Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 15 (1942-1943)

Artikel: Inégalités remplies par les dérivées des fonctions holomorphes, univalentes et bornées dans un demi-plan.

Autor: Wolff, Julius

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14893

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Inégalités remplies par les dérivées des fonctions holomorphes, univalentes et bornées dans un demi-plan

Par JULIUS WOLFF, Utrecht

1. Mlle JACQUELINE FERRAND a démontré le théorème suivant:

Si $f(z) = f(x + iy)$ est holomorphe, univalente et bornée dans le demi-plan $D(x > 0)$, alors l'axe imaginaire contient une plénitude (ensemble dont l'ensemble complémentaire est de mesure nulle) de points it tels que, quelle que soit la manière dont z tend vers it,

$$f'(z) = 0\left(\frac{\sqrt{|z - it|}}{x}\right)^{1)} . \tag{1}$$

M. DENJOY avait obtenu la relation (1) en supposant que z tende vers it sur une courbe ayant avec l'axe imaginaire un contact d'ordre < 1 (*C. R. Ac. des Sc.* t. 213, p. 115). Ensuite j'ai étendu ce résultat au cas où z tend vers it sur une courbe convexe quelconque (*Proc. Ned. Ak. v. Wetensch.* t. 44, 1941). Mlle Ferrand s'affranchit de toute hypothèse sur la manière dont z tend vers it. Sa démonstration repose sur un lemme de H. CARTAN.

Voici une simple démonstration n'utilisant pas ce lemme.

Soit $\varepsilon > 0$ et appelons $E(\varepsilon)$ l'ensemble des points it qui sont limites de points z_n tels que

$$|f'(z_n)| > \varepsilon \cdot \frac{\sqrt{|z_n - it|}}{x_n} . \tag{2}$$

De (2) et d'un théorème de KOEBE résulte que sur le disque circulaire γ_n de centre z_n et de rayon $x_n/2$

$$|f'(z_n)| > k\varepsilon \cdot \frac{\sqrt{|z_n - it|}}{x_n}$$

où k est une constante universelle. Par suite dans la représentation conforme réalisée par $f(z)$ l'aire ω_n de l'image de γ_n satisfait à

$$\omega_n = \iint_{\gamma_n} |f'|^2 \, dx \, dy > k^2 \varepsilon^2 \cdot \frac{|z_n - it|}{x_n^2} \cdot \frac{\pi x_n^2}{4} = \frac{1}{4} \pi k^2 \varepsilon^2 |z_n - it| .$$

---

1) C. R. Ac. des Sc. du 10 novembre 1941 et Thèse du 12 janvier 1942.

Or γ_n est contenu dans le demi-cercle Γ_n, situé dans D, de centre it et de rayon $\varrho_n = 2 \mid z_n - it \mid$. Donc l'aire Ω_n de l'image de Γ_n satisfait à

$$\Omega_n > \frac{1}{8} \pi k^2 \varepsilon^2 \varrho_n \quad . \tag{3}$$

Tout point de $E(\varepsilon)$ étant ainsi centre d'une suite d'intervalles de longueurs $2\varrho_n \to 0$, les ϱ_n satisfaisant à (3), on peut, en vertu d'un théorème classique de VITALI, recouvrir une plénitude de $E(\varepsilon)$ par une suite de ces intervalles extérieurs deux à deux. Les Γ_n ayant ces intervalles pour diamètres sont de même extérieurs deux à deux. De (3) résulte donc que l'aire de l'image de la réunion de ces Γ_n est plus grande que $\frac{1}{8}\pi k^2 \varepsilon^2 \cdot \mu E(\varepsilon)$, où $\mu E(\varepsilon)$ est la mesure extérieure de $E(\varepsilon)$.

Or, quelque petit que soit le nombre positif a, on peut supposer que les Γ_n soient dans la bande $B(a)$, définie par $0 < x < a$. Alors l'aire de l'image de $B(a)$ est plus grande que $\frac{1}{8}\pi k^2 \varepsilon^2 \cdot \mu E(\varepsilon)$. D'autre part, comme $f(z)$ est bornée cette aire tend vers zéro avec a, donc $\mu E(\varepsilon) = 0$. Considérons une suite de nombres positifs ε_n tendant vers zéro. La réunion E des ensembles $E(\varepsilon_n)$ est de mesure nulle. Or E est l'ensemble des points it ne satisfaisant pas à (1); le théorème est démontré.

2. On sait que $xf'(z)$ tend vers zéro, quelle que soit la manière dont z s'approche de l'axe imaginaire. En revanche nous démontrerons le

Théorème. *A tout nombre positif ε correspondent des fonctions $f(z)$ holomorphes, bornées et univalentes dans $D\,(x > 0)$ telles que l'axe imaginaires contient un résiduel (ensemble dont l'ensemble complémentaire est la réunion d'ensembles non denses $e_n, n = 1, 2 \ldots$) de points it ayant la propriété que sur toute courbe $\mid y - t \mid = x^p$, $0 < p < \infty$,*

$$\limsup_{z \to it} x^{1-\varepsilon} \mid f'(z) \mid = \infty \quad . \tag{4}$$

Démonstration. Choisissons sur l'axe imaginaire une suite partout dense de points α_k, $k = 1, 2, \ldots$; fixons un nombre positif θ entre $1 - \varepsilon$ et 1 et considérons la fonction

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{-2}}{1 + \mid \alpha_k \mid} (z - \alpha_k)^{1-\theta} \quad .$$

$f(z)$ est holomorphe dans D et sa dérivée $f'(z) = (1-\theta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{-2}}{1 + \mid \alpha_k \mid} (z - \alpha_k)^{-\theta}$ est à partie réelle positive, donc $f(z)$ est univalente dans D.

A tout nombre positif n correspond un résiduel R_n de points it sur l'axe imaginaire tels que la suite α_k contient une suite α_{k_ν} satisfaisant à

$$k_\nu^n \mid \alpha_{k_\nu} - it \mid < 1 \quad , \quad \nu = 1, 2, \ldots \quad . \tag{5}$$

Soit it sur R_n et soit p un nombre positif. Considérons sur la courbe $\mid y - t \mid = x^p$ la suite des points $z_\nu = x_\nu + iy_\nu$ situés avec les α_{k_ν} sur des droites parallèles à l'axe réel, donc

$$z_\nu - \alpha_{k_\nu} = x_\nu = \mid \alpha_{k_\nu} - it \mid^{\frac{1}{p}} = \mid y_\nu - t \mid^{\frac{1}{p}} , \quad \nu = 1, 2, \ldots \quad . \tag{6}$$

Or

$$\mid f'(z_\nu) \mid \geqq \Re \{ f'(z_\nu) \} > (1 - \theta) \frac{k_\nu^{-2}}{1 + \mid \alpha_{k_\nu} \mid} x_\nu^{-\theta} , \quad \nu = 1, 2, \ldots \quad .$$

Donc d'après (5) et (6)

$$\mid f'(z_\nu) \mid > (1 - \theta)\, x_\nu^{-\theta + \frac{2p}{n}} (1 + \mid \alpha_{k_\nu} \mid)^{-1} \sim \frac{1 - \theta}{1 + \mid t \mid} x_\nu^{-\theta + \frac{2p}{n}} \text{ pour } \nu \to \infty \; . \tag{7}$$

Parce que $\theta > 1 - \varepsilon$, l'exposant de x_ν dans (7) est plus petit que $\varepsilon - 1$, si n est suffisamment élevé, ce qui conduit à (4). L'ensemble commun aux résiduels R_n, $n = 1, 2, \ldots$ est un résiduel R et, pour it dans R, la relation (4) est remplie quel que soit le nombre positif p. Donc, abstraction faite de la condition que $f(z)$ soit bornée dans D, le théorème est démontré. Mais, $f(z)$ étant à partie réelle positive dans D, la fonction

$$\Phi(z) = \frac{1}{f(z) + 1}$$

est holomorphe, univalente *et bornée* dans D et il est clair que sur R elle satisfait à (4) comme $f(z)$, quel que soit le nombre positif p.

(Reçu le 26 novembre 1942.)