

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 15 (1942-1943)

Artikel: Invariante Herleitung der Differentialgleichungen für 3-fache Orthogonalsysteme.
Autor: Bieri, Hans
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-14892>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

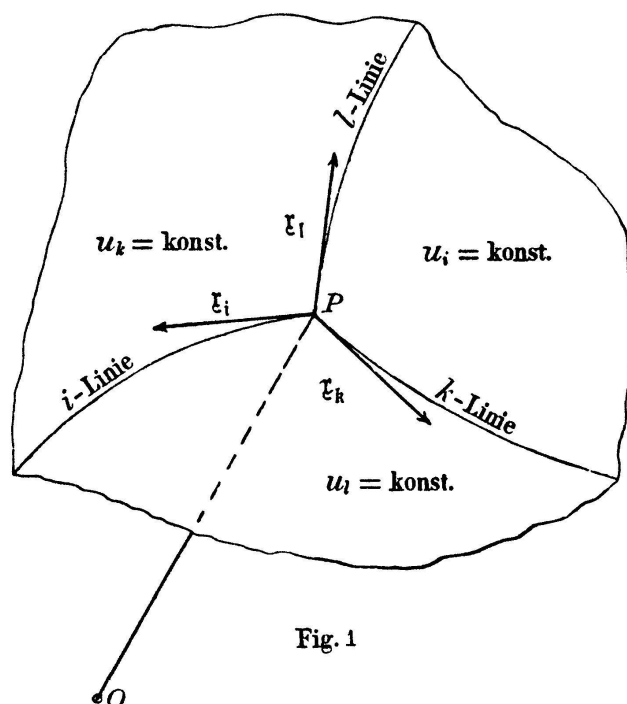
Invariante Herleitung der Differentialgleichungen für 3-fache Orthogonalsysteme

Von HANS BIERI, Herzogenbuchsee

Nach dem Satze von Dupin schneiden sich die Flächen eines dreifachen Orthogonalsystems paarweise in Krümmungslinien. Die Differentialgleichungen, denen der Ortsvektor des Systems zu genügen hat, wird man also zweckmäßig durch invariante Ableitung gewinnen können.

1. Bezeichnungen (vergleiche Figur 1).

Die Durchführung unserer Idee erfordert ausgiebige Verwendung der Indexrechnung. Von großem Vorteil wird sich die Abmachung erweisen, daß ohne gegenteilige Vorschrift über doppelt auftretende Indizes summiert wird.



Bedenkt man ferner, daß in den dreifachen Orthogonalsystemen keine der Flächenscharen irgendwie ausgezeichnet ist, so erscheint die Verwendung von Indizespermutationen selbstverständlich. Ich benütze die Bezeichnungen der Differentialgeometrie nach *Blaschke*, Vorlesungen über Differentialgeometrie (Dritte Auflage). Außerdem bedeuten:

1. Obere eingeklammerte Indizes: Markierung¹⁾
 Untere Indizes: Ableitung
Untere deutsche Indizes: Ableitung nach den Bogenlängen der Krümmungslinien
2. u_1, u_2, u_3 : Flächenparameter u, v, w
3. i, k, l : Gruppe der aus 1, 2, 3 durch zyklische Vertauschung²⁾ hervorgehenden Permutationen
 i, l, k : Übrige Permutationen
4. l -Linien: Schnittlinien der Flächen $u_i = \text{konst.}$
 $u_k = \text{konst.}$
5. $A^{(lk)}$: Hauptkrümmung der Flächen $u_i = \text{konst.}$ längs der k -Linien
6. $B^{(ki)}$: Geodätische Krümmung der Parameterlinien i auf den Flächen $u_k = \text{konst.}$
7. $K^{(l)}$: Gaußsche Krümmung der Flächen $u_i = \text{konst.}$

2. Formelapparat der invarianten Ableitung.

Die invariante Ableitung bezweckt, aus Invarianten J einer Fläche durch Differentiation neue Invarianten zu gewinnen. Zunächst ist erforderlich, die Flächen auf Kurvennetze von invarianter Bedeutung zu beziehen. Ganz allgemein eignen sich dazu die Krümmungslinien am besten, da sie immer reell sind. Wegen des Satzes von Dupin drängen sie sich für unsere Zwecke geradezu auf. Bedeuten nun u, v Krümmungslinienparameter, so sind die Ableitungen J_u bzw. J_v doch nicht invariant gegenüber Parametertransformationen von der Form

$$u = f(\bar{u}), \quad v = g(\bar{v}), \quad \text{mit } \frac{df}{d\bar{u}} \neq 0, \quad \frac{dg}{d\bar{v}} \neq 0;$$

denn man erhält:

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial J}{\partial u} \cdot f' \quad ; \quad \frac{\partial \bar{J}}{\partial \bar{v}} = \frac{\partial J}{\partial v} \cdot g' \quad .$$

In der Kurventheorie benützt man mit Erfolg die Bogenlänge als Parameter. Will man dieses Verfahren auf die Flächentheorie übertragen,

¹⁾ Diese Bezeichnung wird jedoch nur dann systematisch angewendet, wenn Mißverständnisse zu befürchten sind.

²⁾ Vertauschung wird ausdrücklich vorgeschrieben.

so ist zu bedenken, daß u und v im allgemeinen auf den Krümmungslinien nicht die Bogenlänge messen. Durch eine Skalentransformation kann man nur erreichen, daß sie dies auf je einer herausgegriffenen Krümmungslinie jeder Schar tun. Dadurch entsteht natürlich eine Komplikation.

Mit den Bezeichnungen in 1. erhalten wir:

1. Bogenlänge der Parameterlinien:

$$s^{(m)} = \int \sqrt{E^{(m)}} du^{(m)} .$$

(Nicht summieren über m !) ($m = i, k$ oder l) .

2. Linienelement des Orthogonalsystems:

$$ds^2 = E^{(\lambda)} (du^{(\lambda)})^2 .$$

$$3. \frac{\partial}{\partial s^{(m)}} = \frac{\partial}{\partial u^{(m)}} \cdot \frac{\partial u^{(m)}}{\partial s^{(m)}} = \frac{\partial}{\partial u^{(m)}} : \frac{\partial s^{(m)}}{\partial u^{(m)}} = \frac{\partial}{\partial u^{(m)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{E^{(m)}}} .$$

$$4. \frac{\partial}{\partial s^{(m)}} = \frac{\partial}{\partial m} \quad (m = i, k \text{ oder } l) .$$

5. Ist S invariant gegenüber den oben erwähnten Skalentransformationen, so gilt³⁾:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{S_u}{\sqrt{E}} & ; & \quad S_2 = \frac{S_v}{\sqrt{G}} \\ S_{11} &= \frac{S_{uu}}{E} - \frac{1}{2} \cdot \frac{S_u \cdot E_u}{E^2} & ; & \quad S_{22} = \frac{S_{vv}}{G} - \frac{1}{2} \cdot \frac{S_v \cdot G_v}{G^2} \\ S_{12} &= \frac{S_{uv}}{\sqrt{EG}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{S_u \cdot E_v}{E\sqrt{EG}} & ; & \quad S_{21} = \frac{S_{vu}}{\sqrt{EG}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{S_v \cdot G_u}{G\sqrt{EG}} . \end{aligned}$$

Wegen $S_{vu} = S_{uv}$ ist nun die Integrabilitätsbedingung

$$S_{12} + \frac{1}{2} \cdot \frac{S_u \cdot E_v}{E\sqrt{EG}} = S_{21} + \frac{1}{2} \cdot \frac{S_v \cdot G_u}{G\sqrt{EG}}$$

zu beachten. Dieselbe kann durchsichtiger geschrieben werden. Es ist:

³⁾ Blaschke, S. 125 ff., 3. Auflage.

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{S_u \cdot E_v}{\sqrt{E} \sqrt{E} \sqrt{EG}} = -S_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{EG}} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \sqrt{E} = S_1 \cdot \kappa_g^{(u)}, \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{S_v \cdot G_u}{\sqrt{G} \sqrt{G} \sqrt{EG}} = -S_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{EG}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \sqrt{G} = S_2 \cdot \kappa_g^{(v)}$$

also nach 1

$$S_{12} - B^{(31)} \cdot S_1 = S_{21} - B^{(32)} \cdot S_2 \text{ und weiter:}$$

$$\underline{S_{it} - B^{(li)} \cdot S_i = S_{ti} - B^{(lk)} \cdot S_t} \quad (1)$$

(1) ist für die Ableitung der Differentialgleichungen von fundamentaler Bedeutung.

Es ist ferner leicht einzusehen, daß durch *gleichzeitige zyklische Vertauschung sämtlicher Indizes* alle Flächen des Orthogonalsystems erfaßt werden.

3. Die Ableitungsgleichungen.

Für unsere Zwecke haben wir nun das Dreiein der normierten Tangentenvektoren längs der Krümmungslinien zu verfolgen. Aus schon genannten Gründen ist Beschränkung auf die Grundvektoren der einen Flächenschar statthaft.

Wir machen den zunächst unbestimmten Ansatz:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_{11} &= \alpha^{(i\lambda)} \mathfrak{x}_\lambda & \mathfrak{x}_{1i} &= \varepsilon^{(i\lambda)} \mathfrak{x}_\lambda \\ \mathfrak{x}_{1t} &= \beta^{(i\lambda)} \mathfrak{x}_\lambda & \mathfrak{x}_{ti} &= \eta^{(i\lambda)} \mathfrak{x}_\lambda \\ \mathfrak{x}_{t1} &= \gamma^{(i\lambda)} \mathfrak{x}_\lambda \\ \mathfrak{x}_{tt} &= \delta^{(i\lambda)} \mathfrak{x}_\lambda . \end{aligned} \quad (2)$$

Die Koeffizienten der 6 Linearformen bestimmt man mit Hilfe der Beziehungen, die zwischen den Grundvektoren bestehen.

$\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_t, \mathfrak{x}_l$ genügen folgenden Gleichungen:

$$\mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_i = \mathfrak{x}_t \mathfrak{x}_t = \mathfrak{x}_l \mathfrak{x}_l = 1 \quad (a)$$

$$\mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_t = \mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_l = \mathfrak{x}_t \mathfrak{x}_l = 0 \quad (b)$$

Aus (a) folgt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_{1i} &= \mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_{1t} = \mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_{1l} = \mathfrak{x}_t \mathfrak{x}_{t1} = \mathfrak{x}_t \mathfrak{x}_{tt} = \\ \mathfrak{x}_l \mathfrak{x}_{l1} &= \mathfrak{x}_l \mathfrak{x}_{li} = \mathfrak{x}_l \mathfrak{x}_{lt} = \mathfrak{x}_l \mathfrak{x}_{ll} = 0 , \end{aligned}$$

⁴⁾ Blaschke, S. 150, 3. Auflage. $\kappa_g^{(u)}$ = geodätische Krümmung der u -Linien

$\kappa_g^{(v)}$ = geodätische Krümmung der v -Linien.

und aus (b):

$$\begin{aligned}
(x_i x_f)_i &= x_i x_{fi} + x_f x_{ii} , \\
(x_i x_f)_f &= x_i x_{ff} + x_f x_{if} ; \\
(x_i x_i)_i &= x_i x_{ii} + x_{ii} x_i ; & (x_i x_i)_f &= x_{if} x_i + x_{if} x_i ; \\
(x_i x_f)_i &= x_i x_{fi} + x_f x_{ii} ; & (x_i x_f)_f &= x_i x_{ff} + x_f x_{if} ;
\end{aligned}$$

und weiter:

$$\begin{aligned}
x_f x_{ii} &= - x_i x_{fi} , \\
x_i x_{ff} &= - x_f x_{if} , \\
x_i x_{ii} &= - x_i x_{ii} , \\
x_i x_{if} &= - x_i x_{if} , \\
x_f x_{ii} &= - x_i x_{fi} , \\
x_f x_{if} &= - x_i x_{ff} .
\end{aligned}$$

Die Integrabilitätsbedingung in 2. gilt auch für beliebige Vektoren. Wir schreiben:

$$x_{if} - B^{(i)} x_i = x_{fi} - B^{(fk)} x_f .$$

Nach skalarer Multiplikation mit x_i bzw. x_f folgt:

$$x_{fi} x_i = - B^{(i)} ; \quad x_{if} x_f = - B^{(fk)} . \quad (c)$$

Da die Parameterlinien Krümmungslinien sind, steht ferner die Gleichung

$$M \equiv 0$$

zur Verfügung. M ist gleich der Determinante der 3 Vektoren x_i , x_k und x_{ik} ⁵⁾. Nun ist aber x_i proportional x_i , x_k proportional x_f , und x_{ik} ist eine lineare Kombination von x_{fi} und x_i , bzw. von x_{fi} und x_f gemäß 2, 5. Daraus folgt:

$$x_{if} \cdot x_i = x_{fi} \cdot x_i = 0 . \quad (d)$$

Schließlich darf man die beiden Rodrigues'schen Gleichungen⁶⁾

$$\mathfrak{N}_u = - A^{(i)} \cdot x_u , \quad \mathfrak{N}_v = - A^{(fk)} x_v$$

nicht vergessen. Nach Division durch \sqrt{E} bzw. \sqrt{G} liest man sie:

$$x_{ii} = - A^{(i)} x_i , \quad x_{if} = - A^{(fk)} x_f ,$$

woraus folgt:

⁵⁾ Blaschke, S. 89, 3. Auflage.

⁶⁾ Blaschke, S. 95, 3. Auflage.

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_{li} \cdot \mathfrak{x}_i &= -A^{(li)}, & \mathfrak{x}_{lf} \cdot \mathfrak{x}_f &= -A^{(lk)}, & (e) \\ \mathfrak{x}_{li} \cdot \mathfrak{x}_f &= 0, & \mathfrak{x}_{lf} \cdot \mathfrak{x}_i &= 0. \end{aligned}$$

Damit sind alle Bedingungen ausgewertet, und wir schreiten zur Bestimmung der unbestimmten Koeffizienten.

$$\mathfrak{x}_{li} = \alpha^{(i\lambda)} \mathfrak{x}_\lambda$$

$$\mathfrak{x}_{li} \mathfrak{x}_i = \alpha^{(ii)} \cdot 1 + \alpha^{(ik)} \cdot 0 + \alpha^{(il)} \cdot 0 \rightarrow \alpha^{(ii)} = 0 \quad (\text{vergleiche (a)})$$

$$\mathfrak{x}_{li} \mathfrak{x}_f = \alpha^{(ii)} \cdot 0 + \alpha^{(ik)} \cdot 1 + \alpha^{(il)} \cdot 0 \rightarrow \alpha^{(ik)} = B^{(li)} \quad ((b), (c))$$

$$\mathfrak{x}_{li} \mathfrak{x}_l = \alpha^{(ii)} \cdot 0 + \alpha^{(ik)} \cdot 0 + \alpha^{(il)} \cdot 1 \rightarrow \alpha^{(il)} = A^{(li)} \quad ((b), (e))$$

$$\mathfrak{x}_{lf} = \beta^{(i\lambda)} \cdot \mathfrak{x}_\lambda$$

$$\mathfrak{x}_{lf} \mathfrak{x}_i = \beta^{(ii)} \cdot 1 + \beta^{(ik)} \cdot 0 + \beta^{(il)} \cdot 0 \rightarrow \beta^{(ii)} = 0 \quad (a)$$

$$\mathfrak{x}_{lf} \mathfrak{x}_f = \beta^{(ii)} \cdot 0 + \beta^{(ik)} \cdot 1 + \beta^{(il)} \cdot 0 \rightarrow \beta^{(ik)} = -B^{(lk)} \quad (c)$$

$$\mathfrak{x}_{lf} \mathfrak{x}_l = \beta^{(ii)} \cdot 0 + \beta^{(ik)} \cdot 0 + \beta^{(il)} \cdot 1 \rightarrow \beta^{(il)} = 0 \quad (d)$$

$$\mathfrak{x}_{fi} = \gamma^{(i\lambda)} \cdot \mathfrak{x}_\lambda$$

$$\mathfrak{x}_{fi} \mathfrak{x}_i = \gamma^{(ii)} \cdot 1 + \gamma^{(ik)} \cdot 0 + \gamma^{(il)} \cdot 0 \rightarrow \gamma^{(ii)} = -B^{(li)} \quad (c)$$

$$\mathfrak{x}_{fi} \mathfrak{x}_f = \gamma^{(ii)} \cdot 0 + \gamma^{(ik)} \cdot 1 + \gamma^{(il)} \cdot 0 \rightarrow \gamma^{(ik)} = 0 \quad (a)$$

$$\mathfrak{x}_{fi} \mathfrak{x}_l = \gamma^{(ii)} \cdot 0 + \gamma^{(ik)} \cdot 0 + \gamma^{(il)} \cdot 1 \rightarrow \gamma^{(il)} = 0 \quad (d)$$

$$\mathfrak{x}_{ff} = \delta^{(i\lambda)} \mathfrak{x}_\lambda$$

$$\mathfrak{x}_{ff} \mathfrak{x}_i = \delta^{(ii)} \cdot 1 + \delta^{(ik)} \cdot 0 + \delta^{(il)} \cdot 0 \rightarrow \delta^{(ii)} = B^{(lk)} \quad ((b), (c))$$

$$\mathfrak{x}_{ff} \mathfrak{x}_f = \delta^{(ii)} \cdot 0 + \delta^{(ik)} \cdot 1 + \delta^{(il)} \cdot 0 \rightarrow \delta^{(ik)} = 0 \quad (a)$$

$$\mathfrak{x}_{ff} \mathfrak{x}_l = \delta^{(ii)} \cdot 0 + \delta^{(ik)} \cdot 0 + \delta^{(il)} \cdot 1 \rightarrow \delta^{(il)} = A^{(lk)} \quad ((b), (e))$$

$$\mathfrak{x}_{li} = \varepsilon^{(i\lambda)} \cdot \mathfrak{x}_\lambda$$

$$\mathfrak{x}_{li} \mathfrak{x}_i = \varepsilon^{(ii)} \cdot 1 + \varepsilon^{(ik)} \cdot 0 + \varepsilon^{(il)} \cdot 0 \rightarrow \varepsilon^{(ii)} = -A^{(li)} \quad ((b), (e))$$

$$\mathfrak{x}_{li} \mathfrak{x}_f = \varepsilon^{(ii)} \cdot 0 + \varepsilon^{(ik)} \cdot 1 + \varepsilon^{(il)} \cdot 0 \rightarrow \varepsilon^{(ik)} = 0 \quad (e)$$

$$\mathfrak{x}_{li} \mathfrak{x}_l = \varepsilon^{(ii)} \cdot 0 + \varepsilon^{(ik)} \cdot 0 + \varepsilon^{(il)} \cdot 1 \rightarrow \varepsilon^{(il)} = 0 \quad (a)$$

$$\mathfrak{x}_{lf} = \eta^{(i\lambda)} \cdot \mathfrak{x}_\lambda$$

$$\mathfrak{x}_{lf} \cdot \mathfrak{x}_i = \eta^{(ii)} \cdot 1 + \eta^{(ik)} \cdot 0 + \eta^{(il)} \cdot 0 \rightarrow \eta^{(ii)} = 0 \quad (e)$$

$$\mathfrak{x}_{lf} \cdot \mathfrak{x}_f = \eta^{(ii)} \cdot 0 + \eta^{(ik)} \cdot 1 + \eta^{(il)} \cdot 0 \rightarrow \eta^{(ik)} = -A^{(lk)} \quad ((b), (e))$$

$$\mathfrak{x}_{lf} \cdot \mathfrak{x}_l = \eta^{(ii)} \cdot 0 + \eta^{(ik)} \cdot 0 + \eta^{(il)} \cdot 1 \rightarrow \eta^{(il)} = 0 \quad (a)$$

Die Ableitungsgleichungen lauten mithin:

$$\begin{array}{llll}
x_{i i} = & * & B^{(li)} x_i + A^{(li)} x_i & \\
x_{i f} = & * & - B^{(lk)} x_f & * \quad x_{i i} = - A^{(li)} x_i \\
x_{f i} = & - B^{(li)} x_i & * & * \quad x_{f f} = - A^{(lk)} x_f \\
x_{f f} = & B^{(lk)} x_i & * & + A^{(lk)} x_i
\end{array} \quad (3)$$

Man bemerkt Vertauschbarkeit von i und k bei festgehaltenem l . Dies ist keineswegs erstaunlich, sind doch i - und k -Linie vollständig gleichwertig. Gestützt darauf hätte man x_{fi} , x_{ff} und x_{ii} zum vornherein weglassen können.

Soll das System (3) integrabel sein, so müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$\begin{array}{l}
x_{i i f} - B^{(li)} x_{i i} = x_{i f i} - B^{(lk)} x_{i f} \quad ?) \\
x_{f f i} - B^{(lk)} x_{f f} = x_{f i f} - B^{(li)} x_{f i} \\
x_{i i f} - B^{(li)} x_{i i} = x_{i f i} - B^{(lk)} x_{i f} .
\end{array} \quad (4)$$

Nun werden die Ableitungen ausgeführt und für die zweiten Ableitungen werden ihre Werte aus (3) eingesetzt:

$$x_{i i} = B^{(li)} x_i + A^{(li)} x_i$$

$$\begin{aligned}
x_{i i f} &= B_i^{(li)} x_f + A_i^{(li)} x_i + B^{(li)} (B^{(lk)} x_i + A^{(lk)} x_i) - A^{(li)} \cdot A^{(lk)} x_f \\
&= B^{(li)} B^{(lk)} \cdot x_i + (B_i^{(li)} - A^{(li)} A^{(lk)}) x_f + (A_i^{(li)} + B^{(li)} A^{(lk)}) x_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{i i f} - B^{(li)} x_{i i} &= B^{(li)} B^{(lk)} \cdot x_i + (B_i^{(li)} - A^{(li)} A^{(lk)}) x_f \\
&+ (A_i^{(li)} + B^{(li)} A^{(lk)}) x_i - B^{(li)} (B_i^{(li)} x_f + A^{(li)} x_i) \\
&= B^{(li)} B^{(lk)} x_i + (B_i^{(li)} - A^{(li)} A^{(lk)} - B^{(li)} B^{(li)}) x_f \\
&+ (A_i^{(li)} + B^{(li)} A^{(lk)} - B^{(li)} A^{(li)}) x_i
\end{aligned}$$

$$x_{i f} = - B^{(lk)} x_f$$

$$x_{f f i} = - B_i^{(lk)} x_f - B^{(lk)} x_{f i} = - B_i^{(lk)} x_f + B^{(lk)} \cdot B^{(li)} x_i$$

$$\begin{aligned}
x_{f f i} - B^{(lk)} x_{i f} &= - B_i^{(lk)} x_f + B^{(lk)} \cdot B^{(li)} x_i + B^{(lk)} \cdot B^{(lk)} \cdot x_f \\
&= B^{(lk)} B^{(li)} x_i + (B^{(lk)} \cdot B^{(lk)} - B_i^{(lk)}) x_f
\end{aligned}$$

$$x_{i i} = - A^{(li)} x_i$$

$$x_{i i f} = - A_i^{(li)} x_i - A^{(li)} x_{i f} = - A_i^{(li)} x_i + A^{(li)} \cdot B^{(lk)} x_f$$

?) Anwendung der Integrabilitätsbedingung (1).

$$\begin{aligned} x_{lff} - B^{(li)} x_{ll} &= -A_i^{(li)} x_l + A^{(li)} \cdot B^{(lk)} x_f + B^{(li)} \cdot A^{(li)} x_l \\ &= (B^{(li)} \cdot A^{(li)} - A_i^{(li)}) x_l + A^{(li)} B^{(lk)} x_f \end{aligned}$$

$$x_{lff} - B^{(lk)} x_{ll} = (B^{(lk)} A^{(lk)} - A_i^{(lk)}) x_f + A^{(lk)} B^{(li)} x_l .$$

Die zweite Zeile von (4) liefert nichts Neues.

Bringt man in (4) alles auf die linken Seiten, so resultiert:

$$\begin{aligned} x_l (B^{(li)} B^{(lk)} - B^{(lk)} B^{(li)}) + x_f (B_i^{(li)} + B_i^{(lk)} - A^{(li)} A^{(lk)} - B^{(li)2} - B^{(lk)2}) \\ + x_l (A_i^{(li)} + B^{(li)} A^{(lk)} - B^{(li)} A^{(li)}) = 0 . \end{aligned}$$

$$x_l (B^{(li)} A^{(li)} - A_i^{(li)} - B^{(li)} A^{(lk)}) + x_f (A^{(li)} B^{(lk)} - B^{(lk)} A^{(lk)} + A_i^{(lk)}) = 0 .$$

Dies sind lauter Identitäten. Deshalb lauten die Integrabilitätsbedingungen:

$$\begin{aligned} B_i^{(li)} + B_i^{(lk)} - B^{(li)2} - B^{(lk)2} &= A^{(li)} A^{(lk)} = K^{(l)} \\ A_i^{(lk)} &= B^{(lk)} (A^{(lk)} - A^{(li)}) ; \quad A_i^{(li)} = B^{(li)} (A^{(li)} - A^{(lk)}) \end{aligned} \quad (5)$$

(5) ist natürlich nichts anderes als die Gauß'sche und die Codazzi'schen Gleichungen in invarianter Gestalt.

(4) und (5) charakterisieren nicht schon das Orthogonalsystem. In der Tat haben wir noch gar nicht berücksichtigt, daß jeder der drei Grundvektoren auf zwei Flächen die Rolle eines Tangentenvektors spielt, während er zugleich Normalenvektor der dritten ist. Die zusätzlichen Bedingungen findet man einfach durch Vergleichen der skalaren Grundvektorprodukte. Wir erhalten ihre Gesamtheit durch *gleichzeitige zyklische Vertauschung* sämtlicher Indizes⁸⁾.

$$\begin{aligned} x_l x_{ll}^* &= B^{(li)}, & x_l x_{ff}^{****} &= B^{(ik)}, & x_l x_{ll}^{*****} &= B^{(kl)}, \\ x_l x_{ff}^{**} &= B^{(lk)}, & x_f x_{ll}^{*****} &= B^{(il)}, & x_l x_{ll}^{***} &= B^{(ki)}, \\ x_{ll} x_l^{***} &= A^{(li)}, & x_{ff} x_l^{**} &= A^{(ik)}, & x_{ll} x_f^{*****} &= A^{(kl)}, \\ x_{ff} x_l^{****} &= A^{(lk)}, & x_{ll} x_i^{*****} &= A^{(il)}, & x_{ll} x_f^* &= A^{(ki)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Die Gleichungen (6) stimmen paarweise in den linken Seiten überein (durch Sternchen dargestellt), also müssen auch die rechten Seiten gleich sein. Deshalb gelten die sechs wichtigen Relationen:

⁸⁾ Skalarprodukte mit den Werten 0 oder 1 werden vernachlässigt. Unterscheiden sich zwei nur durch das Vorzeichen, so wird nur dasjenige mit dem positiven Wert berücksichtigt (vgl. 3 (b)).

$$\begin{aligned} B^{(ki)} &= A^{(li)}, & B^{(lk)} &= A^{(ik)}, & B^{(il)} &= A^{(kl)} \\ B^{(ik)} &= A^{(lk)}, & B^{(kl)} &= A^{(il)}, & B^{(li)} &= A^{(ki)} \end{aligned} \quad (7)$$

Sie bedeuten geometrisch folgendes:

Satz: Im dreifachen Orthogonalsystem ist die Hauptkrümmung einer beliebig herausgegriffenen Parameterfläche längs jeder ihrer Krümmungslinien gleich der geodätischen Krümmung dieser Kurve in jener andern eindeutig bestimmten Parameterfläche, der sie noch angehört.

Jetzt brauchen wir nur noch (7) in (3) und (5) einzusetzen und erhalten endgültig:

$$\begin{aligned} x_{ii} &= * A^{(ki)} x_f + A^{(li)} x_l, \quad ^9) \quad ^{10)} \\ x_{if} &= * - A^{(ik)} x_f \quad * , \\ x_{lf} &= * - A^{(lk)} x_f \quad * . \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} A_f^{(ki)} + A_i^{(ik)} - A^{(ki)2} - A^{(ik)2} &= A^{(li)} A^{(lk)} = K^{(l)}, \\ A_i^{(lk)} &= A^{(ik)} (A^{(lk)} - A^{(li)}), \quad A_f^{(li)} = A^{(ki)} (A^{(li)} - A^{(lk)}). \end{aligned} \quad (8a)$$

Die Analyse von (8) übersteigt den Rahmen meiner Arbeit, weshalb sie unterbleibt.

Der große Vorteil der invarianten Gleichungen besteht darin, daß man zwanglos zu speziellen Flächen, etwa Minimalflächen, übergehen kann.

(Eingegangen den 7. Dezember 1942.)

⁹⁾ x_{ff} , x_{fl} und x_{ll} werden aus (8) durch zyklische Vertauschung erzeugt.

¹⁰⁾ Für gewisse Probleme wird man besser die geodätischen Krümmungen verwenden, wobei natürlich (7) berücksichtigt werden muß.