Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 15 (1942-1943)

Artikel: Inégalités remplies par les dérivées des fonctions holomorphes, univalentes et bornées dans un demi-plan.

Autor: Wolff, Julius

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14893

Inégalités remplies par les dérivées des fonctions holomorphes, univalentes et bornées dans un demi-plan

Par JULIUS WOLFF, Utrecht

1. M[lle] JACQUELINE FERRAND a démontré le théorème suivant:

Si $f(z) = f(x + iy)$ est holomorphe, univalente et bornée dans le demi-plan $D(x > 0)$, alors l'axe imaginaire contient une plénitude (ensemble dont l'ensemble complémentaire est de mesure nulle) de points it tels que, quelle que soit la manière dont z tend vers it,

$$f'(z) = 0\left(\frac{\sqrt{|z - it|}}{x}\right)^{1)} . \tag{1}$$

M. DENJOY avait obtenu la relation (1) en supposant que z tende vers it sur une courbe ayant avec l'axe imaginaire un contact d'ordre < 1 (*C. R. Ac. des Sc.* t. 213, p. 115). Ensuite j'ai étendu ce résultat au cas où z tend vers it sur une courbe convexe quelconque (*Proc. Ned. Ak. v. Wetensch.* t. 44, 1941). M[lle] Ferrand s'affranchit de toute hypothèse sur la manière dont z tend vers it. Sa démonstration repose sur un lemme de H. CARTAN.

Voici une simple démonstration n'utilisant pas ce lemme.

Soit $\varepsilon > 0$ et appelons $E(\varepsilon)$ l'ensemble des points it qui sont limites de points z_n tels que

$$|f'(z_n)| > \varepsilon \cdot \frac{\sqrt{|z_n - it|}}{x_n} . \tag{2}$$

De (2) et d'un théorème de KOEBE résulte que sur le disque circulaire γ_n de centre z_n et de rayon $x_n/2$

$$|f'(z_n)| > k\varepsilon \cdot \frac{\sqrt{|z_n - it|}}{x_n}$$

où k est une constante universelle. Par suite dans la représentation conforme réalisée par $f(z)$ l'aire ω_n de l'image de γ_n satisfait à

$$\omega_n = \iint_{\gamma_n} |f'|^2 \, dx\, dy > k^2 \varepsilon^2 \cdot \frac{|z_n - it|}{x_n^2} \cdot \frac{\pi x_n^2}{4} = \frac{1}{4} \pi k^2 \varepsilon^2 |z_n - it| .$$

---

1) C. R. Ac. des Sc. du 10 novembre 1941 et Thèse du 12 janvier 1942.

Or γ_n est contenu dans le demi-cercle Γ_n, situé dans D, de centre it et de rayon $\varrho_n = 2 \mid z_n - it \mid$. Donc l'aire Ω_n de l'image de Γ_n satisfait à

$$\Omega_n > \frac{1}{8} \pi k^2 \varepsilon^2 \varrho_n \ . \tag{3}$$

Tout point de $E(\varepsilon)$ étant ainsi centre d'une suite d'intervalles de longueurs $2\varrho_n \to 0$, les ϱ_n satisfaisant à (3), on peut, en vertu d'un théorème classique de VITALI, recouvrir une plénitude de $E(\varepsilon)$ par une suite de ces intervalles extérieurs deux à deux. Les Γ_n ayant ces intervalles pour diamètres sont de même extérieurs deux à deux. De (3) résulte donc que l'aire de l'image de la réunion de ces Γ_n est plus grande que $\frac{1}{8}\pi k^2 \varepsilon^2 \cdot \mu E(\varepsilon)$, où $\mu E(\varepsilon)$ est la mesure extérieure de $E(\varepsilon)$.

Or, quelque petit que soit le nombre positif a, on peut supposer que les Γ_n soient dans la bande $B(a)$, définie par $0 < x < a$. Alors l'aire de l'image de $B(a)$ est plus grande que $\frac{1}{8}\pi k^2 \varepsilon^2 \cdot \mu E(\varepsilon)$. D'autre part, comme $f(z)$ est bornée cette aire tend vers zéro avec a, donc $\mu E(\varepsilon) = 0$. Considérons une suite de nombres positifs ε_n tendant vers zéro. La réunion E des ensembles $E(\varepsilon_n)$ est de mesure nulle. Or E est l'ensemble des points it ne satisfaisant pas à (1); le théorème est démontré.

2. On sait que $xf'(z)$ tend vers zéro, quelle que soit la manière dont z s'approche de l'axe imaginaire. En revanche nous démontrerons le

Théorème. *A tout nombre positif ε correspondent des fonctions $f(z)$ holomorphes, bornées et univalentes dans $D\,(x > 0)$ telles que l'axe imaginaires contient un résiduel (ensemble dont l'ensemble complémentaire est la réunion d'ensembles non denses e_n, $n = 1, 2 \ldots$) de points it ayant la propriété que sur toute courbe $\mid y - t \mid = x^p$, $0 < p < \infty$,*

$$\limsup_{z \to it} x^{1-\varepsilon} \mid f'(z) \mid = \infty \ . \tag{4}$$

Démonstration. Choisissons sur l'axe imaginaire une suite partout dense de points α_k, $k = 1, 2, \ldots$; fixons un nombre positif θ entre $1 - \varepsilon$ et 1 et considérons la fonction

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{-2}}{1 + \mid \alpha_k \mid} (z - \alpha_k)^{1-\theta} \ .$$

$f(z)$ est holomorphe dans D et sa dérivée $f'(z) = (1-\theta) \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^{-2}}{1 + \mid \alpha_k \mid} (z - \alpha_k)^{-\theta}$ est à partie réelle positive, donc $f(z)$ est univalente dans D.

A tout nombre positif n correspond un résiduel R_n de points it sur l'axe imaginaire tels que la suite α_k contient une suite α_{k_ν} satisfaisant à

$$k_\nu^n \,|\, \alpha_{k_\nu} - it \,| < 1 \quad , \quad \nu = 1, 2, \ldots \quad . \tag{5}$$

Soit it sur R_n et soit p un nombre positif. Considérons sur la courbe $|\, y - t \,| = x^p$ la suite des points $z_\nu = x_\nu + iy_\nu$ situés avec les α_{k_ν} sur des droites parallèles à l'axe réel, donc

$$z_\nu - \alpha_{k_\nu} = x_\nu = |\, \alpha_{k_\nu} - it \,|^{\frac{1}{p}} = |\, y_\nu - t \,|^{\frac{1}{p}}, \quad \nu = 1, 2, \ldots \quad . \tag{6}$$

Or

$$|\, f'(z_\nu) \,| \geqq \Re \{ f'(z_\nu) \} > (1 - \theta) \frac{k_\nu^{-2}}{1 + |\alpha_{k_\nu}|} \, x_\nu^{-\theta}, \quad \nu = 1, 2, \ldots \quad .$$

Donc d'après (5) et (6)

$$|\, f'(z_\nu) \,| > (1 - \theta) \, x_\nu^{-\theta + \frac{2p}{n}} (1 + |\alpha_{k_\nu}|)^{-1} \sim \frac{1 - \theta}{1 + |t|} \, x_\nu^{-\theta + \frac{2p}{n}} \text{ pour } \nu \to \infty \, . \tag{7}$$

Parce que $\theta > 1 - \varepsilon$, l'exposant de x_ν dans (7) est plus petit que $\varepsilon - 1$, si n est suffisamment élevé, ce qui conduit à (4). L'ensemble commun aux résiduels $R_n, n = 1, 2, \ldots$ est un résiduel R et, pour it dans R, la relation (4) est remplie quel que soit le nombre positif p. Donc, abstraction faite de la condition que $f(z)$ soit bornée dans D, le théorème est démontré. Mais, $f(z)$ étant à partie réelle positive dans D, la fonction

$$\Phi(z) = \frac{1}{f(z) + 1}$$

est holomorphe, univalente *et bornée* dans D et il est clair que sur R elle satisfait à (4) comme $f(z)$, quel que soit le nombre positif p.

(Reçu le 26 novembre 1942.)