Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 15 (1942-1943)

Artikel: Sur les conditions de validité d'une classe de relations entre les expressions différentielles linéaires.

Autor: Ostrowski, Alexandre

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14891

Sur les conditions de validité d'une classe de relations entre les expressions différentielles linéaires

Par Alexandre Ostrowski, Bâle

§ 1. Introduction

1. Il s'agit dans ce mémoire d'une classe de relations auxquelles conduit surtout la formation des „conditions d'intégrabilité" dans la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles.

Si l'on pose par exemple

$$X(z) = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \frac{\partial z}{\partial x_\nu}\,, \quad Y(z) = \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu \frac{\partial z}{\partial x_\nu}\,, \tag{1}$$

on a

$$X(Y(z)) - Y(X(z)) = Z(z) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} (X(B_\nu) - Y(A_\nu)) \frac{\partial z}{\partial x_\nu}\,, \tag{2}$$

où, comme on voit, les dérivées secondes se détruisent. Pour que ceci soit possible, il paraît au premier abord indispensable que ces dérivées secondes existent. Or, on sait depuis quelques années[1]) que la relation (2) subsiste, même si z ne possède que les dérivées continues du premier ordre, pourvu que les expressions (1) soient douées, elles aussi, des dérivées continues du premier ordre.

Les questions analogues se présentent dans beaucoup d'autres cas, et nous allons traiter, dans ce qui suit, une classe très étendue de relations de cette sorte.

---

[1]) Cf. *E. Schmidt,* Bemerkungen zum Fundamentalsatz der Theorie der Systeme linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Wiener Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 48 (1940), pp. 426—432. — *O. Perron,* Das Verschwinden der Klammersymbole in der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungssysteme. Math. Annalen, Bd. 117 (1940/41), pp. 687—693. — *P. Gillis,* Bull. Soc. R. Sc. Liège (1940), pp. 197—212. — *A. Ostrowski,* Sur un théorème fondamental de la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles. Com. Math. Helv., vol. 15 (1943), pp. 217—221.

2. Nous considérons une relation de la forme

$$\sum_{\kappa=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n} Q_{\kappa\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\mu=1}^{n} A_{\nu\mu}^{(\lambda\kappa)} \frac{\partial z_\lambda}{\partial x_\mu} = \sum_{\kappa=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\mu=1}^{n} Q_{\kappa\nu} \frac{\partial A_{\nu\mu}^{(\lambda\kappa)}}{\partial x_\nu} \frac{\partial z_\lambda}{\partial x_\mu} . \tag{3}$$

Pour que cette relation soit possible, c'est-à-dire pour que les dérivées secondes, si elles existent, s'y détruisent, il est nécessaire qu'on ait

$$\sum_{\kappa=1}^{k} Q_{\kappa\nu} A_{\nu\mu}^{(\lambda\kappa)} = - \sum_{\kappa=1}^{k} Q_{\kappa\mu} A_{\mu\nu}^{(\lambda\kappa)} \; ; \; \mu \, , \, \nu = 1 \, , \ldots , n \; ; \; \lambda = 1 \, , \ldots , l \; . \tag{4}$$

De l'autre côté, on peut former l'expression de gauche en (3) dès que les expressions

$$\sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\mu=1}^{n} A_{\nu\mu}^{(\lambda\kappa)} \frac{\partial z_\lambda}{\partial x_\mu} \, , \quad \nu = 1 \, , \ldots , n \, , \quad \kappa = 1 \, , \ldots , k \, , \tag{5}$$

sont dérivables par rapport aux variables x_ν correspondantes.

De même, on peut former les expressions de droite en (3), dès que les $A_{\nu\mu}^{(\lambda\kappa)}$ sont dérivables.

Toutefois il est clair que ces conditions de dérivabilité ne suffisent pas, à elles seules, pour assurer la validité de (3). En effet, la relation (3) comprend comme un cas spécial la relation

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right) = 0 \, , \tag{6}$$

et l'on sait que l'existence des dérivées qui y figurent n'est pas encore suffisante pour que (6) soit exacte.

3. Si l'on veut se borner aux conditions pour la validité de (6) dans lesquelles l'existence des dérivées secondes n'est supposée que dans le point considéré et pas dans un voisinage de ce point, on connaît deux systèmes de conditions, assurant la validité de (6) dans un point P_0.

Le premier de ces systèmes, dû à M. *W. H. Young* [2]), exige que les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial z}{\partial x_2}$ existent au voisinage de P_0 et possèdent au point P_0 des *différentielles totales*.

---

[2]) Cf. par exemple: *De la Vallée Poussin*, Cours d'Analyse infinitésimale, t. 1, 3me éd. (1914), pp. 140—146. — *E. W. Hobson*, The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier Series, vol. 1, 3rd ed. (1927), p. 427. — *O. Haupt* und *G. Aumann*, Differential- und Integralrechnung, Bd. 2 (1938), pp. 111—125.

Rappelons qu'on dit qu'*une fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ possède une différentielle totale au point $P_0(a_1, \ldots, a_n)$, si l'on a*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(a_1, \ldots, a_n) + \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu (x_\nu - a_\nu) + o(r) ,$$
$$r = \sum_{\nu=1}^{n} | x_\nu - a_\nu | \to 0 , \tag{7}$$

où les constantes α_ν sont les dérivées partielles f'_{x_ν} de f en P_0.

4. Dans une communication parue récemment dans ce recueil[3]), nous avons introduit un autre système de conditions pour la validité de (6), utilisant la notion d'une *dérivée uniforme dans un point.*

Nous disons que f soit *dérivable par rapport à x_1, uniformément en* $P_0(a_1, \ldots, a_n)$, si l'expression

$$\frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, x_2, \ldots, x_n)}{x_1 - a_1} \tag{8}$$

tend vers une limite déterminée $f'_{x_1}(a_1, \ldots, a_n)$ avec

$$(x_1 - a_1) \to 0 , \ | x_\nu - a_\nu | \leqq | x_1 - a_1 | , \ \nu = 2, \ldots, n ; \tag{9}$$

et l'on obtient la définition de la dérivabilité par rapport à x_ν, uniformément en P_0, en permutant x_1 et x_ν.

En employant cette notion, nous avons démontré la relation (6) en P_0 sous les conditions que $\frac{\partial z}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial z}{\partial x_2}$ existent au voisinage de P_0 et sont dérivables en P_0, la première par rapport à x_2 et la seconde par rapport à x_1, toutes les deux uniformément en P_0.

Ce résultat contient le théorème de M. *Young*. Ceci résulte du fait, démontré dans la note citée que *la condition nécessaire et suffisante pour que f possède une différentielle totale en $P_0(a_1, \ldots, a_n)$ est que f soit dérivable par rapport à chacune des variables $x_1, \ldots, x_n$, uniformément en P_0.*

Rappelons enfin que nous avons montré dans la note citée sur un exemple que la relation (6) n'est plus assurée, si l'on définit la dérivabilité uniforme en exigeant seulement que l'expression (8) tend vers f'_{x_1} pour

$$(x_1 - a_1) \to 0, | x_\nu - a_\nu | \leqq | x_1 - a_1 | (1 - \varepsilon), \nu = 2, \ldots, n, \tag{10}$$

pour un ε fixe et positif.

---

[3]) *A. Ostrowski,* Note sur l'interversion des dérivations et les différentielles totales. Com. Math. Helv., vol. 15 (1943), pp. 222—226.

5. En utilisant ces notions, on peut énoncer notre résultat principal comme il suit:

Théorème I. Soient $A^{(\lambda\kappa)}_{\nu\mu}$; $\nu, \mu = 1, \ldots, n$; $\lambda = 1, \ldots, l$; $\kappa = 1, \ldots, k$, lkn^2 *fonctions définies au voisinage d'un point* $P_0(a_1, \ldots, a_n)$, *continues en* P_0 *et douées au point* P_0 *des différentielles totales.*

Soient $Q_{\kappa\nu}$; $\kappa = 1, \ldots, k$; $\nu = 1, \ldots, n$, nk *fonctions des* $x_1, \ldots, x_n$, *finies en* P_0 *et telles que les relations* (4) *soient satisfaites en* P_0.

Alors la relation (3) *a lieu en* P_0, *si les* z_λ *sont des fonctions des* $x_1, \ldots, x_n$, *continues et possédant des dérivées partielles du premier ordre au voisinage de* P_0 *et telles que leurs dérivées partielles du premier ordre soient continues en* P_0 *et, pour chaque* ν, $\nu = 1, \ldots, n$, *les expressions* (5) *correspondant à l'indice* ν *soient dérivables par rapport à* x_ν, *uniformément en* P_0.

Un exemple d'une relation du type (3) est la relation suivante:

$$\frac{\partial}{\partial x} \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \frac{\partial v_\nu}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \frac{\partial v_\nu}{\partial x} = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial u_\nu}{\partial x} \frac{\partial v_\nu}{\partial y} - \frac{\partial v_\nu}{\partial x} \frac{\partial u_\nu}{\partial y} \right) \tag{11}$$

qui joue un rôle fondamental dans la théorie des transformations de contact [4]).

6. Dans la démonstration du théorème I on peut évidemment supposer que les $Q_{\kappa\nu}$ soient des constantes. Dans le cas où les fonctions $A^{(\lambda\kappa)}_{\nu\mu}$ sont des constantes, elles aussi, les relations (4) se réduisent aux relations

$$\alpha^{(\lambda)}_{\nu\mu} = -\alpha^{(\lambda)}_{\mu\nu} \;;\; \nu, \mu = 1, \ldots, n \;;\; \lambda = 1, \ldots, l \;, \tag{12}$$

en posant

$$\alpha^{(\lambda)}_{\nu\mu} = \sum_{\kappa=1}^{k} Q_{\kappa\nu} A^{(\lambda\kappa)}_{\nu\mu} \;, \tag{13}$$

tandis que (3) devient

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^{(\lambda)}_{\nu\mu} \frac{\partial z_\lambda}{\partial x_\mu} = 0 \;. \tag{14}$$

Dans notre démonstration le cas général sera réduit au cas spécial où les $A^{(\lambda\kappa)}_{\nu\mu}$ sont des constantes, c'est-à-dire, d'après ce que nous venons de dire, au

Théorème II. Soient $\alpha^{(\lambda)}_{\nu\mu}$; $\nu, \mu = 1, \ldots, n$; $\lambda = 1, \ldots, l$, l *systèmes de constantes, d'ordre* n, *alternés, c'est-à-dire satisfaisant à* (12).

---

[4]) C'est la discussion de la relation (11) qui a été le point de départ de nos recherches, commencées lors de 1936, encore avant la publication de la note citée de M. *Schmidt*.

Soient z_λ des fonctions des $x_1, \ldots, x_n$, continues et possédant des dérivées du premier ordre au voisinage d'un point P_0 et telles que leurs dérivées partielles du premier ordre soient continues en P_0 et les n expressions

$$s_\nu \equiv \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_{\nu\mu}^{(\lambda)} \frac{\partial z_\lambda}{\partial x_\mu}, \quad \nu = 1, \ldots, n, \tag{15}$$

soient dérivables, chaque s_ν par rapport à x_ν, uniformément en P_0. Alors on a la relation (14) *au point P_0.*

7. Notre démonstration du théorème II utilise l'approximation de fonctions continues par les intégrales singulières

$$A_\beta(f) = \int_E f K_\beta \, d\tau$$

pour $\beta \to \infty$. On peut former les noyaux K_β de telles intégrales singulières pour l'espace à n dimensions, en formant les produits de noyaux des intégrales singulières à une variable. Toutefois la difficulté dans notre cas consiste surtout en le choix de l'intégrale singulière de sorte qu'une dérivée partielle de $A_\beta(f)$ tende vers la dérivée correspondante de f, là où cette dérivée existe:

$$\lim_{\beta \to \infty} \frac{\partial A_\beta(f)}{\partial x_\nu} = f'_{x_\nu}. \tag{16}$$

Dans le cas d'une variable, la plupart des intégrales singulières qu'on emploie dans l'analyse possède la propriété analogue.

Il en est tout à fait différent dans le cas de plusieurs variables. Tout d'abord on voit facilement qu'on ne peut s'attendre que (16) soit valable sans conditions additionnelles puisqu'on en pourrait déduire par la méthode du § 5 la relation (6). On ne peut même pas déduire la relation (16), si la dérivée f'_{x_ν} est la limite de l'expression (8) dans les conditions (10).

De l'autre côté, il est en effet possible de trouver une intégrale singulière pour laquelle la relation (16) a lieu dès que f'_{x_ν} existe, uniformément au point considéré, au sens de notre définition du numéro 4.

Toutefois, les produits des noyaux d'intégrales singulières à une variable qu'on a considérées jusqu'aujourd'hui[5]) paraissent de ne pas posséder cette propriété.

[5]) Ce sont, d'après la classification de *H. Hahn*, Über die Darstellung gegebener Funktionen durch singuläre Integrale, Denkschriften der Wiener Akademie, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, Bd. 93 (1917), pp. 585—692, les noyaux du type de *Stieltjes*, $C_\beta[\varphi(x-\xi)]^\beta$, du type de *Poisson*, $\dfrac{C_\beta}{1+\beta\,\varphi(x-\xi)}$, et du type de *Weierstrass*, $C_\beta\,\varphi[\beta(x-\xi)]$. Cf. l. c., pp. 623—655.

C'est l'intégrale de la forme

$$A_\beta(f) = A_\beta \int_E f(x_1, \ldots, x_n)\, e^{-\sum_{\nu=1}^{n} [\beta(x_\nu - \xi_\nu)]^\beta} d\tau \,, \qquad (17)$$

dont nous nous servons dans la démonstration du théorème II. Les calculs, conduisant à la démonstration de la relation (16) pour l'intégrale (17) (théorème III au § 4), sont un peu longs sans être très difficiles. Il est donc d'intérêt de remarquer que, si l'on remplace dans les théorèmes I et II la condition de la dérivabilité uniforme des expressions (5) et (15) par la condition que ces expressions possèdent des différentielles totales au point considéré, on peut se servir d'une intégrale singulière plus simple, par exemple de celle de *Weierstrass*

$$A_\beta \int_E f(x_1, \ldots, x_n)\, e^{-\beta^2 \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu - \xi_\nu)^2} d\tau$$

pour laquelle la relation (16) est valable dès que f possède une differentielle totale au point considéré[6]).

8. Nous déduisons au § 2 le théorème I du théorème II. Au § 3 sont évaluées quelques intégrales dont nous nous servons au § 4 pour étudier les propriétés de l'intégrale (17). Dans cette étude nous sommes allés un peu plus loin qu'il n'était nécessaire pour notre but immédiat. Les lecteurs qui ne s'intéressent qu'aux théorèmes I et II pourraient se borner dans les démonstrations des lemmes V—VIII aux cas $q \leqq 1, p \leqq 1$, $q_1 + \cdots + q_n \leqq 1, p_1 + \cdots + p_n \leqq 1$. De même, il suffit de définir la propriété Ω du numéro 19, en se rapportant aux dérivées partielles du premier ordre seulement, et on peut se dispenser des lemmes XV et XVIII.

D'ailleurs ces types ont déjà été considérés plus ou moins explicitement par *H. Lebesgue*, dans son mémoire classique: Sur les intégrales singulières, Annales de la faculté des sciences de l'Université de Toulouse (3), t. 1 (1909), pp. 25—117.

Il y a lieu de citer ici le mémoire de M. *Th. Radakovič*, Über die Interpolation von Funktionen mehrerer Veränderlicher, Sitzungsberichte der Wiener Akademie, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, Abt. IIa, Bd. 136 (1927), pp. 87—113, dans lequel la relation (16) est étudiée pour le cas d'une dérivée continue au voisinage du point considéré.

[6]) D'ailleurs, l'intégrale singulière de *Stieltjes-Landau-De la Vallée Poussin-Tonelli* possède, comme l'a montré M. *Aumann*, la même propriété. Cf. *O. Haupt* und *G. Aumann* l. c. Bd. 3, p. 164.

§ 2. Réduction du théorème I au théorème II

9. Nos considérations utilisent essentiellement le lemme[7]) suivant:

Lemme I. Si $f(x_1, \ldots, x_n)$ *s'annule en* $P_0(0, \ldots, 0)$ *et y possède une différentielle totale, et si* $g(x_1, \ldots, x_n)$ *est une fonction continue en* P_0, fg *possède une différentielle totale en* P_0, *et l'on a*

$$\left(\frac{\partial(fg)}{\partial x_\nu}\right)_{P_0} = g_0 \left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\right)_{P_0}, \quad g_0 = g(0, \ldots, 0) \ . \tag{18}$$

En effet, en posant

$$g(x_1, \ldots, x_n) = g_0 + \delta(x_1, \ldots, x_n) \ ,$$

où $\delta(x_1, \ldots, x_n) \to 0$ avec $r = \sum_{\nu=1}^{n} | x_\nu |$, on obtient, en multipliant (7) par g et en y posant $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$:

$$fg = \sum_{\nu=1}^{n} g_0 \, \alpha_\nu \, x_\nu + o(r) \ .$$

Dans ce qui suit, nous désignerons généralement la valeur d'une fonction $D(x_1, \ldots, x_n)$ au point P_0 par le symbol $[D(x_1, \ldots, x_n)]_0$.

10. Posons

$$A_{\nu\mu}^{(\lambda\kappa)} = A_{\nu\mu}^{*(\lambda\kappa)} + [A_{\nu\mu}^{(\lambda\kappa)}]_0 \tag{19}$$

où les expressions $A_{\nu\mu}^{*(\lambda\kappa)}$ s'annulent en P_0 et y possèdent des différentielles totales. Il résulte donc du lemme I que les expressions

$$\sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\mu=1}^{n} A_{\nu\mu}^{*(\lambda\kappa)} \frac{\partial z_\lambda}{\partial x_\mu} \tag{20}$$

possèdent en P_0 des différentielles totales et qu'en particulier on a dans ce point

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\mu=1}^{n} A_{\nu\mu}^{*(\lambda\kappa)} \frac{\partial z_\lambda}{\partial x_\mu} = \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial z_\lambda}{\partial x_\mu} \frac{\partial A_{\nu\mu}^{*(\lambda\kappa)}}{\partial x_\nu} \ , \tag{21}$$

la dérivabilité étant uniforme en P_0.

Or, on a évidemment par (19)

$$\left[\frac{\partial A_{\nu\mu}^{*(\lambda\kappa)}}{\partial x_\nu}\right]_0 = \left[\frac{\partial A_{\nu\mu}^{(\lambda\kappa)}}{\partial x_\nu}\right]_0 .$$

[7]) Cf. notre communication, citée dans la note [1]).

Donc, on peut écrire (21)

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\mu=1}^{n} A_{\nu\mu}^{*(\lambda\kappa)} \frac{\partial z_\lambda}{\partial x_\mu} = \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial z_\lambda}{\partial x_\mu} \frac{\partial A_{\nu\mu}^{(\lambda\kappa)}}{\partial x_\nu} .$$

En multipliant par $Q_{\kappa\nu}$ et en sommant par rapport à κ et ν, on obtient

$$\sum_{\kappa=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n} Q_{\kappa\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \sum_{\lambda=1} \sum_{\mu=1}^{n} A^*{}_{\nu\mu}^{(\lambda\kappa)} \frac{\partial z_\lambda}{\partial x_\mu} = \sum_{\mu=1}^{n} \left[\sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\kappa=1}^{k} Q_{\kappa\nu} \frac{\partial A_{\nu\mu}^{(\lambda\kappa)}}{\partial x_\nu} \right] \frac{\partial z_\lambda}{\partial x_\mu} . \tag{22}$$

11. De l'autre côté, il résulte de (19)

$$\sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\mu=1}^{n} \left[A_{\nu\mu}^{(\lambda\kappa)} \right]_0 \frac{\partial z_\lambda}{\partial x_\mu} = \sum_{\lambda=1} \sum_{\mu=1}^{n} A_{\nu\mu}^{(\lambda\kappa)} \frac{\partial z_\lambda}{\partial x_\mu} - \sum_{\lambda=1} \sum_{\mu=1}^{n} A_{\nu\mu}^{*(\lambda\kappa)} \frac{\partial z_\lambda}{\partial x_\mu} ,$$

donc, puisque les deux expressions de droite sont dérivables par rapport à x_ν, uniformément en P_0 — la première par l'hypothèse du théorème, la seconde d'après la conclusion que nous avons tirée du lemme I — il en est de même de l'expression de gauche. C'est-à-dire, que si l'on remplace dans l'expression de gauche en (3) les coefficients $A_{\nu\mu}^{(\lambda\kappa)}$ par leurs valeurs en P_0, l'hypothèse de ce théorème, portant sur les expressions (5), reste valable. On a donc affaire au cas qui se réduit directement au théorème II. Il en résulte qu'au point P_0

$$\sum_{\kappa=1}^{k} \sum_{\nu=1}^{n} Q_{\kappa\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\mu=1}^{n} \left[A_{\nu\mu}^{(\lambda\kappa)} \right]_0 \frac{\partial z_\lambda}{\partial x_\mu} = 0 . \tag{23}$$

En ajoutant les équations (22) et (23) terme à terme, on obtient (3), et le théorème I est démontré.

§ 3. Evaluation de quelques intégrales

12. Dans ce qui suit, β sera un entier *pair* et positif tendant vers ∞, et les signes de limite se rapportent toujours à $\beta \to \infty$.

Lemme II. On a pour $m > 0$, $k > 0$

$$\int_0^\infty e^{-kx^m} dx = \frac{1}{\sqrt[m]{k}} \frac{1}{m} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) . \tag{24}$$

En effet, en posant $x = \left(\frac{t}{k}\right)^{\frac{1}{m}}$, l'intégrale en (24) devient

$$\frac{1}{m\sqrt[m]{k}} \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\frac{1}{m}-1} dt \ .$$

Lemme III. On a

$$\frac{1}{\beta}\, \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) \to 1 \ . \tag{25}$$

Il suffit de poser $t = \frac{1}{\beta}$ dans la relation $z\,\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$. Alors (25) résulte de $\Gamma(1) = 1$.

13. Posons

$$k_\beta(x) = e^{-\beta^\beta x^\beta} \ , \ K_\beta(x_1, \ldots, x_n) = k_\beta(x_1) \ldots k_\beta(x_n) \ ,$$
$$\lambda_\beta = \int_{-\infty}^{\infty} k_\beta(x)\, dx \ , \quad \Lambda_\beta = \lambda_\beta^{-n} \ . \tag{26}$$

Les fonctions k_β et K_β sont évidemment paires, β ne parcourant que la suite des entiers pairs.

Lemme IV. On a

$$\lambda_\beta = \frac{2}{\beta^2}\, \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) \sim \frac{2}{\beta} \ , \quad \Lambda_\beta = \left[\frac{2}{\beta^2}\, \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\right]^{-n} \sim \frac{\beta^n}{2^n} \ . \tag{27}$$

En effet, on a pour l'intégrale en (26) par les lemmes II et III

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^\beta x^\beta} dx = \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^\beta} dx = \frac{2}{\beta}\, \frac{1}{\beta}\, \Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) \sim \frac{2}{\beta} \ .$$

Nous désignerons l'espace des $x_1, \ldots, x_n$ par E et le produit des différentielles $dx_1 \cdots dx_n$ par $d\tau$, de sorte qu'une intégrale n-ple, étendue sur un domaine E' dans l'espace E, sera désignée par $\int_{E'} \cdots d\tau$.

On a par exemple en vertu des définitions (26)

$$\Lambda_\beta \int_E K_\beta \, d\tau = 1 \ .$$

14. *Lemme V. Pour un entier fixe* $q \geqq 1$ *on a*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^q}{dx^q} k_\beta(x) \right| dx \leqq C(q)\, \beta^{2q-2} . \tag{28}$$

En effet, en introduisant βx comme nouvelle variable d'intégration, (28) devient

$$\beta^{q-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^q}{dx^q} e^{-x^\beta} \right| dx . \tag{29}$$

Ici la dérivée sous le signe d'intégration est la somme d'un nombre fini de termes de la forme

$$c\, x^{a\beta} \frac{\beta - \alpha_1}{x} \cdots \frac{\beta - \alpha_q}{x} e^{-x^\beta} \tag{30}$$

où c est une constante, a un entier *positif* $\leqq q$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ des entiers non négatifs.

Donc l'expression (29) est majorée par

$$\beta^{q-1} \sum_{a=1}^{q} \gamma_a \int_{-\infty}^{\infty} \beta^q x^{a\beta - q} e^{-x^\beta} dx \tag{31}$$

avec des constantes positives γ_1 qui ne dépendent que de q. Or, ici l'intégrale correspondant à une valeur quelconque de a est

$$= \beta^{q-1} \int_{-\infty}^{\infty} t^{a - \frac{q}{\beta} + \frac{1}{\beta} - 1} e^{-t} dt .$$

Elle est donc $\sim 2\Gamma(a)\beta^{q-1}$, et (31) est majorée par $C(q)\beta^{2q-2}$. Le lemme V est démontré.

15. *Lemme VI. Soient* ε *un nombre fixe et positif,* p, q *deux entiers fixes non négatifs. Alors on a, à partir d'un* β :

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} x^p \left| \frac{d^q}{dx^q} k_\beta(x) \right| dx < C(p, q)\, \beta^{2q} e^{-\frac{1}{2}(\varepsilon\beta)^\beta} . \tag{32}$$

En effet, pour $q \geqq 1$, en introduisant βx comme nouvelle variable d'intégration, l'intégrale de (32) devient

$$\beta^{q-p-1} \int_{\varepsilon\beta}^{\infty} x^p \left| \frac{d^q}{dx^q} e^{-x^\beta} \right| dx \ ,$$

et ceci est majoré par une somme de la forme

$$\beta^{q-p-1} \sum_{a=1}^{q} \gamma_a \int_{\varepsilon\beta}^{\infty} \beta^q \, x^{a\beta+p-q} \, e^{-x^\beta} dx$$

où les γ_a sont les mêmes constantes que dans la majorante (31) de (29).

Or, pour $\beta > \dfrac{1}{\varepsilon}$, $\beta > p$, ceci est majoré par

$$\beta^{2q-p-1} \, C_1 \int_{\varepsilon\beta}^{\infty} x^{q\beta} \, x^{\beta-1} \, e^{-x^\beta} dx \ ,$$

où C_1 ne dépend que de q. Cette dernière expression devient, en introduisant x^β comme nouvelle variable d'intégration:

$$C_1 \, \beta^{2q-p-2} \int_{(\beta\varepsilon)^\beta}^{\infty} x^q \, e^{-x} \, dx < C_1 \, \beta^{2q} \, e^{-\frac{1}{2}(\beta\varepsilon)^\beta} \int_0^{\infty} x^q \, e^{-\frac{x}{2}} \, dx = C(q) \, \beta^{2q} \, e^{-\frac{1}{2}(\varepsilon\beta)^\beta} .$$

Et quant au cas $q = 0$, on a, en introduisant $t = (\beta x)^\beta$ comme nouvelle variable d'intégration, pour $\beta > \dfrac{2}{\varepsilon}$, $\beta > p + 1$:

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} x^p \, e^{-(\beta x)^\beta} \, dx = \frac{1}{\beta^{p+2}} \int_{(\varepsilon\beta)^\beta}^{\infty} t^{\frac{p+1}{\beta} - 1} \, e^{-t} \, dt <$$

$$< \frac{1}{\beta^{p+2}} \, e^{-\frac{1}{2}(\varepsilon\beta)^\beta} \int_2^{\infty} t^{\frac{p+1}{\beta} - 1} \, e^{-\frac{t}{2}} \, dt < 2 \, e^{-\frac{1}{2}(\varepsilon\beta)^\beta} ,$$

et le lemme VI est démontré.

16. *Lemme VII. Soient ε un nombre positif fixe, $p_1, \ldots, p_n ; q_1, \ldots, q_n$ des entiers non négatifs. Alors on a*

$$A_\beta \int_{\varepsilon}^{\infty} \cdots \int_{\varepsilon}^{\infty} x_1^{p_1} \ldots x_n^{p_n} \left| \frac{\partial^{q_1+\cdots+q_n}}{\partial x_1^{q_1} \ldots \partial x_n^{q_n}} K_\beta(x_1, \ldots, x_n) \right| d\tau \to 0 \ . \qquad (33)$$

En effet, l'expression de gauche en (33) est

$$\prod_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\lambda_\beta} \int_{\varepsilon}^{\infty} x^{p_\nu} \left| \frac{d^{q_\nu}}{dx^{q_\nu}} k_\beta(x) \right| dx ,$$

et, par le lemme VI, chacun des facteurs de ce produit tend vers 0 avec $\beta \to \infty$.

Lemme VIII. Soit $\delta > 0, q_1, \ldots, q_n$ des entiers fixes non négatifs. Alors l'expression

$$\Lambda_\beta \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^{q_1+\cdots+q_n}}{\partial x_1^{q_1} \ldots \partial x_n^{q_n}} K_\beta(\xi, x_2, \ldots, x_n) \right| dx_2 \ldots dx_n \qquad (34)$$

converge vers 0 *uniformément pour* $|\xi| \geqq \delta$.

En effet, l'expression (34) peut être écrite dans la forme

$$\frac{1}{\lambda_\beta} \left| \frac{d^{q_1} k_\beta(\xi)}{d\xi^{q_1}} \right| \prod_{\nu=2}^{n} \frac{1}{\lambda_\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^{q_\nu} k_\beta(x)}{dx^{q_\nu}} \right| dx \qquad (35)$$

et ceci est par les lemmes IV et V

$$\leqq C \beta^{1+2q_2+\cdots+2q_n} \left| \frac{d^{q_1}}{d\xi^{q_1}} e^{-(\beta\xi)^\beta} \right| = C \beta^{1+q_1+2q_2+\cdots+2q_n} \left| \frac{d^{q_1} e^{-x^\beta}}{dx^{q_1}} \right|_{x=\beta\xi} .$$

Or, ici la dérivée consiste en un nombre fini de termes de la forme (30), il est donc clair que (35) converge vers 0 avec $\beta \to \infty$, uniformément pour $|\xi| \geqq \delta$.

Remarque. Il est évident que le lemme VIII reste en vigueur, si l'on permute en (34) x_1 avec x_ν, c'est-à-dire si les variables d'intégration sont $x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots, x_n$ et $x_\nu = \xi, |\xi| \geqq \delta$.

17. Lemme IX. On a

$$\frac{1}{\lambda_\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \left| x \frac{dk_\beta(x)}{dx} \right| dx \to 1 . \qquad (36)$$

En effet, l'expression de gauche en (36) devient, en introduisant $(\beta x)^\beta = t$ comme nouvelle variable d'intégration, par le lemme IV.

$$\frac{2}{\lambda_\beta} \int_0^\infty x^\beta \beta^{\beta+1} e^{-(\beta x)^\beta} dx = \frac{2}{\beta\lambda_\beta} \int_0^\infty t^{\frac{1}{\beta}} e^{-t} dt = \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)}{\beta\lambda_\beta} \to 1 .$$

Lemme X. On a

$$\frac{1}{\lambda_\beta^2}\int_0^\infty k_\beta(y)\int_0^y \left|\frac{dk_\beta(x)}{dx}\right| dx\, dy \to \frac{1}{4}\, lg\, 2 \ . \tag{37}$$

En effet, l'expression de gauche en (37) devient, en introduisant $(\beta x)^\beta = t$ comme nouvelle variable d'intégration,

$$\frac{1}{\lambda_\beta^2}\int_0^\infty e^{-\beta^\beta y^\beta}\int_0^y \beta^{\beta+1} x^{\beta-1} e^{-\beta^\beta x^\beta}\, dx\, dy = \frac{1}{\lambda_\beta^2}\int_0^\infty e^{-\beta^\beta y^\beta}\int_0^{(\beta y)^\beta} e^{-t}\, dt\, dy \ .$$

Ceci devient, en évaluant la seconde intégrale et en introduisant βy comme nouvelle variable d'intégration, d'après les lemmes II et IV

$$\frac{1}{\beta\lambda_\beta^2}\int_0^\infty e^{-y^\beta}(1-e^{-y^\beta})\, dy = \frac{\beta^3}{4\,\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)^2}\left[\frac{1}{\beta}\,\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right) - \frac{1}{\beta 2^{\frac{1}{\beta}}}\,\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\right] =$$

$$= \frac{\beta^2}{4\,\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right]$$

et ceci converge par le lemme III vers $\frac{1}{4}$ lg 2.

18. Dans ce qui, suit nous désignons pour un κ, choisi parmi les nombres $2, 3, \ldots, n$, par $E^{(\kappa)}$ l'ensemble des points de E dans lesquels $|x_1| \leqq |x_\kappa|$. De l'autre côté, nous désignons par W^* l'ensemble des points de E dans lesquels on a

$$|x_\nu| \leqq |x_1|\,, \quad \nu = 2, \ldots, n \ .$$

Alors, en désignant par

$$E^* = E - W^*$$

l'ensemble de tout les points de E, extérieurs à W^*, il est clair que chaque point de E^* est contenu dans un, au moins, des ensembles $E^{(2)}, \ldots, E^{(\kappa)}$:

$$E^* \prec \sum_{\kappa=2}^{n} E^{(\kappa)} \ . \tag{38}$$

Lemme XI. On a

$$\Lambda_\beta \int_{W^*} \left| x_1 \frac{\partial K_\beta}{\partial x_1}\right| d\tau \leqq \Lambda_\beta \int_E \left| x_1 \frac{\partial K_\beta}{\partial x_1}\right| d\tau \to 1 \ . \tag{39}$$

En effet, on a par le lemme IX et par (26)

$$\Lambda_\beta \int_E \left| x_1 \frac{\partial K_\beta}{\partial x_1} \right| d\tau = \frac{1}{\lambda_\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \left| x \frac{dk_\beta(x)}{dx} \right| dx \left[\frac{1}{\lambda_\beta} \int_{-\infty}^{\infty} k_\beta(x)\, dx \right]^{n-1} \to 1 \, .$$

Lemme XII. On a

$$\Lambda_\beta \int_{E^{(\kappa)}} \left| \frac{\partial K_\beta}{\partial x_1} \right| d\tau \to \lg 2 \, , \quad \kappa = 2, \ldots, n \, . \tag{40}$$

En effet, en désignant x_1 par x et x_κ par y, l'expression de gauche en (40) est par le lemme X

$$\frac{4}{\lambda_\beta^2} \int_0^\infty k_\beta(y) \int_0^y \left| \frac{\partial k_\beta(x)}{\partial x} \right| dx\, dy \left[\frac{1}{\lambda_\beta} \int_{-\infty}^{\infty} k_\beta(x)\, dx \right]^{n-2} \to \lg 2 \, .$$

Lemme XIII. On a

$$\overline{\lim}\, \Lambda_\beta \int_{E^*} \left| \frac{\partial K_\beta}{\partial x_1} \right| d\tau \leqq (n-1) \lg 2 \, . \tag{41}$$

Ceci résulte immédiatement de (38) et du lemme XII.

§ 4. Discussion de l'intégrale singulière $\int_E f K_\beta\, d\tau$

19. Soit $f(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction mesurable et uniformément bornée[8]) en E :

$$|f| \leqq B \, . \tag{42}$$

Formons l'expression

$$\Lambda_\beta(f) = \Lambda_\beta \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\; K_\beta(x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n)\, d\tau \, . \tag{43}$$

Cette expression est une fonction des $\xi_1, \ldots, \xi_n$, définie dans tout l'espace E.

Dans ce qui suit, nous dirons qu'une suite de fonctions $Q_\beta(x_1, \ldots, x_n)$ jouit de la propriété Ω dans un domaine ouvert Δ, si les fonctions Q_β possèdent des dérivées partielles de tout ordre en Δ et si chacune des suites

---

[8]) Les résultats de cette section restent d'ailleurs en vigueur, si l'on suppose que l'intégrale $\int_E |f|\, e^{-\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|^N} d\tau$ converge pour un N suffisamment grand.

$$\frac{\partial^{q_1+\cdots+q_n}}{\partial x_1^{q_1}\ldots\partial x_n^{q_n}} Q_\beta \ , \ q_1,\ldots,q_n \geqq 0 \ ,$$

tend vers 0, uniformément dans un voisinage de chaque point de Δ.

Pour un $\varepsilon > 0$, nous désignons par W_ε le domaine $|x_\nu| < \varepsilon$, $\nu = 1,\ldots,n$, et par E_ε la partie de E, extérieure au domaine W_ε.

20. *Lemme XIV. L'expression*

$$A_\beta \int_{E_\varepsilon} f(x_1,\ldots,x_n)\ K_\beta(x_1-\xi_1,\ldots,x_n-\xi_n)\ d\tau \tag{44}$$

jouit de la propriété Ω dans le domaine $W_{\frac{\varepsilon}{2}}$.

En effet, la dérivée $\dfrac{\partial^{q_1+\cdots+q_n}}{\partial \xi_1^{q_1}\ldots\partial \xi_n^{q_n}}$ de (44) est évidemment majorée, pour une constante B, par

$$BA_\beta \int_{E_\beta} \left| \frac{\partial^{q_1+\cdots+q_n}}{\partial x_1^{q_1}\ldots\partial x_n^{q_n}} K_\beta(x_1-\xi_1,\ldots,x_n-\xi_n)\right| \varepsilon\, d\tau \ . \tag{45}$$

D'après les hypothèses du lemme, les modules des différences $|x_\nu - \xi_\nu|$ restent $\geqq \frac{\varepsilon}{2}$. Donc (45) est majoré par

$$BA_\beta \int_{E_{\frac{\varepsilon}{2}}} \left| \frac{\partial^{q_1+\cdots+q_n}}{\partial x_1^{q_1}\ldots\partial x_n^{q_n}} K_\beta(x_1,\ldots,x_n)\ d\tau \ ,\right.$$

et ceci tend, d'après le lemme VII, vers 0 avec $\beta \to \infty$. Le lemme XIV est démontré.

Il résulte évidemment du lemme XIV que le comportement infinitaire de $A_\beta(f)$ et de ses dérivées en $W_{\frac{\varepsilon}{2}}$ n'est point influencé, si l'on change d'une manière arbitraire les valeurs de f dans E_ε, tant que ces valeurs restent bornées en E.

21. *Lemme XV. Si $f(x_1,\ldots,x_n)$ est continue au point $P_0(a_1,\ldots,a_n)$, on a*

$$A_\beta(f) \to f(a_1,\ldots,a_n) \ ,$$

si le point $P_1(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ tend vers P_0.

On peut supposer $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. Si $f(0, \ldots, 0) = a$, on a évidemment

$$f = a + \varepsilon(x_1, \ldots, x_n) \ ,$$

où $\varepsilon(x_1, \ldots, x_n)$ tend vers 0, si le point $(x_1, \ldots, x_n)$ tend vers P_0. Alors on a d'après (26)

$$A_\beta(f) = A_\beta(a) + A_\beta(\varepsilon) = a + A_\beta(\varepsilon) \ ,$$

et nous n'avons qu'à démontrer que $A_\beta(\varepsilon) \to 0$.

Or, pour un $\eta > 0$, soit δ choisi de la sorte qu'en W_δ

$$| \varepsilon(x_1, \ldots, x_n) | \leqq \eta \ .$$

D'après le lemme XIV on a

$$A_\beta (\varepsilon) = A_\beta \int_{W_\delta} \varepsilon \, K_\beta \, d\tau + Q_{\beta|} = \vartheta_\beta \, \eta + Q_\beta \ ,$$

où les ϑ_β satisfont à la relation $| \vartheta_\beta | \leqq 1$, et la suite des fonctions Q_β jouit de la propriété Ω en $W_{\frac{\delta}{2}}$. Donc, pour tous les points $\xi_1, \ldots, \xi_n$, à l'intérieur de $W_{\frac{\delta}{2}}$, on a, à partir d'un β:

$$| A_\beta(\varepsilon) | \leqq 2\eta \ .$$

Donc, η étant arbitraire, le lemme XV est démontré.

22. *Lemme XVI. Supposons qu'une des dérivées partielles $f'_{x_{\nu_1}}$ est bornée en W_ε et sur la frontière de W_ε. Alors on a en $W_{\frac{\varepsilon}{2}}$*

$$\frac{\partial}{\partial \xi_{\nu_1}} A_\beta(f) = A_\beta(f'_{x_{\nu_1}}) + Q_\beta \ , \tag{46}$$

où la suite Q_β jouit de la propriété Ω en $W_{\frac{\varepsilon}{2}}$, si les valeurs de $f'_{x_{\nu_1}}$ dans E_ε sont remplacées par des valeurs quelquonques, mais telles que la fonction modifiée reste dans E mesurable et uniformément bornée.

Démonstration. On peut supposer que $x_{\nu_1} = x_1$. Alors on a

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} A_\beta(f) = - A_\beta \int_E f \frac{\partial}{\partial x_1} K_\beta(x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n) \, d\tau \ .$$

D'après le lemme XIV on peut remplacer ici le domaine d'intégration par W_ε, à condition d'ajouter une suite de fonctions jouissant de la propriété Ω dans $W_{\frac{\varepsilon}{2}}$. De l'autre côté on a

$$\Lambda_\beta \int_{W_\varepsilon} f \frac{\partial}{\partial x_1} K_\beta(x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n)\, d\tau =$$

$$= \Lambda_\beta \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\partial k_\beta(x_1 - \xi_1)}{\partial x_1} dx_1 \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \cdots \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x_1, \ldots, x_n) \prod_{\nu=2}^{n} k_\beta(x_\nu - \xi_\nu)\, dx_2 \ldots dx_n$$

et ceci devient, en intégrant par partie [9]) :

$$-\Lambda_\beta \int_{W_\varepsilon} f'_{x_1}(x_1, \ldots, x_n)\, K_\beta(x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n)\, d\tau - T_\beta + R_\beta \,, \qquad (47)$$

$$T_\beta = \Lambda_\beta k_\beta(-\varepsilon - \xi_1) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \cdots \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(-\varepsilon, x_2, \ldots, x_n) \prod_{\nu=2}^{n} k_\beta(x_\nu - \xi_\nu)\, dx_2 \ldots dx_n \,,$$

$$R_\beta = \Lambda_\beta k_\beta(+\varepsilon - \xi_1) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \cdots \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(+\varepsilon, x_2, \ldots, x_n) \prod_{\nu=2}^{n} k_\beta(x_\nu - \xi_\nu)\, dx_2 \ldots dx_n \,.$$

Or, le premier terme en (47), d'après le lemme XIV, ne diffère de $-\Lambda_\beta(f'_{x_1})$ que par une suite des fonctions, jouissant de la propriété Ω dans $W_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Quant aux expressions T_β et R_β, leurs dérivées

$$\frac{\partial^{q_2 + \cdots + q_n} T_\beta}{\partial \xi_2^{q_2} \ldots \partial \xi_n^{q_n}} \,, \quad \frac{\partial^{q_2 + \cdots + q_n} R_\beta}{\partial \xi_2^{q_2} \ldots \partial \xi_n^{q_n}}$$

sont évidemment majorées par

$$B \Lambda_\beta \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^{q_2 + \cdots + q_n}}{\partial x_2^{q_2} \ldots \partial x_n^{q_n}} K_\beta(\pm \varepsilon, x_2 - \xi_2, \ldots, x_n - \xi_n) \right| dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= B \Lambda_\beta \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^{q_2 + \cdots + q_n}}{\partial x_2^{q_2} \ldots \partial x_n^{q_n}} K_\beta(\pm \varepsilon, x_2, \ldots, x_n) \right| dx_2 \ldots dx_n \,,$$

---

[9]) Cf. quant à l'intégration par partie pour les intégrales de Lebesgue: *De la Vallée Poussin*, l. c. t. 1, pp. 279—280, quant à la dérivation sous le signe d'intégrale: *De la Vallée Poussin*, l. c., t. 2, 2de éd. (1912), pp. 123—124, pour les intégrales simples, et *Haupt* und *Aumann*, l. c., Bd. 3, pp. 118—119, pour les intégrales n-ples.

et ceci tend par le lemme VIII vers 0 . Donc, les suites T_β et R_β jouissent de la propriété Ω dans $W_{\frac{\varepsilon}{2}}$, et le lemme XVI est démontré.

Une conséquence immédiate du lemme XVI est le

Lemme XVII. Si f est en W_ε égale à $a + \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu x_\nu$, on a au point $\xi_1 = \ldots = \xi_n = 0$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\nu} A_\beta(f) \to \alpha_\nu \ , \ \nu = 1, \ldots, n \ . \tag{48}$$

En effet, par le lemme XVI, la suite en (48) peut être remplacée, à l'origine, par la suite

$$\alpha_\nu A_\beta \int_E K_\beta \, d\tau \equiv \alpha_\nu \ .$$

23. *Lemme XVIII. Si f possède une différentielle totale en $P_0(0, \ldots, 0)$, on a en P_0*

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\nu} A_\beta(f) \to f'_{x_\nu}(0, \ldots, 0) \ , \ \nu = 1, \ldots, n \ . \tag{49}$$

On peut supposer $\nu = 1$. Soit

$$a = f(0, \ldots, 0) \ , \ \ \alpha_\nu = f'_{x_\nu}(0, \ldots, 0) \ .$$

D'après l'hypothèse on a

$$f = a + \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu x_\nu + \varepsilon(x_1, \ldots, x_n) \sum_{\nu=1}^{n} | x_\nu |$$

où $\varepsilon(x_1, \ldots, x_n)$ est sommable, s'annule en P_0 et y est continu. D'après le lemme XVII il suffit de démontrer (49) pour le cas $a = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Nous avons donc à montrer que

$$A_\beta \int_E \varepsilon \sum_{\nu=1}^{n} | x_\nu | \frac{\partial}{\partial \xi_1} K_\beta(x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n) \, d\tau \to 0$$

pour $\xi_1 = \cdots = \xi_n = 0$. Et pour cela, il suffit de montrer que

$$P_\beta^{(\nu)} \equiv A_\beta \int_E \varepsilon \, | x_\nu | \left| \frac{\partial}{\partial x_1} K_\beta(x_1, \ldots, x_n) \right| d\tau \to 0 \ , \ \nu = 1, \ldots, n \ . \tag{50}$$

Or, pour un $\eta > 0$ soit $\delta > 0$ choisi de la sorte qu'en W_δ on ait $|\varepsilon(x_1, \ldots, x_n)| \leqq \eta$. D'après le lemme XIV, on a

$$\overline{\lim}\, |P_\beta^{(\nu)}| = \overline{\lim}\, \Lambda_\beta \int\limits_{W\delta} |\varepsilon| \; |x_\nu| \; \left| \frac{\partial}{\partial x_1} K_\beta(x_1, \ldots, x_n) \right| d\tau \leqq$$

$$\leqq \overline{\lim}\, \eta \Lambda_\beta \int\limits_{W_\delta} |x_\nu| \left| \frac{\partial}{\partial x_1} K_\beta \right| d\tau \leqq \overline{\lim}\, \eta \Lambda_\beta \int\limits_{E} |x_\nu| \left| \frac{\partial}{\partial x_1} K_\beta \right| d\tau \to \eta \,,$$

par le lemme XI. Il en résulte que $\overline{\lim}\, |P_\beta^{(\nu)}| \leqq \eta$, donc, η étant arbitraire, $P_\beta^{(\nu)} \to 0$, et le lemme XVIII est démontré.

Ce lemme est d'ailleurs un corollaire du théorème suivant:

24. *Théorème III. Soient K_β et Λ_β définis par* (26). *Soit $f(x_1, \ldots, x_n)$ mesurable et bornée dans l'espace E des $x_1, \ldots, x_n$. Supposons que f est continue au point $P_0(a_1, \ldots, a_n)$ et que la dérivée de f par rapport à x_ν existe uniformément en P_0.*

Alors, en définissant $A_\beta(f)$ par (43), *on a, l'entier pair β croissant à l'infini,*

$$\left[\frac{\partial A_\beta(f)}{\partial \xi_\nu}\right]_{P_0} \to \frac{\partial f(a_1, \ldots, a_n)}{\partial a_\nu} \,.$$

Nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, $\nu = 1$ et $a_1 = \cdots = a_n = 0$. Posons

$$f(0, \ldots, 0) = a \qquad \text{et} \qquad f'_{x_1}(a_1, \ldots, a_n) = \alpha_1 \,.$$

Il suffit, d'après le lemme XVII, de démontrer notre théorème pour la fonction égale à $f - \alpha_1 x_1 - a$ en W_1 et à f en E_1, c'est-à-dire qu'on peut supposer que

$$f(0, \ldots, 0) = f'_{x_1}(0, \ldots, 0) = 0 \,.$$

D'après la définition de la dérivée uniforme en P_0, on a

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(0, x_2, \ldots, x_n) + \varepsilon(x_1, \ldots, x_n) x_1 \,, \tag{51}$$

où ε est borné dans le domaine W^* du N° 18, s'annule en P_0 et y est continu relativement à W^*.

Nous avons maintenant à démontrer que

$$-\Lambda_\beta \int\limits_E f \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} K_\beta(x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n)\right]_{\xi_1 = \ldots = \xi_n = 0} d\tau = \Lambda_\beta \int\limits_E f \frac{\partial K_\beta}{\partial x_1} d\tau \to 0 \,.$$

Or, la dernière expression peut être décomposée comme il suit

$$\Lambda_\beta \int_{E^*} f \frac{\partial K_\beta}{\partial x_1} d\tau + \Lambda_\beta \int_{W^*} f \frac{\partial K_\beta}{\partial x_1} d\tau , \tag{52}$$

et il suffit de démontrer que chacun de ces termes tend vers 0 .

25. Considérons d'abord le premier. Soit $\eta > 0$ et $\delta > 0$ choisi de la sorte qu'on ait en W_δ

$$| f | \leqq \eta , \tag{53}$$

ce qui est possible, f s'annulant à l'origine et y étant continue. D'après le lemme XIV

$$\overline{\lim}\, \Lambda_\beta \left| \int_{E^*} f \frac{\partial K_\beta}{\partial x_1} d\tau \right| \tag{54}$$

ne change pas, si l'on restreint l'intégration sur la partie de E^*, intérieure à W_δ . Mais alors il résulte de (53) que (54) est

$$\leqq \eta\, \overline{\lim}\, \Lambda_\beta \int_{E^*} \left| \frac{\partial K_\beta}{\partial x_1} \right| d\tau \ .$$

Donc, d'après le lemme XIII, (54) est $\leqq (n - 1) \eta \lg 2$, et, η étant arbitraire, (54) est $= 0$.

Le seconde terme de (52) peut être écrit d'après (51) dans la forme

$$\Lambda_\beta \int_{W^*} f(0 , x_2 , \ldots , x_n) \frac{\partial}{\partial x_1} K_\beta \, d\tau + \Lambda_\beta \int_{W^*} \varepsilon (x_1 , \ldots , x_n)\, x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} K_\beta d\tau . \tag{55}$$

Or, ici le premier membre s'annule, puisque, K_β étant une fonction paire de x_1, la fonction sous le signe d'intégration est impaire par rapport à x_1, tandis que le domaine d'intégration W^* reste le même, si l'on change x_1 en $- x_1$.

Considérons le second membre en (55). Pour un $\eta > 0$ soit δ choisi de la sorte que dans la partie W^*_δ de W^*, appartenant à W_δ, on ait

$$| \varepsilon (x_1 , \ldots , x_n) | \leqq \eta \ .$$

Alors il résulte du lemme XIV:

$$\overline{\lim}\, \Lambda_\beta \left| \int_{W^*} \varepsilon\, x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} K_\beta\, d\tau \right| \leqq \eta\, \overline{\lim}\, \Lambda_\beta \left| \int_{W_j^*} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} K_\beta\, d\tau \right| \leqq$$

$$\leqq \eta\, \overline{\lim}\, \Lambda_\beta \int_{W^*} | x_1 | \left| \frac{\partial}{\partial x_1} K_\beta \right| d\tau \; .$$

Mais ici, par le lemme XI, l'expression de droite est égale à η. Donc, η étant arbitraire, le seconde membre de (55) tend vers 0, lui aussi, et le théorème III est démontré.

§ 5. Démonstration du théorème II

26. On peut supposer, sans restreindre la généralité, le point P_0 situé à l'origine. Soit $\varepsilon > 0$ choisi de la sorte que les fonctions $z_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ et leurs dérivées partielles du premier ordre soient bornées à l'intérieur de W_ε[10]. En définissant les z_λ comme $= 0$ dans E_ε, formons les intégrales

$$Z_{\lambda\beta}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \Lambda_\beta \int_E z_\lambda(x_1, \ldots, x_n)\, K_\beta(x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n)\, d\tau \; .$$

Alors on a, d'après le lemme XVI, dans $W_{\frac{\varepsilon}{2}}$:

$$\frac{\partial Z_{\lambda\beta}}{\partial \xi_\mu} = \Lambda_\beta \int_E \frac{\partial z_\lambda}{\partial x_\mu} K_\beta(x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n)\, d\tau + Q_\beta \, , \; \mu = 1, \ldots, n \, ,$$

où la suite Q_β jouit de la propriété Ω en $W_{\frac{\varepsilon}{2}}$. En multipliant par $\alpha_{\nu\mu}^{(\lambda)}$ et en sommant, on a par (15)

$$S_{\nu\beta} \equiv \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_{\nu\mu}^{(\lambda)} \frac{\partial Z_{\lambda\beta}}{\partial \xi_\mu} = \Lambda_\beta \int_E s_\nu K_\beta(x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n)\, d\tau + Q_\beta^{(\nu)} \; . \tag{56}$$

où les suites $Q_\beta^{(\nu)}$ jouissent de la propriété Ω en $W_{\frac{\varepsilon}{2}}$.

---

[10]) Ceci est possible, les z_λ et leurs dérivées étant supposées continues en P_0 .

27. En dérivant les expressions $S_{\nu\beta}$ par rapport à ξ_ν et en sommant, on obtient évidemment

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial S_{\nu\beta}}{\partial \xi_\nu} = \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\nu\mu}^{(\lambda)} \frac{\partial^2 Z_{\lambda\beta}}{\partial \xi_\nu \, \partial \xi_\mu} = 0 \ ,$$

en raison des relations (12). Il en résulte que

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_\nu} \left[\Lambda_\beta \int_E s_\nu K_\beta (x_1 - \xi_1 , \ldots, x_n - \xi_n) \, d\tau \right] \tag{57}$$

jouit de la propriété Ω à l'origine. Donc, (57) tend vers 0 .

Mais maintenant, par le théorème III, les termes de (57) d'indice ν tendent vers

$$\left[\frac{\partial s_\nu}{\partial x_\nu} \right]_0 ,$$

et l'on obtient

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left[\frac{\partial s_\nu}{\partial x_\nu} \right]_0 = 0 \ , \qquad C.Q.F.D.$$

(Reçu le 28 octobre 1942.)