Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 15 (1942-1943)

Artikel: Le problème des isopérimètres dans les plans de Riemann à courbure de signe constant.

Autor: Fiala, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14890

Le problème des isopérimètres dans les plans de Riemann à courbure de signe constant

Par F. Fiala, Neuchâtel

Dans un précédent travail[1]), nous avons poursuivi l'étude des *surfaces ouvertes à courbure totale positive* entreprise par Cohn-Vossen[2]). Alors que ce dernier s'était surtout intéressé aux conséquences topologiques de l'hypothèse de la courbure positive et à l'allure des lignes géodésiques, nous nous sommes plus spécialement occupés du problème de l'aire. Rappelons trois de nos résultats principaux:

1. *L'aire totale d'une de nos surfaces est infinie.*

2. Etant donnée une courbe fermée $\mathfrak{F}$, sans point multiple, on a, entre sa longueur L et l'aire A du domaine situé à l'intérieur de $\mathfrak{F}$, *l'inégalité isopérimétrique*

$$L^2 \geqq 2A \cdot (2\pi - C(\mathfrak{F}))$$

où $C(\mathfrak{F})$ représente l'intégrale de la courbure totale sur le domaine limité par $\mathfrak{F}$.

3. *L'aire du domaine situé à l'intérieur d'une courbe $\mathfrak{F}$ quelconque fermée, sans point multiple, de longueur donnée L, est bornée supérieurement;* L doit éventuellement satisfaire à la condition $L < L^*$, où L^* est une constante positive qui ne dépend que de la surface considérée.

Comme nous l'avions déjà remarqué, ce dernier théorème est loin de résoudre complètement sur nos surfaces le problème des isopérimètres proprement dit; il serait par exemple faux d'en tirer immédiatement la conclusion suivante:

Parmi toutes les courbes fermées de longueur L, il en existe une qui limite un domaine d'aire maximum.

Le but du présent travail est précisément de démontrer d'une part que cette proposition est vraie sur toute surface ouverte à courbure

[1]) Le problème des isopérimètres sur les surfaces ouvertes à courbure positive, paru dans les Comm. Math. Helv., 13 (1941), p. 293—346, désigné dans la suite par P. I.

[2]) Kürzeste Wege und Totalkrümmung auf Flächen, Comp. Math., 2 (1935), p. 69—133, et Totalkrümmung und geodätische Linien auf einfachzusammenhängenden offenen vollständigen Flächenstücken. Recueil mathématique de Moscou, 1 (1936), p. 139—163.

totale positive (n° 3) et d'autre part, qu'elle est fausse sur toute une classe de surfaces ouvertes à courbure totale négative (n° 4). Le n° 1 est consacré à quelques définitions et propriétés des surfaces considérées, le n° 2 à un lemme essentiel sur la convergence d'une suite de courbes fermées vers une courbe limite. Au n° 5, nous présentons quelques remarques sur l'application de nos résultats aux surfaces du second degré et aux surfaces de révolution.

Les démonstrations reposent en grande partie sur la notion de *vrai cercle*, cas particulier des vraies parallèles, introduites et utilisées dans P. I.

1. Nous avons appelé dans P. I. les surfaces considérées des *plans de Riemann*. Ce sont des plans aux coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y, où la métrique est définie au moyen d'une forme quadratique définie positive

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2 \tag{1}$$

satisfaisant aux deux conditions suivantes:

a) *E, F, G sont des fonctions analytiques réelles de x et de y dans tout le plan.*

b) *La longueur de toute ligne divergente dans le plan est infinie.*

On connaît les formules qui permettent de calculer, à l'aide des coefficients de la forme (1), la longueur d'un arc de courbe analytique, sa courbure géodésique, l'aire d'un domaine et la courbure totale en un point.

Nous rappelons d'autre part la définition de Jordan d'une courbe: C'est la suite ordonnée suivant t des points dont les coordonnées sont données au moyen de deux fonctions continues

$$x = x(t) \quad \text{et} \quad y = y(t)\,, \qquad a \leqq t \leqq b\ .$$

Une courbe est analytique si les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont analytiques. Une courbe est fermée si

$$x(a) = x(b) \quad \text{et} \quad y(a) = y(b)\ .$$

S'il existe deux valeurs t_1 et t_2, différentes de a et b, telles que

$$x(t_1) = x(t_2) \quad \text{et} \quad y(t_1) = y(t_2)$$

le point correspondant à ces valeurs de t est dit point multiple.

Pour pouvoir employer certaines propriétés connues de la géométrie euclidienne, nous allons donner quelques définitions qui permettront d'établir un lien entre la métrique euclidienne et la métrique riemannienne d'un plan de Riemann.

Soient A et B deux points d'un plan de Riemann. Désignons par $\Delta(A, B)$ *la distance euclidienne* de ces deux points, c'est-à-dire la longueur euclidienne du segment de droite compris entre A et B, et par $D(A, B)$ la longueur riemannienne de ce segment.

Nous définissons d'autre part *la distance riemannienne* $d(A, B)$ de ces deux points comme la borne inférieure de la longueur riemannienne de tous les arcs analytiques joignant A et B. Nous pouvons appliquer à nos plans de Riemann un théorème démontré par MM. Hopf et Rinow[3]), qui nous permet d'affirmer qu'il existe entre A et B au moins un arc de longueur $d(A, B)$; dans P. I., nous avons appelé un tel arc, nécessairement géodésique, *un arc minimum.* S'il n'existe entre A et B qu'un arc minimum, nous désignons sa longueur euclidienne par $\delta(A, B)$; c'est certainement le cas chaque fois que les points A et B sont suffisamment rapprochés, c'est-à-dire chaque fois que $\Delta(A, B)$ est suffisamment petit. S'il existe entre A et B plusieurs arcs minimum, on peut démontrer qu'il n'en existe qu'un nombre fini, et c'est la longueur du plus court (au sens de la métrique euclidienne) que nous désignons par $\delta(A, B)$.

Remarquons que, parmi les quatre grandeurs que nous venons de définir, seules $\Delta(A, B)$ et $d(A, B)$ jouissent des trois propriétés caractéristiques d'une distance. La proposition suivante établit une relation importante entre ces deux quantités.

Etant donné un ensemble borné $\mathfrak{B}$ de points d'un plan de Riemann, le rapport entre la distance euclidienne et la distance riemannienne de deux points quelconques de $\mathfrak{B}$ est borné.

Nous démontrerons plus généralement que, si A et B appartiennent à $\mathfrak{B}$, le rapport entre deux quelconques des quatre quantités $\Delta(A, B)$, $\delta(A, B)$, $D(A, B)$, $d(A, B)$ est borné.

On a évidemment:

$$\Delta(A, B) \leqq \delta(A, B)$$
$$d(A, B) \leqq D(A, B)$$

Pour démontrer notre proposition, il suffit alors de trouver un nombre M tel que

[3]) Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche, Comm. Math. Helv., 3 (1931), p. 209—225.

$$\frac{1}{M}\,\delta(A\,,B) \leqq d(A\,,B) \leqq M\,\delta\,(A\,,B)$$

$$\frac{1}{M}\,\Delta(A\,,B) \leqq D(A\,,B) \leqq M\,\Delta\,(A\,,B)\ .$$

Il est évident que les segments de droite joignant deux points quelconques A et B de $\mathfrak{B}$ sont contenus dans un domaine borné $\mathfrak{B}'$ du plan de Riemann. Il en est de même des arcs minimum, grâce à la seconde des conditions auxquelles nous avons soumis notre métrique. Aussi les formules à démontrer sont-elles un cas particulier de la proposition suivante:

Etant donné un domaine borné $\mathfrak{B}'$ d'un plan de Riemann, il existe un nombre positif M tel que le rapport de la longueur riemannienne à la longueur euclidienne de tout arc de courbe analytique entièrement contenu dans $\mathfrak{B}'$ est inférieur à M et supérieur à $\frac{1}{M}$.

Soient

$$x = x(t) \quad \text{et} \quad y = y(t)\ , \quad 0 \leqq t \leqq \sigma$$

les deux fonctions analytiques définissant un des arcs en question. Rien ne nous empêche de considérer le paramètre t comme la longueur d'arc (au sens euclidien); σ représente alors la longueur euclidienne de l'arc considéré. Soit s sa longueur riemannienne, que l'on calcule au moyen de l'intégrale

$$s = \int_0^\sigma \sqrt{E(x(t)\,,y(t))\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + 2F(x(t)\,,y(t))\frac{dx(t)}{dt}\cdot\frac{dy(t)}{dt} + G(x(t),y(t))\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}\,dt\,.$$

En appliquant le théorème de la moyenne, on obtient

$$s = \sigma\sqrt{E(x',y')\left(\frac{dx(t')}{dt}\right)^2 + 2F(x',y')\,\frac{dx(t')}{dt}\,\frac{dy(t')}{dt} + G(x',y')\left(\frac{dy(t')}{dt}\right)^2}$$

où la valeur t', pour laquelle on doit calculer le second membre, est comprise entre 0 et σ, et où $x' = x(t')$ et $y' = y(t')$. En posant $\frac{dx(t')}{dt} = \cos\varphi$ et $\frac{dy(t')}{dt} = \sin\varphi$, le rapport $\frac{s}{\sigma}$ devient égal à

$$f(x',y',\varphi) = \sqrt{E(x',y')\cos^2\varphi + 2F(x',y')\cos\varphi\sin\varphi + G(x',y')\sin^2\varphi}\ .$$

Or cette fonction est positive dans tout le plan de Riemann et pour toute valeur de φ; la forme (1) est en effet supposée définie positive. Comme cette fonction est continue, elle possède dans tout domaine borné du plan une borne supérieure M' et une borne inférieure positive M''. En désignant par M la plus grande des deux quantités M' et $\frac{1}{M''}$, on démontre la seconde de nos propositions, et avec elle la première.

Considérons maintenant un arc de courbe quelconque $\mathfrak{A}$, représenté par les fonctions continues

$$x = x(t) \quad \text{et} \quad y = y(t) \ , \quad a \leqq t \leqq b$$

et demandons-nous à quelles conditions doivent satisfaire ces fonctions pour que l'arc $\mathfrak{A}$ soit *rectifiable.* Au sens euclidien de ce mot, on sait que *la condition nécessaire et suffisante est que les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ soient à variation bornée.* Nous allons montrer qu'il en est de même au sens de la métrique de Riemann.

Prenons par exemple pour définition de la longueur de l'arc $\mathfrak{A}$ celle d'Archimède, reprise par Peano:

On prend dans l'intervalle $a \leqq t \leqq b$ un certain nombre de valeurs intermédiaires $a = t_0 < t_1 < t_2 \cdots \cdots < t_{n-1} < t_n = b$. Soient $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$, les points correspondants, et soit λ la longueur euclidienne de la ligne polygonale de sommets $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n$; avec nos notations cette longueur est égale à $\sum_{\nu=1}^{n} \Delta(P_{\nu-1}, P_\nu)$. On définit *la longueur euclidienne* Λ de l'arc $\mathfrak{A}$ comme la borne supérieure des nombres λ lorsque l'on considère toutes les divisions possibles de l'intervalle $a \leqq t \leqq b$.

On pourra de même désigner par l la longueur riemannienne d'une ligne polygonale de sommets $P_0, P_1, \ldots P_{n-1}, P_n$, formée d'arcs minimum; cette longueur est égale à $\sum_{\nu=1}^{n} d(P_{\nu-1}, P_\nu)$. Nous définirons la *longueur riemannienne* L de l'arc $\mathfrak{A}$ comme la borne supérieure des nombres l lorsque l'on considère toutes les divisions possibles de l'intervalle $a \leqq t \leqq b$.

Or la première des propositions démontrées plus haut, nous permet d'affirmer l'existence d'un nombre M, indépendant des points P_ν considérés, tel que

$$\frac{1}{M} \Delta(P_{\nu-1}, P_\nu) \leqq d(P_{\nu-1}, P_\nu) \leqq M \Delta(P_{\nu-1}, P_\nu) .$$

On en déduit, en faisant la somme,

$$\frac{\lambda}{M} \leqq l \leqq M\lambda$$

d'où l'on tire

$$\frac{\Lambda}{M} \leqq L \leqq M\Lambda \ .$$

De cette formule, nous pouvons tirer deux conclusions: La première est que L existe en même temps que Λ, c'est-à-dire qu'*une courbe rectifiable au sens euclidien, l'est aussi au sens de la métrique de Riemann, et réciproquement;* la seconde est que, *si les longueurs euclidiennes d'un ensemble de courbes situées dans un domaine borné du plan de Riemann possèdent une borne supérieure, il en est de même pour les longueurs riemanniennes de ces courbes, et réciproquement.* Notre constante M ne dépend en effet que du domaine où sont situées ces courbes.

On sait d'autre part qu'une courbe fermée $\mathfrak{F}$, sans point multiple, divise le plan en deux parties, l'intérieur et l'extérieur. On sait également que si la courbe est rectifiable, le domaine situé à l'intérieur est quarrable. Ceci signifie que si l'on divise le plan en carrés, l'aire de l'ensemble des carrés ne contenant que des points intérieurs et l'aire de l'ensemble des carrés contenant au moins un point intérieur tendent vers une même limite, lorsque le côté des carrés tend vers 0. C'est cette limite commune que l'on définit comme l'aire de la courbe. La condition nécessaire et suffisante pour que cette aire existe est que l'aire de l'ensemble des carrés qui contiennent au moins un point de la courbe tende vers 0, lorsque le côté des carrés tend vers 0. C'est précisément ce qui a lieu si la courbe est rectifiable. La démonstration s'étend d'ailleurs à un cas un peu plus général. On peut en effet affirmer qu'une courbe $\mathfrak{F}$, fermée et rectifiable, est quarrable, même si elle possède des points multiples, pourvu que l'on puisse en définir l'intérieur de la façon suivante:

Nous supposons connue la notion d'ordre par rapport à une courbe fermée $\mathfrak{F}$, d'un point non situé sur $\mathfrak{F}$[4]. Si pour une courbe donnée, l'ordre d'un point quelconque non situé sur cette courbe est égal soit à 1, soit à 0, on peut définir l'intérieur de cette courbe comme l'ensemble des points d'ordre 1, et l'extérieur comme l'ensemble des points d'ordre 0.

Une courbe quarrable au sens euclidien est aussi quarrable au sens de la métrique de Riemann; son aire est égale à l'intégrale de la fonction $\sqrt{EG-F^2}$, étendue au domaine $\mathfrak{D}$, intérieur de la courbe $\mathfrak{F}$. Cette intégrale existe, puisque le domaine d'intégration est quarrable et que la fonction à intégrer est continue.

[4]) Voir p. ex. *v. Kerekjarto*, Vorlesungen über Topologie I, Berlin 1923, p. 83 et suivantes.

2. Nous pouvons démontrer maintenant un lemme essentiel pour la suite de ce travail.

Lemme 1. *Etant donné dans un plan de Riemann un ensemble infini de courbes fermées, sans point multiple, de longueur riemannienne bornée et situées dans un domaine borné du plan, on peut en extraire une suite* $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots$, *convergeant uniformément vers une courbe limite* $\mathfrak{F}$ *jouissant des propriétés suivantes:*

1. $\mathfrak{F}$ est une courbe fermée;
2. $\mathfrak{F}$ est rectifiable et sa longueur $L(\mathfrak{F})$ satisfait à la relation

$$L(\mathfrak{F}) \leqq \varliminf_{k\to\infty} L(\mathfrak{F}_k)\,;$$

3. $\mathfrak{F}$ possède un domaine intérieur quarrable dont l'aire satisfait à la relation $A(\mathfrak{F}) = \lim\limits_{k\to\infty} A(\mathfrak{F}_k)$.

Nos courbes étant toutes situées dans un domaine borné du plan de Riemann et leur longueur riemannienne étant bornée, nous avons vu au n° 1 que leur longueur euclidienne est aussi bornée. En vertu d'un théorème démontré par M. Fréchet[5]), l'ensemble de ces courbes est compact, c'est-à-dire que l'on peut en extraire une suite de courbes $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_k, \ldots$ convergeant vers une courbe limite $\mathfrak{F}$ de la façon suivante: On peut exprimer toutes ces courbes au moyen du même paramètre $a \leqq t \leqq b$, de manière que la suite des points correspondant à une même valeur du paramètre $P_1(t), P_2(t), \ldots, P_k(t), \ldots$ converge vers un point limite $P(t)$. La convergence est uniforme, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de t. La succession des points $P(t)$, ordonnée selon t, constitue la courbe limite $\mathfrak{F}$. Les fonctions qui la définissent sont

$$x(t) = \lim_{k\to\infty} x_k(t) \qquad \text{et} \qquad y(t) = \lim_{k\to\infty} y_k(t)\ .$$

L'existence de ces deux limites est précisément démontrée par le théorème de Fréchet.

Il est clair que $\mathfrak{F}$ est une courbe fermée.

Pour démontrer la deuxième propriété, prenons une suite de valeurs du paramètre $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$, et soient $P_k(t_0)$, $P_k(t_1), \ldots, P_k(t_{n-1}), P_k(t_n)$, les points correspondants sur la courbe $\mathfrak{F}_k$ et $P(t_0), P(t_1), \ldots, P(t_{n-1}), P(t_n)$, les points correspondants sur la courbe $\mathfrak{F}$.

Considérons l'expression

$$\sum_{\nu=1}^{n} d(P(t_{\nu-1})\ ,\ P(t_\nu))\ .$$

[5]) Les espaces abstraits, Paris 1928, p. 121.

En vertu de l'inégalité triangulaire dont jouit la distance riemannienne $d(P, Q)$, on peut écrire

$$d(P(t_{\nu-1}), P(t_\nu)) \leqq d(P(t_{\nu-1}), P_k(t_{\nu-1})) + \\ + d(P_k(t_{\nu-1}), P_k(t_\nu)) + d(P_k(t_\nu), P(t_\nu)) .$$

Puisque les courbes $\mathfrak{F}_k$ convergent uniformément vers $\mathfrak{F}$, et en tenant compte des résultats du n° 1, on peut rendre le premier et le troisième terme arbitrairement petits, en prenant k suffisamment grand. On a donc

$$d(P(t_{\nu-1}), P(t_\nu)) \leqq d(P_k(t_{\nu-1}), P_k(t_\nu)) + 2\varepsilon$$

et en faisant la somme,

$$\sum_{\nu=1}^{n} d(P(t_{\nu-1}), P(t_\nu)) \leqq \sum_{\nu=1}^{n} d(P_k(t_{\nu-1}), P_k(t_\nu)) + 2n\varepsilon .$$

Le premier terme du second membre est inférieur à $L(\mathfrak{F}_k)$ et ε peut être rendu arbitrairement petit en prenant k suffisamment grand; on en déduit

$$\sum_{\nu=1}^{n} d(P(t_{\nu-1}), P(t_\nu)) \leqq \underline{\lim}_{k\to\infty} L(\mathfrak{F}_k) .$$

Le membre de gauche est donc borné et la borne trouvée est indépendante de la division choisie pour l'intervalle $a \leqq t \leqq b$. En considérant toutes les divisions possibles, on peut écrire

$$L(\mathfrak{F}) = \text{Borne sup.} \sum_{\nu=1}^{n} d(P(t_{\nu-1}), P(t_\nu)) \leqq \underline{\lim}_{k\to\infty} L(\mathfrak{F}_k)$$

ce qui démontre la propriété 2.

Quant à la propriété 3, on peut affirmer que la courbe $\mathfrak{F}$ est quarrable au sens indiqué à la fin du n° 1. Il suffit de démontrer pour cela qu'elle possède un „intérieur", c'est-à-dire que l'ordre d'un point quelconque du plan, par rapport à $\mathfrak{F}$, est égal soit à 1, soit à 0. Or étant donné un point P, non situé sur $\mathfrak{F}$, l'ordre de P par rapport à $\mathfrak{F}$ est le même que l'ordre de P par rapport à $\mathfrak{F}_k$, dès que k est suffisamment grand, en vertu du théorème de Rouché et de la convergence uniforme des courbes $\mathfrak{F}_k$ vers $\mathfrak{F}$; il est donc bien égal soit à 1, soit à 0. Le théorème de Rouché nous permet également d'affirmer que tout carré entièrement situé à l'intérieur de $\mathfrak{F}$ est aussi entièrement à l'intérieur de $\mathfrak{F}_k$, dès que k est suffisamment grand, et que tout carré contenant des points intérieurs de $\mathfrak{F}$ contient aussi des points intérieurs de $\mathfrak{F}_k$, dès que k est suffisamment grand.

Il s'ensuit évidemment que l'aire (au sens euclidien) des domaines limités par les courbes $\mathfrak{F}_k$ tend vers l'aire du domaine limité par $\mathfrak{F}$, lorsque k tend vers l'infini. Il en est de même pour l'aire riemannienne, qui n'est autre que l'intégrale, étendue à ces domaines, de la fonction continue $\sqrt{EG - F^2}$. C'est précisément la propriété 3.

3. Considérons maintenant *un plan de Riemann à courbure totale positive ou nulle*, mais cependant pas identiquement nulle (notre démonstration ne s'appliquerait en effet pas sans quelques modifications au plan euclidien). Nous avons montré dans P. I. qu'il existe un nombre L^* tel que l'aire du domaine limité par une courbe fermée, sans point multiple, de longueur $L < L^*$, possède une borne supérieure, qui ne dépend que de L et du plan de Riemann considéré; soit $\overline{A}(L)$ cette borne.

Etant donné un nombre $L < L^*$, nous démontrerons le

Théorème A. *Dans un plan de Riemann à courbure totale non négative, parmi toutes les courbes fermées de longueur L, il en existe au moins une qui limite un domaine d'aire maximum $\overline{A}(L)$.*

La démonstration du théorème A repose sur le lemme 1 et sur deux autres lemmes que nous allons tout d'abord démontrer.

Lemme 2. *Dans un plan de Riemann à courbure totale non négative, on a*

$$\overline{A}(L) > \frac{L^2}{4\pi} .$$

Il suffit de trouver une courbe fermée $\mathfrak{F}$, de longueur L, limitant un domaine d'aire $A(\mathfrak{F}) > \dfrac{L^2}{4\pi}$. C'est ce que nous allons faire au moyen des vrais cercles, dont nous rappelons quelques propriétés.

Dans P. I.[6]), nous avons défini le vrai cercle de centre O et de rayon r comme le lieu des points situés à distance r du point O. Nous avons démontré qu'il se compose d'un nombre fini d'arcs analytiques appartenant au cercle géodésique (défini par Gauss) de centre O et de rayon r. Ces arcs forment un nombre fini de courbes fermées, et l'une de celles-ci contient toutes les autres; nous l'avons appelée la composante extérieure. Nous désignons par $L(r)$ la longueur riemannienne du vrai cercle de centre O et de rayon variable r, et par $A(r)$ son aire, c'est-à-dire l'aire de l'ensemble des points dont la distance à O est inférieure ou égale à r.

[6]) P. I., p. 324—332. Voir aussi un travail de *Blanc* et *Fiala*, Le type d'une surface et sa courbure totale, Comm. Math. Helv., 14 (1942), p. 230—233, où les vrais cercles jouent un rôle essentiel.

Soit enfin $C(r)$ l'intégrale de la courbure totale sur l'intérieur du vrai cercle. Remarquons que les vrais cercles coïncident avec les cercles géodésiques pour des valeurs de r suffisamment petites.

La fonction $L(r)$ jouit des propriétés suivantes:

a) $L(0) = 0$;

b) $\dfrac{dL(0)}{dr} = 2\pi$;

c) $L(r)$ est une fonction continue pour toute valeur de r ;

d) $L(r)$ est une fonction analytique, sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de r ou pour une suite dénombrable de valeurs de r tendant vers l'infini;

e) $$\frac{dL(r)}{dr} \leqq 2\pi - C(r) \;;$$

f) $$L(r) = \int_0^r \frac{dL(\varrho)}{d\varrho}\, d\varrho \;;$$

g) $$A(r) = \int_0^r L(\varrho)\, d\varrho \;.$$

Une démonstration analogue à celle que nous avons faite dans P. I., p. 341, pour les vraies parallèles, nous permet d'affirmer que la fonction $\dfrac{L(r)}{r}$ est décroissante:

$$\frac{L(\varrho)}{\varrho} > \frac{L(r)}{r} \quad \text{si} \quad \varrho < r \;.$$

On tire aisément de cette relation

$$A(r) > \int_0^r \frac{L(r)}{r}\, \varrho\, d\varrho = \frac{L(r)\cdot r}{2} \;.$$

Les propriétés e) et f) nous livrent d'autre part la formule

$$L(r) \leqq 2\pi r - \int_0^r C(\varrho)\, d\varrho \;.$$

Or, l'hypothèse de la courbure totale non négative et non identiquement nulle nous apprend que pour tout $\varrho > 0$, $C(\varrho)$ est positif et que

$$\frac{L(r)}{r} < 2\pi \;.$$

En combinant les deux formules que nous venons d'obtenir, nous pouvons écrire

$$A(r) > \frac{L^2(r)}{4\pi} .$$

La fonction $L(r)$ est continue; elle est nulle lorsque r vaut 0 et surpasse toute valeur inférieure à L^* lorsque r tend vers l'infini, en vertu même de la définition de L^* (P. I., p. 333). Il existe donc une valeur r_0 pour laquelle on a

$$L(r_0) = L$$

et

$$A(r_0) > \frac{L^2}{4\pi} .$$

Il suffit maintenant de considérer la composante extérieure du vrai cercle de rayon r_0. C'est une courbe simplement fermée que nous désignons par $\mathfrak{F}'$ et pour laquelle on a évidemment

$$L(\mathfrak{F}') \leqq L(r_0) = L$$

et

$$A(\mathfrak{F}') \geqq A(r_0) > \frac{L^2}{4\pi} .$$

Si $L(\mathfrak{F}') = L$ la courbe $\mathfrak{F}'$ est la courbe cherchée, pour laquelle on a $A(\mathfrak{F}') > \frac{L^2}{4\pi}$; si $L(\mathfrak{F}') < L$ il est facile de construire une courbe fermée $\mathfrak{F}''$ de longueur $L > L(\mathfrak{F}')$ et dont l'aire satisfasse à la relation $A(\mathfrak{F}'') > A(\mathfrak{F}') > \frac{L^2}{4\pi}$. Dans les deux cas, le lemme 2 est démontré.

Lemme 3. *Dans un plan de Riemann à courbure non négative, on a, pour toute suite divergente de courbes fermées* $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots$ *de longueur* $L < L^*$:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ A(\mathfrak{F}_n) \leqq \frac{L^2}{4\pi} .$$

Ce lemme est démontré dans P. I., p. 345.

Démonstration du théorème A. En vertu de la définition de $\overline{A}(L)$, on peut affirmer ou qu'il existe une courbe fermée $\mathfrak{F}$, de longueur L limitant un domaine d'aire $\overline{A}(L)$, ou qu'il existe une suite de courbes fermées $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots$ de longueur L, limitant des domaines d'aire $A(\mathfrak{F}_1), A(\mathfrak{F}_2), \ldots, A(\mathfrak{F}_n), \ldots$, telles que $\lim_{n\to\infty} A(\mathfrak{F}_n) = \overline{A}(L)$. Dans le premier cas le théorème est démontré; dans le second, il est maintenant facile de démontrer l'existence d'une courbe limite $\mathfrak{F}$, fermée, de longueur L, limitant un domaine d'aire $\overline{A}(L)$.

Le lemme 2 et le lemme 3 nous montrent que la suite des courbes $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots$ ne saurait être divergente. Toutes ces courbes sont donc situées dans un domaine borné du plan de Riemann. On peut leur appliquer le lemme 1 et affirmer qu'il existe une courbe limite $\mathfrak{F}$, fermée, de longueur inférieure ou égale à $L(\mathfrak{F}) = \varliminf_{n\to\infty} L(\mathfrak{F}_n) = L$ et limitant un domaine d'aire $A(\mathfrak{F}) = \lim_{n\to\infty} A(\mathfrak{F}_n) = \overline{A}(L)$. Or il est impossible que la longueur de $\mathfrak{F}$ soit inférieure à L, sinon il serait possible de construire une courbe fermée de longueur L, limitant un domaine d'aire supérieure à $\overline{A}(L)$, contrairement à la définition de $\overline{A}(L)$. La courbe $\mathfrak{F}$ est donc de longueur L et elle limite un domaine d'aire $\overline{A}(L)$; le théorème A est démontré.

4. Considérons maintenant *un plan de Riemann à courbure totale négative ou nulle*, mais cependant pas identiquement nulle (le théorème que nous nous proposons de démontrer serait en effet faux dans le plan euclidien). Ajoutons l'hypothèse que *l'intégrale de la courbure totale sur un domaine quelconque du plan de Riemann considéré est bornée inférieurement.* Nous désignons par C_T l'intégrale de la courbure totale sur tout le plan de Riemann; c'est, par hypothèse, une constante négative, non infinie.

L'inégalité isopérimétrique sur les plans de Riemann à courbure non positive et non identiquement nulle, démontrée d'ailleurs pour des surfaces plus générales que celles que nous considérons ici par Radó et Beckenbach [7]),

$$L^2 > 4\pi A$$

nous permet d'affirmer que l'aire d'un domaine limité par une courbe fermée de longueur donnée L possède une borne supérieure qui dépend évidemment de L et du plan de Riemann considéré; soit $\overline{A}(L)$ cette borne.

Etant donné un nombre L, nous démontrerons le

Théorème B. *Dans un plan de Riemann à courbure totale non positive, et pour lequel l'intégrale de la courbure totale est bornée inférieurement, parmi toutes les courbes fermées de longueur L, il n'en existe aucune qui limite un domaine d'aire maximum $\overline{A}(L)$.*

---

[7]) *Radó* et *Beckenbach,* Trans. Amer. Math. Soc., 35 (1933).

La démonstration du théorème B repose sur un lemme que nous allons tout d'abord démontrer.

Lemme 4. *Dans un plan de Riemann à courbure totale non positive, et pour lequel l'intégrale de la courbure totale est bornée inférieurement, on a*

$$\overline{A}(L) = \frac{L^2}{4\pi}.$$

L'inégalité isopérimétrique de Radó et Beckenbach nous apprend que $\overline{A}(L) \leqq \frac{L^2}{4\pi}$. Il suffit de montrer qu'étant donné un ε arbitrairement petit il existe une courbe fermée $\mathfrak{F}$, de longueur L, limitant un domaine d'aire supérieure à $\frac{L^2}{4\pi} - \varepsilon$. C'est ce que nous allons faire au moyen des cercles géodésiques.

Considérons un domaine borné $\mathfrak{B}$ et désignons par $C(\mathfrak{B})$ l'intégrale de la courbure totale sur ce domaine. L'existence d'une borne inférieure pour cette intégrale permet de choisir $\mathfrak{B}$ de façon que $-\delta < C_T - C(\mathfrak{B}) < 0$, où δ est une quantité positive arbitrairement petite. Prenons à l'extérieur de $\mathfrak{B}$ un point O tel que les cercles géodésiques de centre O et de rayon $r < \frac{L}{2\pi}$ soient entièrement situés à l'extérieur de $\mathfrak{B}$. Ceci est possible en vertu de l'hypothèse de normalité à laquelle doit satisfaire notre plan de Riemann; il suffit de prendre le point O suffisamment éloigné du domaine $\mathfrak{B}$.

Prenons O comme origine d'un système de coordonnées polaires géodésiques. Dans un plan de Riemann à courbure totale non positive, les cercles géodésiques coïncident avec les vrais cercles, dont les propriétés énoncées au n° 3 se trouvent un peu simplifiées. Si les propriétés a), b), f) et g) ne subissent aucun changement, les propriétés c) et d) peuvent se ramener à

c′) La fonction $L(r)$ est analytique pour toute valeur de r.

La propriété e) est à remplacer par

e′) $\frac{dL(r)}{dr} = 2\pi - C(r)$.

De f) et de e′) on tire la formule

$$L(r) = 2\pi r - \int_0^r C(\varrho)\, d\varrho .$$

Or à l'extérieur du domaine $\mathfrak{B}$, c'est-à-dire en tout cas pour $0 < \varrho < \frac{L}{2\pi}$, on a $C(\varrho) > -\delta$. D'où l'on déduit que

$$L(r) < (2\pi + \delta)r \quad .$$

On a d'autre part à cause de la courbure totale non positive

$$L(r) > 2\pi r$$

et

$$A(r) > \pi r^2 \ .$$

Cette inégalité jointe à celle que nous avons obtenue plus haut nous livre

$$A(r) > \frac{\pi L^2(r)}{(2\pi + \delta)^2} \ .$$

On vérifie facilement qu'il existe une valeur r_0 comprise entre 0 et $\frac{L}{2\pi}$ telle que $L(r_0) = L$. Pour cette valeur, on a $A(r_0) > \frac{\pi L^2}{(2\pi + \delta)^2}$. Puisque δ est arbitrairement petit, cette formule démontre bien l'existence d'une courbe fermée — le vrai cercle de rayon r_0 — de longueur L, limitant un domaine d'aire supérieure à $\frac{L^2}{4\pi} - \varepsilon$. On a donc $\overline{A}(L) = \frac{L^2}{4\pi}$, et le lemme 4 est démontré.

Démonstration du théorème B. L'inégalité isopérimétrique de Radó et Beckenbach nous apprend que dans un plan de Riemann à courbure non positive et non identiquement nulle, il n'existe pas de courbe fermée de longueur L, limitant un domaine d'aire $\frac{L^2}{4\pi}$. Il n'existe donc pas de courbe limitant un domaine d'aire maximum, $\overline{A}(L)$, puisque d'après le lemme 4, $\overline{A}(L) = \frac{L^2}{4\pi}$.

Remarquons toutefois qu'il existe, d'après la définition même de $\overline{A}(L)$, une suite de courbes fermées $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots \mathfrak{F}_n, \ldots$ de longueur L, limitant des domaines dont l'aire $A(\mathfrak{F}_n)$ tend vers $\overline{A}(L)$. Le lemme 1 et le lemme 4 nous permettent d'affirmer que cette suite de courbes diverge dans le plan de Riemann et s'éloigne indéfiniment de tout domaine borné.

Dans le théorème B, l'hypothèse accessoire concernant l'intégrale de la courbure totale est essentielle, comme le montre le cas du plan hyperbolique, où l'on sait que ce théorème n'est pas valable. On peut cependant la remplacer par une hypothèse analogue, mais non équivalente. Le théorème s'énonce alors

Théorème B'. *Dans un plan de Riemann à courbure totale non positive et pour lequel la courbure totale tend vers zéro à l'extérieur d'un domaine suffisamment grand, parmi toutes les courbes fermées de longueur* L, *il n'en existe aucune qui limite un domaine d'aire maximum* (L).

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème B; elle est basée sur un lemme analogue au lemme 4, et que nous nous bornons à citer:

Lemme 4'. *Dans un plan de Riemann à courbure totale non positive et pour lequel la courbure totale tend vers zéro à l'extérieur d'un domaine suffisamment grand, on a*

$$A(L) = \frac{L^2}{4\pi} \; .$$

5. Nos résultats s'appliquent naturellement à toute surface ordinaire de l'espace euclidien, satisfaisant aux hypothèses de nos plans de Riemann. C'est en particulier le cas de plusieurs surfaces du second degré, et de nombreuses surfaces de révolution, auxquelles nous voulons consacrer encore quelques lignes.

Le théorème A nous apprend par exemple que sur tout *paraboloïde elliptique* ou sur *chacune des nappes d'un hyperboloïde à deux nappes*, parmi toutes les courbes fermées de longueur donnée, il en existe au moins une qui limite un domaine d'aire maximum. Le théorème B nous permet d'affirmer par contre que sur *le paraboloïde hyperbolique*, pour lequel on sait que $C_T = -2\pi$, parmi toutes les courbes fermées de longueur donnée, il n'en existe aucune qui limite un domaine d'aire maximum.

Nous nous permettrons encore de faire remarquer que, sur une surface donnée, le théorème A ne nous fournit aucune indication sur les courbes particulières qui limitent un domaine d'aire maximum, sinon qu'il en existe au moins une; il peut par exemple très bien en exister plusieurs, et même une infinité. La recherche de ces courbes pourra donc encore offrir de grandes difficultés. Même pour des surfaces aussi simples que les surfaces de révolution, la solution n'est pas immédiate; il n'est en effet pas du tout certain que les parallèles (au sens habituel du mot) livrent ce maximum. Pour le paraboloïde de révolution, il semble bien que ce soit le cas, mais il n'en est sûrement pas de même pour la surface dont l'équation en coordonnées cylindriques est $z = r^4$. Un examen plus approfondi de la démonstration du théorème A permet de prévoir que les courbes limitant un domaine d'aire maximum doivent contenir, du moins pour des valeurs suffisamment petites de L, au moins un des points où la courbure totale est maximum, si de tels points existent sur la surface; pour la surface $z = r^4$, ces points sont situés sur le cercle $r = \frac{\sqrt[6]{2}}{2}$, $z = \frac{\sqrt[3]{4}}{16}$.

Rappelons d'autre part que la condition nécessaire pour qu'une courbe fermée $\mathfrak{F}$ limite un domaine d'aire maximum est que sa courbure géodésique soit constante. Un corollaire du théorème A est l'existence dans tout plan de Riemann à courbure non négative de courbes fermées à courbure géodésique constante. Examinons pour terminer le cas des plans de Riemann à courbure totale négative. L'inégalité isopérimétrique de Radó et Beckenbach nous montre que l'aire d'un domaine limité par une courbe fermée de longueur donnée L possède une borne supérieure $\overline{A}(L)$. Si d'autre part le plan de Riemann considéré satisfait à l'hypothèse accessoire du théorème B ou du théorème B$'$, nous savons qu'il n'existe pas de courbe de longueur donnée L, limitant un domaine d'aire maximum $\overline{A}(L)$. Ceci ne signifie pas du tout que dans ce plan de Riemann il n'existe pas de courbe fermée à courbure géodésique constante. Au contraire, on peut facilement donner des plans de Riemann satisfaisant à ces hypothèses, et sur lesquels on connaît toute une famille de ces lignes; nous pensons aux plans de Riemann, que l'on pourrait appeler „de révolution", et dont nous nous bornerons à donner un exemple simple.

Soit le plan de Riemann donné en coordonnées polaires géodésiques par la forme quadratique

$$ds^2 = dr^2 + (r + r^3)^2 d\varphi^2 .$$

Les lignes $r =$ constante sont évidemment à courbure géodésique constante, mais comme ce plan de Riemann satisfait aux hypothèses du théorème B$'$, ces courbes ne sauraient limiter un domaine d'aire maximum, par comparaison avec toutes les courbes fermées de même longueur. Ceci montre clairement que la condition de la courbure géodésique constante pour une courbe fermée de longueur donnée limitant un domaine d'aire maximum, n'est pas suffisante. Il nous a paru intéressant de citer cet exemple, tiré du champ même des problèmes isopérimétriques, parce qu'il illustre une fois de plus l'importance d'une démonstration d'existence dans ces questions.

(Reçu le 27 octobre 1942.)