\pi_q(V_{n,r})$ als Homotopieklassen von Matrizen $A_{n,m}(S^q)$ auftreten können.

Nun ist es naheliegend, die Beziehungen heranzuziehen, die in der Faserung

$$\mathfrak{Z} : V_{n,m} / V_{n-r,m-r} = V_{n,r}$$

wie in jeder retrahierbaren Zerlegung zwischen den Homotopiegruppen des Zerlegungsraumes $V_{n,r}$ und denen des gefaserten Raumes $V_{n,m}$ bestehen, nämlich die „Hurewicz'schen Formeln"[8]). Um sie zu formulieren, muß man auch die Homotopiegruppen $\pi_q(V_{n-r,m-r})$ der Faser, sowie gewisse mit der Zerlegung $\mathfrak{Z}$ verknüpfte Untergruppen $\psi_q(\mathfrak{Z})$ von $\pi_q(V_{n-r,m-r})$ und $\varphi_q(\mathfrak{Z})$ von $\pi_q(V_{n,m})$ betrachten: die Elemente von $\psi_q(\mathfrak{Z})$ sind die Klassen solcher Abbildungen von S^q in $V_{n-r,m-r}$, die in $V_{n,m}$ nullhomotop sind; die Elemente von $\varphi_q(\mathfrak{Z})$ sind die Klassen solcher Abbildungen von S^q in $V_{n,m}$, die sich auf eine Faser zusammenziehen lassen (d. h. die einer Abbildung von S^q in eine Faser homotop sind). Ferner tritt die Untergruppe $P\pi_q(V_{n,m})$ derjenigen Elemente von $\pi_q(V_{n,r})$ auf, die durch Projektion P (d. h. durch Weglassen der letzten $m - r$ Zeilen in den Matrizen $A_{n,m}(S^q)$) aus Elementen von $\pi_q(V_{n,m})$ hervorgehen — das sind gerade die r-ten Homotopieklassen von Matrizen $A_{n,m}(S^q)$.

Die Hurewicz'schen Formeln lauten[8]):

$$\pi_q(V_{n,r}) / P\pi_q(V_{n,m}) \cong \psi_{q-1}(\mathfrak{Z}) \qquad q \geqslant 2\,, \tag{2}$$

$$P\pi_q(V_{n,m}) \cong \pi_q(V_{n,m}) / \varphi_q(\mathfrak{Z}) \qquad q \geqslant 1\,, \tag{3}$$

$$\varphi_q(\mathfrak{Z}) \cong \pi_q(V_{n-r,m-r}) / \psi_q(\mathfrak{Z}) \qquad q \geqslant 1\,. \tag{4}$$

Wir werden von den Formeln (3) und (4) später (Nr. 8) Gebrauch machen; an dieser Stelle wollen wir zunächst nur darauf hinweisen, daß $P\pi_q(V_{n,m})$ eine Untergruppe von $\pi_q(V_{n,r})$ ist, also:

Die r-ten Homotopieklassen aller Matrizen $A_{n,m}(S^q)$ bilden eine Untergruppe von $\pi_q(V_{n,r})$.

---

[8]) s. [4], S. 163, Satz E, und S. 166, Formeln (11).

Wenn diese Untergruppe $= \pi_q(V_{n,r})$ ist, so heißt das: alle Matrizen $A_{n,r}(S^q)$ können zu Matrizen $A_{n,m}(S^q)$ ergänzt werden; wenn sie $= 0$ ist: nur die einer konstanten Matrix homotopen Matrizen können ergänzt werden.

Spezialfälle:

a) $q = n - 1$; es handelt sich um Matrizen $A_{n,m}(S^{n-1})$, deren Elemente Funktionen von n Variabeln $u_1, \ldots, u_n$ mit $\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 1$ sind. Die erste Homotopieklasse einer solchen Matrix ist ein Element von $\pi_{n-1}(V_{n,1})$, also, da $V_{n,1}$ zur Sphäre S^{n-1} homöomorph ist, durch eine ganze Zahl c, den Abbildungsgrad, charakterisiert, und $\pi_{n-1}(V_{n,1})$ ist die additive Gruppe dieser Abbildungsgrade (unendliche zyklische Gruppe); wir nennen c die *Charakteristik* der Matrix.

Hat der erste Zeilenvektor der Matrix $A_{n,m}(S^{n-1})$ die Form

$$\mathfrak{a}_1 = (u_1, \ldots, u_n),$$

so können wir ihn als Ortsvektor der S^{n-1} auffassen und die übrigen $m - 1$ Zeilenvektoren als Tangentialvektoren der S^{n-1}, die von $\mathfrak{a}_1$ stetig abhängen und immer paarweise orthogonal sind, also ein $(m - 1)$-*Feld in der* S^{n-1} darstellen (vgl. [4], § 14). Die Charakteristik dieser Matrix ist offenbar $= 1$, und umgekehrt ist jede Matrix $A_{n,m}(S^{n-1})$ mit $c = 1$ einer solchen Matrix homotop, die man als $(m - 1)$-Feld in S^{n-1} auffassen kann. Es gibt also dann und nur dann Matrizen $A_{n,m}(S^{n-1})$ mit $c = 1$, wenn es in der S^{n-1} ein $(m - 1)$-Feld gibt; das ist bekanntlich nicht immer der Fall. Aus der Existenz einer derartigen Matrix folgt natürlich, daß für die betreffenden Zahlen m und n jede ganze Zahl c als Charakteristik einer Matrix $A_{n,m}(S^{n-1})$ auftreten kann; anders formuliert: daß für *jede* Matrix $A_{n,1}(S^{n-1})$ die Zahl $l^* \geqslant m - 1$ ist (ja sogar für jede Matrix $A_{n,1}(R)$ bei beliebigem R).

Es sei nun n ungerade, $m \geqslant 2$ und c die Charakteristik von $A_{n,m}(S^{n-1})$. Bildet man aus einer Zeile die Matrix $A_{n,1}(S^{n-1})$, so ist sie nach Nr. 4a) zu $-A_{n,1}(S^{n-1})$ homotop; zu $A_{n,1}(S^{n-1})$ gehört der Abbildungsgrad c, zu $-A_{n,1}(S^{n-1})$ der Grad $-c$, und aus $c = -c$ folgt $c = 0$. Darin ist der bekannte Satz[8a]) enthalten, daß es in einer Sphäre gerader Dimension keine stetigen Vektorfelder gibt.

Bei geradem n dagegen gibt es immer Matrizen $A_{n,m}(S^{n-1})$ mit $c \neq 0$; man kann sogar zeigen, daß jedenfalls alle geraden Zahlen als Charakteristiken von Matrizen $A_{n,m}(S^{n-1})$ auftreten können; hiezu genügt es, eine Matrix mit $c = 2$ anzugeben:

8a) Satz von Poincaré-Brouwer, vgl. *Alexandroff-Hopf*, Topologie I (Berlin 1935), S. 481, Satz IIIa.

$$a_{ik} = \delta_{ik} - 2u_i u_k\,, \quad \begin{cases} i = 1,\ldots,m \\ k = 1,\ldots,n\,. \end{cases}$$

Diese Matrix ist durchwegs orthogonal; in der Tat ist

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} (\delta_{ik} - 2u_i u_k)(\delta_{jk} - 2u_j u_k)$$
$$= \delta_{ij} - 4u_i u_j + 4\sum_{k=1}^{n} u_k^2 \cdot u_i u_j = \delta_{ij}\,,$$

und es ist bekannt und leicht zu sehen, daß etwa für $i = 1$ die a_{1k} eine Abbildung von S^{n-1} auf $V_{n,1}$ vom Grade 2 darstellen[9]). Ob auch ungerade Zahlen als Charakteristiken auftreten, ist nicht in allen Fällen bekannt; dies ist dann und nur dann möglich, wenn auch $c = 1$ auftritt, also wenn es in S^{n-1} ein $(m - 1)$-Feld gibt. Für $m = 2$ ist dies der Fall, wie das bekannte einfache Beispiel

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 &= (u_1, \quad u_2, \ldots, u_{2k-1}, u_{2k}) \\ \mathfrak{a}_2 &= (u_2, -u_1, \ldots, u_{2k}, -u_{2k-1}) \end{aligned}$$

($n = 2k$ gesetzt) zeigt. Ähnliche Beispiele gibt es für $n = 4k$ und $m = 4$, und für $n = 8k$ und $m = 8$; man erhält sie etwa aus der in Nr. 8 (S. 333) angegebenen 4- bezw. 8-reihigen Matrix mit den Zeilenvektoren $\mathfrak{a}, \mathfrak{w}_1(\mathfrak{a}), \ldots,$ indem man $k - 1$ analoge, mit den folgenden Indizes gebildete Matrizen daneben setzt. Weitere Beispiele dieser Art kann man leicht aus den von Hurwitz und Radon [10]) angegebenen „linearen Scharen orthogonaler Matrizen" herleiten, und zwar für $n = 16^{\alpha}\cdot 2^{\beta}\cdot k$ und $m = 8\alpha + 2^{\beta}$ $(\beta = 0, 1, 2, 3)$. Alle diese Beispiele sind übrigens nicht nur stetig bezüglich der Koordinaten der S^{n-1}, sondern sogar linear. — Dagegen gibt es, wie ich früher[11]) gezeigt habe, kein $(m - 1)$-Feld für $n = 4k + 2$ und $m \geqslant 3$.

Zusammengefaßt:

Satz 2. *Für die Charakteristik c einer orthogonalen Matrix $A_{n,m}(S^{n-1})$ gilt: Wenn n ungerade und $m \geqslant 2$ ist, so ist $c = 0$; wenn $n = 4k + 2$ und $m \geqslant 3$ ist, so ist c gerade. — Dagegen ist c beliebig für $n = 16^{\alpha}\cdot 2^{\beta}\cdot k$ und $m \leqslant 8\alpha + 2^{\beta}$ $(\beta = 0, 1, 2, 3)$.*

Um wieder wie in der Problemstellung I von stetigen Lösungen linearer Gleichungen zu sprechen, können wir alle genannten Resultate folgendermaßen formulieren:

---

[9]) Vgl. [4], S. 183—184.
[10]) Vgl. [11] und [12].
[11]) [7], Satz I.

Satz 3. In der Gleichung

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$$

seien die Koeffizienten a_i Funktionen von $u \in S^{n-1}$ (d. h. von n Variabeln u_i mit $\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 1$), die nie alle $= 0$ sind, also, wenn man sie zu $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$ normiert, eine Abbildung der S^{n-1} auf sich vom Grade c bestimmen. Dann gilt für die maximale Anzahl l^* linear unabhängiger Lösungen dieser Gleichung:

Wenn n ungerade ist, so ist $l^* = n - 1$ für $c = 0$, und $l^* = 0$ für $c \neq 0$. Wenn n gerade ist, so ist immer $l^* > 0$, nämlich $l^* \geqslant 8\alpha + 2^\beta - 1$ für $n = 16^\alpha \cdot 2^\beta \cdot k\,(\beta = 0, 1, 2, 3)$, und sogar $l^* = n - 1$ für gerades c; dagegen ist $l^* = 1$ für $n = 4k + 2$ und ungerades c.

b) Es gibt Zahlen n, r und q, für welche *jede* Matrix $A_{n,r}(S^q)$ zu einer Matrix $A_{n,r+1}$ ergänzt werden kann (d. h. wo für jede Matrix $A_{n,r}(S^q)$ die Zahl $l^* > 0$ ist): nämlich wenn $\pi_{q-1}(S^{n-r-1}) = 0$ ist.

In der Tat ist in der Faserung $\mathfrak{F} : V_{n,r+1} / V_{n-r,1} = V_{n,r}$ die Faser zur Sphäre S^{n-r-1} homöomorph, und $\psi_{q-1}(\mathfrak{F})$ ist eine Untergruppe von $\pi_{q-1}(S^{n-r-1})$; nach der Hurewicz'schen Formel (2) ist also $P\pi_q(V_{n,r+1}) = \pi_q(V_{n,r})$, d. h. jede Abbildung von S^q in $V_{n,r}$ ist eine Spur.

Die Bedingung $\pi_{q-1}(S^{n-r-1}) = 0$ ist insbesondere in folgenden Fällen erfüllt[12]:

Satz 4. *Für $q \leqslant n - r - 1$, für $q = n - r + 2 \geqslant 5$ (also $n - r \geqslant 3$), und für $q \geqslant 3$ und $r = n - 2$ ist $l^* > 0$ für jede orthogonale Matrix $A_{n,r}(S^q)$.*

Ferner ist zwar $\pi_{n-1}(S^{n-2}) \neq 0$, aber[13] $\psi_{n-1}(\mathfrak{F}) = 0$ für die Faserung $\mathfrak{F} : V_{n,2} / V_{n-1,1} = V_{n,1}$; *also ist $l^* > 0$ für jede orthogonale Matrix $A_{n,1}(S^n)$ $(n \geqslant 3)$.*

§ 2. Lösungen eines Gleichungssystems, die stetig von den Koeffizienten abhängen

6. Wir befassen uns in diesem Paragraphen mit einem Spezialfall der Fragestellung I (bzw. II, III) und beweisen:

Satz 5. *Das Gleichungssystem*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = 0\,, \qquad i = 1, \ldots, r$$

[12]) Vgl. die Zusammenstellung über die Homotopiegruppen der Sphären in [4], Nr. 12, S. 178—179.

[13]) s. [4], S. 186 (Satz 24 und 24′).

soll durch Funktionen $x_k = f_k(a_{11}, \ldots, a_{nr})$ *gelöst werden, die für alle Matrizen* (a_{ik}) *vom Rang* r *stetig sind und nicht gleichzeitig verschwinden. Solche Lösungen gibt es nicht, wenn* $n - r$ *gerade ist, und wenn* $n - r = 3$ *oder* 7 *und* $r \geqslant 2$ *ist.*

Damit ist der folgende, an die Form II unseres Problems anknüpfende Satz gleichbedeutend: Es sei $R = V_{n,r}$, und die durch die Matrix $A_{n,r}(V_{n,r})$ gegebene Abbildung von $V_{n,r}$ in sich sei die Identität von $V_{n,r}$; dann ist für diese Matrix und für die genannten n und r die Zahl $l^* = 0$. Und wenn wir schließlich die Sprache der Faserungen (III) verwenden, so erhalten wir den mit Satz 5 äquivalenten

Satz 5′. *In der Zerlegung* $\mathfrak{Z} : V_{n,m}/V_{n-r,m-r} = V_{n,r}$ *ist die Identität von* $V_{n,r}$ *keine Spur,* a) *wenn* $n - r$ *gerade,* b) *wenn* $n - r = 3$ *oder* 7 *und* $r \geqslant 2$ *ist.*

Wir nennen allgemein eine Abbildung j in einen gefaserten Raum, deren Spur Pj die Identität des Zerlegungsraumes ist, eine *Schnittfläche* (die Bildmenge trifft jede Faser in genau einem Punkt). Es handelt sich also darum, in den genannten Fällen zu zeigen, daß die Zerlegung $\mathfrak{Z}$ keine Schnittfläche besitzt; und zwar genügt es offenbar, dies für $m = r + 1$ zu beweisen. Wir beschränken uns also jetzt auf die Zerlegung

$$\mathfrak{Z}_{n,r} : V_{n,r+1} / V_{n-r,1} = V_{n,r} \,.$$

Zunächst sieht man leicht:

Hilfssatz. Wenn $\mathfrak{Z}_{n,r}$ eine Schnittfläche besitzt, dann auch $\mathfrak{Z}_{n-1,\,r-1}$.

Beweis: Eine Schnittfläche von $\mathfrak{Z}_{n,r}$ sei durch die orthogonale Matrix $A_{n,r+1}(V_{n,r})$ gegeben; die ersten r Zeilen stellen die Identität von $V_{n,r}$ dar, während die Komponenten des $(r+1)$ten Zeilenvektors $\mathfrak{a}_{r+1}$ der Matrix Funktionen der r ersten Zeilenvektoren sind:

$$\mathfrak{a}_{r+1} = f(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r) \,.$$

Setzen wir speziell $\mathfrak{a}_r = \mathfrak{e} = (0, 0, \ldots, 1)$, so hat sowohl

$$\mathfrak{b} = f(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{r-1}, \mathfrak{e})$$

als auch jeder mit $\mathfrak{a}_r = \mathfrak{e}$ verträgliche Vektor $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{r-1}$ die letzte Komponente 0; lassen wir sie weg, so erhalten wir Vektoren $\mathfrak{a}_1', \ldots, \mathfrak{a}_{r-1}', \mathfrak{b}'$, die wir als Zeilenvektoren einer orthogonalen Matrix von $n - 1$

Kolonnen und r Zeilen auffassen können, deren Elemente stetige Funktionen der $\mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_{r-1}$ sind, d. h. stetige Funktionen in $V_{n-1,r-1}$; und zwar stellen $\mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_{r-1}$ die Identität von $V_{n-1,r-1}$ dar, während $\mathfrak{b}'$ stetig von ihnen abhängt. Diese Matrix $A'_{n-1,r}(V_{n-1,r-1})$ bedeutet also eine Schnittfläche von $\mathfrak{Z}_{n-1,r-1}$.

Oder umgekehrt: Wenn $\mathfrak{Z}_{n,r}$ keine Schnittfläche besitzt, dann gilt dasselbe für $\mathfrak{Z}_{n+p,r+p} (p \geqslant 0)$, d. h. für alle $\mathfrak{Z}_{n',r'}$ mit derselben Differenz $n' - r' = n - r$ und mit $r' \geqslant r$.

Um den Satz $5'$ zu beweisen, genügt es also zu zeigen, daß a) *die Zerlegung* $\mathfrak{Z}_{n,1}$ *mit ungeradem* n, b) *die Zerlegung* $\mathfrak{Z}_{n,2}$ *mit* $n = 5$ *oder* 9 *keine Schnittfläche besitzt.*

7. Daß die Zerlegung

$$\mathfrak{Z}_{n,1} : V_{n,2} / V_{n-1,1} = V_{n,1}$$

bei ungeradem n keine Schnittfläche besitzt, ist ein wohlbekannter Satz. Denn $V_{n,1}$ ist zur Sphäre S^{n-1} homöomorph, und eine Schnittfläche wäre durch eine Matrix $A_{n,2}(S^{n-1})$ gegeben, deren erste Zeile die Identität von S^{n-1} darstellt, und deren zweite Zeile man als stetiges tangentiales Vektorfeld der S^{n-1} auffassen könnte — und das gibt es bei ungeradem n bekanntlich [8a]) nicht. (Oder, um an Satz 2 anzuknüpfen: $A_{n,2}(S^{n-1})$ müßte die Charakteristik $c = 1$ haben, was bei ungeradem n nicht möglich ist.)

Weniger einfach dagegen scheint der Beweis der Behauptung b) zu sein, daß es in den Zerlegungen $\mathfrak{Z}_{5,2}$ und $\mathfrak{Z}_{9,2}$ keine Schnittfläche gibt. Wir erbringen ihn mit Hilfe spezieller Homotopiegruppen der auftretenden Mannigfaltigkeiten. Ausführlich geschrieben handelt es sich um die Zerlegungen

$$\mathfrak{Z}_{n,2} : V_{n,3} / V_{n-2,1} = V_{n,2} \qquad \text{für } n = 5 \text{ und } 9 \,.$$

$V_{n-2,1}$ ist zur Sphäre S^{n-3} homöomorph, $V_{n,2}$ zur Mannigfaltigkeit L_{n-1} aller orientierten Linienelemente der Sphäre S^{n-1}.

Nach einem allgemeinen Satze[14]) ist jede Homotopiegruppe eines gefaserten Raumes, in dem es eine Schnittfläche gibt, zur direkten Summe der entsprechenden Homotopiegruppen des Zerlegungsraumes und der Faser isomorph. Hätte also $\mathfrak{Z}_{n,2}$ (n ungerade) eine Schnittfläche, so müßte für die Homotopiegruppen von $V_{n,3}$ gelten:

$$\pi_q(V_{n,3}) \cong \pi_q(V_{n,2}) + \pi_q(S^{n-3}) \,. \tag{5}$$

[14]) s. [4], S. 170, Satz G, II.

Nun sind aber für $q = n - 2$ die beiden rechts stehenden Gruppen bekannt; es ist allgemein[12]) (wir bezeichnen mit $\mathfrak{G}$ die additive Gruppe der ganzen Zahlen und mit $\mathfrak{G}_m$ die Restklassengruppe von $\mathfrak{G}$ mod m):

$$\begin{array}{lll} & \pi_{n-2}(S^{n-3}) \cong \mathfrak{G}_2 & \text{für } n \geqslant 6\,, \\ & \phantom{\pi_{n-2}(S^{n-3})} \cong \mathfrak{G} & \text{für } n = 5\,, \\ \text{und} & \pi_{n-2}(V_{n,2}) \cong \mathfrak{G}_2 & \text{für ungerades } n\ ^{13)}\,; \end{array}$$

in der Isomorphie

$$\pi_{n-2}(V_{n,3}) \cong \pi_{n-2}(V_{n,2}) + \pi_{n-2}(S^{n-3}) \tag{6}$$

sind also für $n \geqslant 5$ beide Summanden rechts $\neq 0$. Andererseits werden wir in der nächsten Nummer zeigen, daß für $n = 5$ und 9 die Gruppe links unzerlegbar ist, nämlich daß $\pi_3(V_{5,3}) \cong \mathfrak{G}$ und $\pi_7(V_{9,3}) \cong \mathfrak{G}_4$ ist. Für $n = 5$ und 9 kann also keine Relation (6) bestehen; infolgedessen besitzt die Zerlegung $\mathfrak{Z}_{5,2}$ bzw. $\mathfrak{Z}_{9,2}$ keine Schnittfläche.

Man beachte, daß die Nichtexistenz einer Schnittfläche nicht etwa schon aus der Anzahl der Elemente in der betreffenden Homotopiegruppe folgt, sondern erst aus ihrer algebraischen Struktur. Gäbe es eine Schnittfläche, so müßte $\pi_3(V_{5,3}) \cong \mathfrak{G} + \mathfrak{G}_2$ statt $\mathfrak{G}$ und $\pi_7(V_{9,3}) \cong \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_2$ statt $\mathfrak{G}_4$ sein.

8. *Bestimmung von zwei Homotopiegruppen:*

$$\pi_3(V_{5,3}) \cong \mathfrak{G}\,, \qquad \pi_7(V_{9,3}) \cong \mathfrak{G}_4\,.$$

Mit diesen beiden Formeln wird auch die Behauptung b) von Satz 5′ vollständig bewiesen sein.

Um $V_{n,3}$ ($n = 5$ und 9) zu untersuchen, verwenden wir die Zerlegungen

$$\mathfrak{Z}_n : V_{n,3} / V_{n-1,2} = V_{n,1} (= S^{n-1})\,.$$

Da der Zerlegungsraum eine Sphäre ist, gibt es in $\mathfrak{Z}_n$ ein *Schnittelement*[15]); darunter verstehen wir folgendes: V sei eine $(n-1)$-dimensionale Vollkugel, Σ^{n-2} ihre Randsphäre, N ein beliebiger, fester Punkt der Sphäre S^{n-1}; ein Schnittelement ist eine Abbildung t von V in $V_{n,3}$, deren Spur Pt das Innere von V topologisch auf $S^{n-1} - N$ und Σ^{n-2} auf N abbildet; t bilde also Σ^{n-2} in die zu N gehörige Faser ab (diese Abbildung t' von Σ^{n-2} in eine Faser $V_{n-1,2}$ nennen wir den „Rand" des

[15]) s. [4], S. 172. — Wir geben im folgenden ein Schnittelement explizite an, benützen also den allgemeinen Existenzsatz nicht.

Schnittelementes t). Um ein spezielles Schnittelement t von $\mathfrak{Z}_n$ zu konstruieren, wählen wir für V die obere Halbsphäre H^{n-1} einer Sphäre: $\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 1$, $u_1 \geqslant 0$ (einschließlich des Äquators $\Sigma^{n-2}: u_1 = 0$). t sei gegeben durch die Matrix $A_{n,3}(H^{n-1})$ mit den Elementen[16])

$$a_{ik} = \delta_{ik} - 2u_i u_k\,, \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, 2, 3 \\ k = 1, \ldots, n\,. \end{array} \right.$$

Die Spur Pt dieser Abbildung ist die durch

$$a_{1k} = \delta_{1k} - 2u_1 u_k \quad, \qquad k = 1, \ldots, n$$

gegebene Abbildung[17]) von H^{n-1} auf S^{n-1}; sie bildet das Innere $(u_1 > 0)$ topologisch auf $S^{n-1} - N$ ab, wo N der Punkt $a_{1k} = \delta_{1k}$ der S^{n-1} ist, und den Rand $\Sigma^{n-2}(u_1 = 0)$ auf N. Bei dieser Abbildung t wird also der Rand Σ^{n-2} vermöge der Abbildung t'

$$a_{i1} = 0\,, \qquad a_{ik} = \delta_{ik} - 2u_i u_k \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 2, 3 \\ k = 2, \ldots, n \end{array} \right.$$

auf die zu $N(a_{1k} = \delta_{1k})$ gehörige Faser $V'_{n-1,2}$ abgebildet. Diese Abbildung t' von Σ^{n-2} in $V'_{n-1,2}$ wollen wir näher untersuchen; als Rand eines Schnittelementes ist sie nämlich für die Struktur der Zerlegung $\mathfrak{Z}_n$ und für die Homotopiegruppen von großer Bedeutung[18]). Diese Diskussion wäre zwar für unsere Zwecke für alle ungeraden n von Interesse; wir können sie aber nur für $n = 5$ und $n = 9$ ausführen (das ist der Grund, warum in Satz 5′, b) nur für diese ungeraden n Aussagen gemacht werden), weil in diesen Fällen die Struktur der Faser $V'_{n-1,2}$ besonders übersichtlich ist.

$V'_{n-1,2}$ ist die Mannigfaltigkeit derjenigen Matrizen (a_{ik}) aus $V_{n,3}$, für welche $a_{1k} = \delta_{1k}$, und $a_{21} = a_{31} = 0$ ist. Sie ist homöomorph zur Mannigfaltigkeit aller an die S^{n-2} tangentialen Einheitsvektoren (= orientierten Linienelemente), L_{n-2}, deren Punkte a man durch 2 Vektoren des R^{n-1}

[16]) vgl. die analoge Bildung in Nr. 15 der Arbeit [5].

[17]) Bezüglich der Eigenschaften dieser Abbildung vgl. [4], S. 183—185; ferner [5], S. 250, Anmerkung[22]).

[18]) vgl. [4], Nr. 10 (S. 171—177), besonders Satz 12.

$$\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_{n-1})$$
$$\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_{n-1})$$

mit $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{b}^2 = 1$, $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = 0$ geben kann; statt der Abbildung t' von $\Sigma^{n-2}(u_1 = 0, \sum_{k=2}^{n} u_k^2 = 1)$ in $V'_{n-1,2}$ können wir die Abbildung s der Sphäre S^{n-2} (deren laufender Punkt v die Koordinaten $v_1, \ldots, v_{n-1}$ hat, $\sum_{k=1}^{n-1} v_k^2 = 1$) in L_{n-2} betrachten, die durch

$$a_k(v) = \delta_{1k} - 2v_1v_k, \qquad k = 1, \ldots, n-1$$
$$b_k(v) = \delta_{2k} - 2v_2v_k, \qquad k = 1, \ldots, n-1$$

gegeben ist.

Das Besondere an den Fällen $n = 5$ und 9 ist nun, daß die Sphären S^3 und S^7 parallelisierbar[19]) sind, was zur Folge hat, daß die Linienelementräume L_3 und L_7 in die topologischen Produkte aus $S^3 (S^7)$ und einer Richtungssphäre $S^2 (S^6)$ zerfallen[19]). Denn man kann jedem Punkt a von $L_p (p = 3, 7)$, d. h. jedem Tangentialvektor von S^p nicht nur den Punkt Pa der S^p zuordnen, in dem er angreift, sondern auch vermöge eines Fernparallelismus auf S^p einen Punkt Πa einer Richtungssphäre S^{p-1}, und zwar derart, daß jedes in einem Punkt angebrachte Richtungsbüschel topologisch auf S^{p-1} abgebildet wird, d. h. daß a durch Pa und Πa charakterisiert ist. Diese beiden Zuordnungen Pa und Πa können wir folgendermaßen geben: Es sei $a = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, $\mathfrak{a}$ als Punkt der S^p, $\mathfrak{b}$ als Tangentialvektor in $\mathfrak{a}$ aufgefaßt;

$$Pa = \mathfrak{a} \in S^p, \quad \Pi a = \mathfrak{c} \in S^{p-1} ,$$

wo $\mathfrak{c} = (c_1, \ldots, c_p)$ mit Hilfe eines p-Feldes in S^p, d. h. eines Systems von p Vektorfeldern $\mathfrak{w}_1(\mathfrak{a}), \ldots, \mathfrak{w}_p(\mathfrak{a})$, die in jedem Punkt $\mathfrak{a}$ der S^p paarweise orthogonal sind, erklärt wird, nämlich

$$c_i = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{w}_i(\mathfrak{a}) , \qquad i = 1, \ldots, p ,$$

wobei $\sum_{i=1}^{p} c_i^2 = \sum_{i=1}^{p+1} b_i^2 = 1$ ist; die c_i sind also die Komponenten von $\mathfrak{b}$ bezüglich des in $\mathfrak{a}$ angebrachten, lokalen Koordinatensystems $\mathfrak{w}_1, \ldots, \mathfrak{w}_p$. Dabei benützen wir die folgenden bekannten p-Felder:

---

19) vgl. [6], besonders S. 6, 28 und 45.

$$
\text{auf } S^3 \quad \begin{array}{lcrrrr}
\mathfrak{a} & = (& a_1, & a_2, & a_3, & a_4) \\
\mathfrak{w}_1(\mathfrak{a}) & = (& -a_2, & a_1, & a_4, & -a_3) \\
\mathfrak{w}_2(\mathfrak{a}) & = (& -a_3, & -a_4, & a_1, & a_2) \\
\mathfrak{w}_3(\mathfrak{a}) & = (& -a_4, & a_3, & -a_2, & a_1) ,
\end{array}
$$

$$
\text{auf } S^7 \quad \begin{array}{lcrrrrrrrr}
\mathfrak{a} & = (& a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & a_6, & a_7, & a_8) \\
\mathfrak{w}_1(\mathfrak{a}) & = (& -a_2, & a_1, & a_4, & -a_3, & a_6, & -a_5, & -a_8, & a_7) \\
\mathfrak{w}_2(\mathfrak{a}) & = (& -a_3, & -a_4, & a_1, & a_2, & a_7, & a_8, & -a_5, & -a_6) \\
\mathfrak{w}_3(\mathfrak{a}) & = (& -a_4, & a_3, & -a_2, & a_1, & a_8, & -a_7, & a_6, & -a_5) \\
\mathfrak{w}_4(\mathfrak{a}) & = (& -a_5, & -a_6, & -a_7, & -a_8, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4) \\
\mathfrak{w}_5(\mathfrak{a}) & = (& -a_6, & a_5, & -a_8, & a_7, & -a_2, & a_1, & -a_4, & a_3) \\
\mathfrak{w}_6(\mathfrak{a}) & = (& -a_7, & a_8, & a_5, & -a_6, & -a_3, & a_4, & a_1, & -a_2) \\
\mathfrak{w}_7(\mathfrak{a}) & = (& -a_8, & -a_7, & a_6, & a_5, & -a_4, & -a_3, & a_2, & a_1) .
\end{array}
$$

In diesem Sinne kann auch jede Abbildung f eines Raumes in $L_p (p = 3, 7)$ durch die Abbildungen Pf in S^p und Πf in S^{p-1} charakterisiert werden; insbesondere gehört zu jeder Abbildung f von S^p in L_p eine Abbildung Pf von S^p auf sich, deren Klasse durch den Abbildungsgrad c gegeben ist, und eine Abbildung Πf von S^p auf S^{p-1}, deren Klasse wir γ nennen: c und γ bestimmen die Klasse von f, und $\pi_p(L_p)$ zerfällt in die direkte Summe $\pi_p(S^p) + \pi_p(S^{p-1})$.

$p = 3$: die Klassen der Abbildungen f von S^3 in L_3 sind durch 2 ganze Zahlen c, γ bestimmt, den Grad c von Pf und die Hopf'sche Invariante[20]) γ der Abbildung Πf von S^3 auf S^2.

$p = 7$: die Klassen $f \in \pi_7(L_7)$ sind durch die ganze Zahl c (= Grad von Pf) und die Restklasse γ mod 2 ($\gamma = 1$, wenn Πf wesentlich, $\gamma = 0$ wenn Πf unwesentlich; $\pi_7(S^6)$ besteht aus 2 Elementen[12])) bestimmt. Also ist

$$\pi_3(L_3) \cong \mathfrak{G} + \mathfrak{G} \quad \text{und} \quad \pi_7(L_7) \cong \mathfrak{G} + \mathfrak{G}_2 .$$

Wir bestimmen nun die Invarianten c und γ unserer Abbildung s von S^p auf $L_p (p = 3, 7)$:

$$
s: \begin{array}{l}
\mathfrak{a}(v) = (1 - 2v_1^2, -2v_1v_2, \ldots, -2v_1v_{p+1}) \\
\mathfrak{b}(v) = (-2v_2v_1, 1 - 2v_2^2, \ldots, -2v_2v_{p+1})
\end{array} \quad v = (v_1, \ldots, v_{p+1}) \in S^p.
$$

[20]) Definition: [8], S. 645 ff.; Beweis, daß die Klassen $f \in \pi_3(S^2)$ durch die Invariante $\gamma(f)$ bestimmt sind: [4], Nr. 12b, im Beweis des Hilfssatzes.

Ps ist durch $\mathfrak{a}(v)$ gegeben; diese Abbildung hat bekanntlich[17]) den Grad $c = 2$. Πs müssen wir in der oben beschriebenen Weise bestimmen:

$$c_i(v) = \mathfrak{b}(v) \cdot \mathfrak{w}_i(\mathfrak{a}(v)) , \qquad i = 1, \ldots, p .$$

$p = 3$:

$$c_1 = (-2v_2v_1)(+2v_1v_2) + (1-2v_2^2)(1-2v_1^2) + \\ + (-2v_2v_3)(-2v_1v_4) + (-2v_2v_4)(+2v_1v_3)$$

$$c_2 = (-2v_2v_1)(+2v_1v_3) + (1-2v_2^2)(+2v_1v_4) + \\ + (-2v_2v_3)(1-2v_1^2) + (-2v_2v_4)(-2v_1v_2)$$

$$c_3 = (-2v_2v_1)(+2v_1v_4) + (1-2v_2^2)(-2v_1v_3) + \\ + (-2v_2v_3)(+2v_1v_2) + (-2v_2v_4)(1-2v_1^2) ,$$

also

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 - 2(v_1^2 + v_2^2) \\ c_2 &= -2(v_2v_3 - v_1v_4) \\ c_3 &= -2(v_2v_4 + v_1v_3) . \end{aligned}$$

$p = 7$:

$$c_1 = (-2v_2v_1)(+2v_1v_2) + (1-2v_2^2)(1-2v_1^2) + (-2v_2v_3)(-2v_1v_4) \\ + (-2v_2v_4)(+2v_1v_3) + (-2v_2v_5)(-2v_1v_6) + \\ + (-2v_2v_6)(+2v_1v_5) + (-2v_2v_7)(+2v_1v_8) + (-2v_2v_8)(-2v_1v_7)$$

$c_2 = \cdots$ usw.;

die Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 - 2(v_1^2 + v_2^2) \\ c_2 &= -2(v_2v_3 - v_1v_4) \\ c_3 &= -2(v_2v_4 + v_1v_3) \\ c_4 &= -2(v_2v_5 - v_1v_6) \\ c_5 &= -2(v_2v_6 + v_1v_5) \\ c_6 &= -2(v_2v_7 + v_1v_8) \\ c_7 &= -2(v_2v_8 - v_1v_7) . \end{aligned}$$

Faßt man die Koordinaten von $v \in S^p$ gemäß

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 - iv_2 \\ w_2 &= v_3 - iv_4 , \qquad \text{außerdem für } p = 7 \\ w_3 &= v_5 - iv_6 \\ w_4 &= v_8 - iv_7 \end{aligned}$$

zu komplexen Zahlen zusammen, so kann die Abbildung Πs von S^p auf S^{p-1} durch

$$\begin{aligned} c_1 \quad &= 1 - 2\bar{w}_1 w_1 \\ c_3 + ic_2 &= \quad - 2\bar{w}_1 w_2 , \qquad \text{außerdem für } p = 7 \\ c_5 + ic_4 &= \quad - 2\bar{w}_1 w_3 \\ c_6 + ic_7 &= \quad - 2\bar{w}_1 w_4 \end{aligned}$$

beschrieben werden. Das ist aber bei geeigneter Orientierung von S^{p-1} gerade die Abbildung von S^p auf S^{p-1}, die ich an anderer Stelle[21]) mit $\vartheta^{(2)}$ (für $p = 3$) bzw. $\vartheta^{(4)}$ (für $p = 7$) bezeichnet habe, und die man folgendermaßen beschreiben kann: Man bildet S^p vermöge der bekannten Kreisfaserung auf den komplexen projektiven Raum $K_{\frac{p-1}{2}}$ von $\frac{p-1}{2}$ komplexen, also $p - 1$ reellen Dimensionen ab, indem man dem Punkt $v = (v_1, \ldots, v_{p+1})$ der S^p den Punkt $w_1 : w_2 : \ldots : w_{\frac{p+1}{2}}$ von $K_{\frac{p-1}{2}}$ zuordnet, und dann $K_{\frac{p-1}{2}}$ mit dem Grad 1 auf S^{p-1}. Für $p = 3$ ist $\Pi s = \vartheta^{(2)}$ die von Hopf[22]) angegebene Faserabbildung von S^3 auf S^2, deren Invariante γ den Wert 1 hat. Für $p = 7$ ist $\Pi s = \vartheta^{(4)}$ eine wesentliche Abbildung von S^7 auf S^6 (also ist nach unserer Festsetzung auch hier $\gamma = 1$); denn ich habe bewiesen[21]), daß $\vartheta^{(n)}$ bei geradem n wesentlich ist.

Damit sind also die Invarianten c und γ unserer Abbildung s von S^p auf $L_p (p = 3, 7)$ bestimmt: es ist $c = 2$ und $\gamma = 1$. Wir kennen also jetzt die Abbildungsklasse des Randes t' des Schnittelementes t, das wir in der Zerlegung

$$\mathfrak{Z}_n : V_{n,3} / V_{n-1,2} = S^{n-1}$$

für $n = 5$ und $n = 9$ konstruiert haben. Das gestattet uns aber, die Gruppe $\psi_{n-2}(\mathfrak{Z}_n)$ (die in Nr. 5 erklärt ist) zu bestimmen; sie ist nämlich nach einem allgemeinen Satz[23]) die von der Klasse von t' erzeugte Untergruppe von $\pi_{n-2}(V_{n-1,2}) = \pi_{n-2}(L_{n-2})$.

Wenden wir nun die in Nr. 5 angegebenen Hurewicz'schen Formeln auf die Zerlegungen $\mathfrak{Z}_n$ ($n = 5$ und 9) an, so finden wir: wegen $\pi_{n-2}(S^{n-1}) = 0$[12]) ist nach der ersten Formel

$$P\pi_{n-2}(V_{n,3}) = 0 ,$$

also nach der zweiten und dritten

---

[21]) s. [7], Nr. 10, S. 17.

[22]) s. [8], S. 654.

[23]) s. [4], S. 174, Satz 12.

$$\pi_{n-2}(V_{n,3}) = \varphi_{n-2}(\mathfrak{Z}_n) \cong \pi_{n-2}(V_{n-1,2}) / \psi_{n-2}(\mathfrak{Z}_n) ,$$

also
$$\pi_{n-2}(V_{n,3}) \cong \pi_{n-2}(L_{n-2}) / \psi_{n-2}(\mathfrak{Z}_n) .$$

Wir haben aber eben gefunden, daß für $n = 5$ und 9 die Gruppe $\pi_{n-2}(L_{n-2})$ die direkte Summe zweier zyklischer Gruppen ist, deren Erzeugende die Abbildungsklassen $a \in \pi_{n-2}(L_{n-2})$ mit $c = 1$ und $\gamma = 0$ bzw. b mit $c = 0$ und $\gamma = 1$ sind; dabei sind für $n = 5$ a und b von der Ordnung 0, für $n = 9$ ist a von der Ordnung 0 und b von der Ordnung 2. Ein beliebiges Element $f \in \pi_{n-2}(L_{n-2})$ ist also von der Form

$$f = ca + \gamma b ,$$

wo c, γ ganze Zahlen (γ mod 2 für $n = 9$) sind. Ferner haben wir gesehen, daß $\psi_{n-2}(\mathfrak{Z}_n)$ die von $f^* = 2a + b$ erzeugte Untergruppe von $\pi_{n-2}(L_{n-2})$ ist. Also wird

1. für $n = 5$: $\quad \pi_3(V_{5,3}) \cong \mathfrak{G}$,

da man als Basis von $\pi_{n-2}(L_{n-2})$ $f^* = 2a + b$ und etwa $g^* = a$ wählen kann.

2. für $n = 9$: $\quad \pi_7(V_{9,3}) \cong \mathfrak{G}_4$;

denn die Restklassen von $\pi_7(L_7)$ nach den Vielfachen von $f^* = 2a + b$ können durch $0, a, b, a + b$ repräsentiert werden, wobei die Klasse a (oder die Klasse $a + b$) die Ordnung 4 hat und somit die Restklassengruppe erzeugt. — Damit ist die am Anfang dieser Nummer aufgestellte Behauptung bewiesen, also auch Satz 5′.

Anhang: Stetige Vektorprodukte.

9. Unter einem stetigen Vektorprodukt von r Vektoren im R^n ($n > r \geqq 2$) verstehen wir eine Vektorfunktion $\mathfrak{x}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r)$, die für alle Systeme von r Vektoren $\mathfrak{a}_i$ des R^n definiert ist und folgende Eigenschaften besitzt:

a) $\mathfrak{x}$ hängt von $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ stetig ab.
b) $\mathfrak{x}$ ist orthogonal zu $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$: $\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{a}_i = 0$, $i = 1, \ldots, r$.
c) $\mathfrak{x}^2 = |\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}_j|_r$ (Gram'sche Determinante).

Das übliche Vektorprodukt hat bekanntlich diese Eigenschaften und ist außerdem linear bezüglich der Komponenten jedes Vektors $\mathfrak{a}_i$; es ist aber nur für wenige Zahlen r und n definierbar (vgl. die Bemerkung am Schluß dieser Nr.).

Es ist leicht zu sehen, daß ein stetiges Vektorprodukt von r Vektoren im R^n eine stetige nie-triviale Lösung des Systems

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = 0 , \qquad i = 1, \ldots r \geqslant 2$$

im Sinne von Satz 5 liefert, und daß man umgekehrt aus jeder stetigen nie-trivialen Lösung dieses Systems ein stetiges Vektorprodukt herleiten kann (durch Normierung der Funktionen $x_k = f_k(a_{11}, \ldots, a_{nr})$ und Erweiterung ihrer Definition auch für Matrizen (a_{ik}) vom Rang $< r$, nämlich $x_1 = \cdots = x_n = 0$).

Der Satz 5 besagt nun, *daß es jedenfalls kein stetiges Vektorprodukt von r Vektoren im R^n gibt, wenn $n - r$ gerade, oder $= 3$ oder 7 ist.*

Wir wollen in diesem Anhang noch kurz im Zusammenhang mit verwandten Fragen darauf hinweisen, daß man diese Aussage verschärfen kann, wenn man vom Vektorprodukt nicht nur fordert, daß es stetig, sondern auch daß es *ungerade* sei (oder wenn man sich sogar auf *lineare* Vektorprodukte beschränkt); dies gelingt auf Grund bekannter Sätze. — Ein Vektorprodukt soll ungerade heißen, wenn $\mathfrak{x}(\mathfrak{a}_1, \ldots, -\mathfrak{a}_i, \ldots, \mathfrak{a}_r) = -\mathfrak{x}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_i, \ldots, \mathfrak{a}_r)$ ist für $i = 1, \ldots, r$.

Zunächst sei bemerkt, daß man den *Hilfssatz* in Nr. 6 so aussprechen kann: Wenn es im R^n ein Vektorprodukt von r Vektoren gibt, dann gibt es auch im R^{n-1} ein Vektorprodukt von $r - 1$ Vektoren; und zwar ist dieses stetig, ungerade oder linear, je nachdem das ursprüngliche es ist. Wenn man also zeigen kann, daß es kein Vektorprodukt von 2 Vektoren im R^ν gibt, so gibt es auch keines für alle r und n mit $n - r = \nu - 2$. Wir befassen uns deshalb insbesondere mit dem Fall $r = 2$.

Unter einer *Multiplikation im R^{n+1}* (mit Einselement) verstehen wir folgendes: Jedem Paar von Vektoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ des R^{n+1} sei ein Vektor $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$ als Produkt zugeordnet, wobei es einen Vektor $\mathfrak{e}$ gibt, so daß $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{e} = \mathfrak{e} \circ \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ ist für alle $\mathfrak{A}$. Es ist klar, was mit einer stetigen (ungeraden, linearen) Multiplikation im R^{n+1} gemeint ist.

Satz A. Wenn es im R^n ein stetiges Vektorprodukt von 2 Vektoren gibt, so gibt es im R^{n+1} eine stetige Multiplikation $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \circ \mathfrak{B}$, welche die „Normenproduktregel“ $\mathfrak{C}^2 = \mathfrak{A}^2 \mathfrak{B}^2$ erfüllt[24]*); sie ist ungerade oder sogar linear, wenn das Vektorprodukt es ist.*

[24]) Mit der Existenz einer solchen Multiplikation im R^{n+1} ist die Existenz einer Abbildung des topologischen Produkts $S^n \times S^n$ in S^n vom „Typus (1,1)“ äquivalent (d. h., daß jede Faktorsphäre S^n mit dem Grad 1 abgebildet wird); vgl. *Hopf*, Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension, Fund. math. XXV (1935), 427—440. Für $n = 1, 3, 7$ gibt es solche Abbildungen; ob es noch für andere n solche gibt, ist (wenn man nicht die Bedingung „linear“ oder „ungerade“ hinzunimmt) eine völlig ungelöste Frage, die in verschiedener Hinsicht von Interesse ist.

Der Beweis beruht auf einer bekannten, elementaren Konstruktion: Der Vektor $\mathfrak{A}$ des R^{n+1} habe die Komponenten $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, $\mathfrak{e}$ sei der Vektor $(1, 0, \ldots, 0)$; wir können $\mathfrak{A}$ in der Form

$$\mathfrak{A} = a_0\mathfrak{e} + \mathfrak{a}$$

schreiben, wo $\mathfrak{a}$ ein Vektor des zu $\mathfrak{e}$ orthogonalen R^n im R^{n+1} ist, analog $\mathfrak{B} = b_0\mathfrak{e} + \mathfrak{b}$. Bedeutet $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ das Vektorprodukt von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ im R^n, so setzen wir

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \circ \mathfrak{B} = (a_0 b_0 - \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})\mathfrak{e} + a_0\mathfrak{b} + b_0\mathfrak{a} + (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) .$$

Dann ist $\mathfrak{e} \circ \mathfrak{A} = \mathfrak{A} \circ \mathfrak{e} = \mathfrak{A}$, und

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}^2 &= (a_0 b_0 - \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^2 + (a_0\mathfrak{b} + b_0\mathfrak{a} + (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}))^2 \\ &= a_0^2 b_0^2 - 2a_0 b_0 \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^2 + a_0^2 \mathfrak{b}^2 + b_0^2 \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2 - (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^2 \\ &\qquad + 2a_0 b_0 \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \\ &= (a_0^2 + \mathfrak{a}^2)(b_0^2 + \mathfrak{b}^2) = \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2 . \end{aligned}$$

Aus diesem Satz folgt nun für ungerade Vektorprodukte:

Satz B. Es gibt im R^n höchstens dann ein ungerades stetiges Vektorprodukt von r Vektoren, wenn $n - r = 2^\lambda - 3$ ist $(\lambda = 2, 3, \ldots)$.

Beweis. Eine ungerade Multiplikation mit Normenproduktregel im R^{n+1} bedeutet ein System von $n + 1$ „definiten ungeraden Funktionen in 2 Reihen von $n + 1$ Variabeln"; so etwas gibt es aber nach einem Satze von Hopf[25]) höchstens dann, wenn $n + 1$ eine Potenz von 2 ist. Es kann also höchstens dann ein ungerades Vektorprodukt von 2 Vektoren im R^n geben, wenn n von der Form $2^\lambda - 1$ ist $(\lambda \geqq 2)$; nach dem oben erwähnten Hilfssatz muß also auch für $r \geqq 2$ stets $n - r = 2^\lambda - 3$ sein.

Beschränkt man sich sogar auf lineare Vektorprodukte, so folgt aus Satz A in bekannter Weise: *Es gibt im R^n höchstens dann ein lineares Vektorprodukt von r Vektoren, wenn $n - r = 1$ oder 5 ist.*

Denn nach dem Satz von Hurwitz [26]) über die Komposition quadratischer Formen gibt es genau für $n + 1 = 1, 2, 4, 8$ eine lineare Multiplikation mit Normenproduktregel im R^{n+1}; also gibt es

[25]) s. [10], S. 225, Satz Ie.

[26]) *A. Hurwitz*, Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen 1898, 309—316 (Math. Werke, Bd. II, 565—571).

($n \geqslant 3$) höchstens für $n = 3, 7$ ein lineares Vektorprodukt von 2 Vektoren im R^n, folglich muß immer $n - r = 1$ oder 5 sein. — Für $r = 2$ und $n = 3$ oder 7 existieren auch wirklich lineare Vektorprodukte: für $n = 3$ das übliche Produkt im R^3, das mit der Multiplikation im R^4 (Quaternionen) so zusammenhängt, wie es im Beweis von Satz A formuliert ist; und analog gehört zur Multiplikation im R^8 (Cayley'sche Zahlen) ein lineares Vektorprodukt im R^7. In diesen Fällen hat man also einfache Beispiele stetiger Lösungen eines Gleichungssystems im Sinne der Fragestellung von Satz 5.

(Eingegangen den 26. Dezember 1942.)

LITERATUR

[1] *T. Ważewski*, Sur les matrices dont les éléments sont des fonctions continues, Comp. math. II (1935), 63—68.

[2] *W. Hurewicz*, Beiträge zur Topologie der Deformationen I, Proc. Akad. Amsterdam 38 (1935), 112—119.

[3] *H. Freudenthal*, Über die Klassen der Sphärenabbildungen, Comp. math. V (1937), 299—314.

[4] *B. Eckmann*, Zur Homotopietheorie gefaserter Räume, Comm. math. helv. 14 (1941), 141—192.

[5] *B. Eckmann*, Über die Homotopiegruppen von Gruppenräumen, Comm. math. helv. 14 (1941), 234—256.

[6] *E. Stiefel*, Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Comm. math. helv. 8 (1935), 3—51.

[7] *B. Eckmann*, Systeme von Richtungsfeldern in Sphären und stetige Lösungen komplexer linearer Gleichungen, Comm. math. helv. 15 (1942), 1—26.

[8] *H. Hopf*, Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, Math. Ann. 104 (1931), 637—665.

[9] *S. Eilenberg*, On the relation between the fundamental group of a space and the higher homotopy groups, Fund. math. 32 (1939), 167—175.

[10] *H. Hopf*, Ein topologischer Beitrag zur reellen Algebra, Comm. math. helv. 13 (1941), 219—239.

[11] *A. Hurwitz*, Über die Komposition der quadratischen Formen, Math. Ann. 88 (1923), 1—25 (Math. Werke, Bd. II, 641—666).

[12] *J. Radon*, Lineare Scharen orthogonaler Matrizen, Abh. math. Sem. Hamburg 1 (1922), 1—14.