Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 15 (1942-1943)

Artikel: Intorno ai sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica.

Autor: Severi, Francesco di

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14889

Intorno ai sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica

Di FRANCESCO SEVERI, Roma

Una Nota di F. Enriques[1]) mi dà occasione di tornare su alcuni punti d'una mia Memoria del 1940[2]), da lui giudicati "un po' oscuri„. Li esamino e li chiarisco nelle pagine seguenti, rettificando qualche inesattezza in cui Enriques è caduto e segnalando, indipendentemente dalla sua critica, nuove importanti questioni nelle parti della teoria, che si ritenevano definitivamente assestate.

1. Il teorema fondamentale della teoria dei sistemi continui concerne la completezza della serie caratteristica d'un sistema continuo completo di curve algebriche C, sopra una superficie algebrica (irriducibile) F. Lo chiamo, dovendo citarlo spesso, il teorema T.

Un primo dubbio del critico riguarda il lemma del n. 17 della mia Memoria M, necessario alla dimostrazione di T. L'A. non precisa su qual punto del n. 17 il dubbio cada. Ad ogni modo sta di fatto che una circostanza infinitesimale un po' riposta, rendeva imperfetta, ai fini del mio lavoro, la deduzione del lemma, come risultò da un esempio addotto da E. Bompiani. La imperfezione fu rimossa, sotto determinate ipotesi, da una mia Nota presentata all'Accademia d'Italia il 16 gennaio 1942[3]) e pubblicata prima che fosse inviata ai "Commentarii„ la critica alla quale rispondo. Su ciò ritorno nel n. 5.

2. Sempre a proposito del teorema T, il critico, passando dal terreno dei dubbi a quello della maggiore o minore complessità dell'intera dimostrazione, aggiunge una propria "osservazione risolutiva„ che, a suo avviso, riduce la dimostrazione a quattro paginette.

Suppongo per un istante che la breve dimostrazione del critico sia immune da obiezioni, mentre accade il contrario. Nell'introduzione della M ricordai che il ragionamento di B. Segre, al quale risale il merito

---

[1]) Sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica. Questi Commentarii, t. 15, 1942/43, p. 227.

[2]) La teoria generale dei sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica. Memorie della R. Accademia d'Italia, vol. XII, 1941, pp. 337—430. Questa Memoria vien qui designata con M.

[3]) Sul limite dell'intersezione di due curve variabili sopra una superficie le quali tendano ad avere una parte comune. Rendiconti della R. Accademia d'Italia, 1942, p. 1. Citata in seguito come Nota N.

d'un ulteriore accostamento alla completa dimostrazione algebrico-geometrica di T, dopo la mia critica del 1921, si riferisce — e l'Autore stesso, del resto, lo dichiara[4]) — ai soli sistemi *regolari* irriducibili. Nella M avvertii pure che Segre aveva creduto di poter conseguire l'estensione ai sistemi qualunque appoggiandosi sopra un teorema d'unicità, da me dato nel 1906[5]), il quale si riferisce ai sistemi continui completi aventi per elementi non già *curve*, come a B. Segre occorreva, ma *sistemi lineari*. Per guisa che la citata Memoria di Segre *lascia insoluta la questione nei riguardi dei sistemi sovrabbondanti*.

Orbene anche Enriques si limita *ai sistemi regolari* e si contenta di affermare, ma non di dimostrare, che il teorema "si lascia pure estendere a sistemi speciali o no, regolari o sovrabbondanti,,. Invece io mi occupo di sistemi qualunque: da ciò la maggior complessità della dimostrazione. Che l'ipotesi limitativa adottata dal critico semplificasse, si sapeva già da B. Segre. Nel fatto la dimostrazione esposta da Enriques collima con quella originaria di Segre, che apparisce più complessa, ma non troppo, soltanto perché è sviluppata in modo circostanziato, in relazione a cautele (precisazione dei sistemi continui, dove ci si muove, quali intersezioni di falde analitiche lineari) che la mia critica del 1921 consigliava[6]).

La vera semplificazione sostanziale sarebbe l'"osservazione risolutiva,, cui Enriques allude nel § 1 e che è contenuta dal § 2, n. 2) della sua Nota. Ma *l'osservazione non è fondata*. Vediamone il perché.

Si tratta, data su F una curva irriducibile E, con un gruppo Γ di nodi variabili, tendente ad una curva spezzata $E_0 = C + D$ ed un'altra curva irriducibile $L \equiv E + H$, che passi pel gruppo $(E, H) + \Gamma$, ove H è una curva fissa scelta in $|H| = |L - E|$, di trovare il limite del gruppo $(E, L) - (E, H) - \Gamma$ quando $E \to E_0$ ed L tende ad una L_0 contenente come parte C.

Il critico afferma che per determinar tale limite si può considerare il fascio variabile irriducibile individuato entro $|L|$ delle $L, E + H$ e sostituire alla L tendente ad L_0, un'altra curva dello stesso fascio, la quale ,,al limite dia una curva $\bar{L}$ (corrispondente ad $E_0 = C + D$) irri-

---

[4]) Annali di matematica, t. XVII, 1938, pp. 113, 120.

[5]) Loc. cit., p. 110. Memoria M, p. 345.

[6]) La sola nuova osservazione semplificatrice fatta dal critico riguarda la circostanza che "non occorre domandarsi se in conseguenza degli $m - p_g$ punti doppi loro imposti le curve E posseggono (conservandosi irriducibili) qualche altro punto doppio,,. Però anche l'uso di quest'osservazione apparisce sommario, in quanto, nell'eventualità accennata, si ha da fare su E con serie lineari neutre (M, p. 374) e non già con serie lineari complete in senso ordinario. Il critico prescinde da ciò, mentre occorre almeno un semplice ricorso alle serie neutre o qualche altra considerazione che ne sostituisca l'uso.

ducibile,,. Così il gruppo limite resterebbe ben definito quale intersezione di E_0 con una $\bar{L}$ non avente parti comuni con E_0.

Ma (a prescinder da un'altra obiezione di carattere rigorista, di cui dirò sotto e che si può rimuovere con adeguate cure, allungando naturalmente l'argomentazione) è facile vedere che una curva *irriducibile* limite $\bar{L}$ siffatta, o soltanto, come basterebbe, una $\bar{L}$ limite non contenente come parte C, *non esiste.*

Invero, comunque si scelga la L variabile, dentro al fascio della $E + H$ e della L originaria, il limite di quella appartiene al fascio limite, individuato dalle L_0, $E_0 + H$, aventi la parte C comune. Pertanto *ogni* possibile limite di curve L del fascio individuato dalle L, $E + H$ è una curva spezzata contenente come parte C. È insomma il gruppo base del fascio variabile che tende a priori, *contrariamente all'opinione del critico*, a divenire indeterminato. La determinazione del gruppo base limite deve perciò esser fatta con più sottili accorgimenti infinitesimali, ai quali per ora non si sfugge.

3. Altre considerazioni è istruttivo aggiungere qui. Anzitutto l'"osservazione risolutiva,, di Enriques s'applicherebbe tal quale all'esempio ch'egli aveva addotto contro l'originaria dimostrazione di B. Segre (pagg. 346 e 363 della M), bastando all'uopo segare la serie canonica completa sulla E^* variabile, di cui a pag. 363 della M, invece che colle aggiunte del quinto ordine, colle aggiunte dell'ottavo ordine passanti pel gruppo comune ad E^* e ad una curva fissa H del 3° ordine. In questo caso la conclusione sarebbe errata; donde, anche a posteriori, l'insussistenza dell'osservazione.

Ma, ritornando all'osservazione medesima, riferita alla prova del teorema T, si vede non soltanto che è a priori indeterminato il gruppo base del fascio variabile, ma che può essere addirittura indeterminato il fascio limite, in quanto L_0 può coincidere con $E_0 + H$. E meno che mai allora una considerazione semplicista soccorre.

4. Ho alluso sopra ad un'obiezione di carattere rigorista, che pur bisogna superare in un'esposizione metodica, com'io intendevo di fare nella M, sacrificando un poco la concisione. Ecco di che cosa si tratta.

Nel campo algebrico, come nel dominio delle funzioni analitiche olomorfe o meromorfe, non ha senso preciso di parlare del limite d'un ente (algebrico o analitico), che appartenga come elemento ad un insieme (algebrico o analitico) variabile, se non si sia prima fissata la legge di variazione dell'ente in un sistema (analitico, complesso) ∞^1, che, entro un campo (algebrico o analitico) conveniente, si possa riguardare come un "ramo" di funzione analitica. Viceversa, quando questa legge di variazione è fissata, il limite esiste sempre[7]). Ciò dipende essenzialmente dal fatto che una funzione d'una variabile, olomorfa o meromorfa in un punto, ha ivi un determinato limite, comunque ci si avvicini al punto; mentre una funzione di più variabili, meromorfa in un punto, può ivi avere una indeterminazione. Perciò nel lemma del n. 17 parlo di curve "funzioni olomorfe d'un parametro" e nella dimostrazione del teorema T cerco di effettuar sempre passaggi al limite di curve e di gruppi entro rami analitici ∞^1. Non ha invero senso, senza ulteriore precisazione, di parlare del limite d'*un* gruppo d'una serie lineare infinita, variabile, anche se la serie, globalmente considerata, tende verso un limite.

Nell'argomento semplificativo tentato dal critico occorreva dunque di fissar prima razionalmente, rispetto alla E variabile, il gruppo $(E, L) - (E, H) - \Gamma$ del quale egli cercava il limite.

Tutto ciò spieghi la relativa laboriosità del processo dimostrativo della M, il quale è, d'altro canto, nella stessa linea di semplicità concettuale segnata da una mia Nota del 1905 e dal complemento arrecatovi da B. Segre.

5. Fin qui la risposta al critico, per ciò che concerne il teorema fondamentale. Devo ora aggiungere a proposito di T *altre riflessioni, le quali non hanno nessun rapporto colle critiche di Enriques.* Esse derivan dal riesame della teoria dei sistemi continui di curve su F, che ho dovuto fare in quest'occasione; ed attestano l'estrema difficoltà d'una teoria, che pure essendo nata nel 1904 coll'introduzione ch'io feci allora del concetto di serie caratteristica d'un sistema continuo, non ha raggiunto l'assetto definitivo.

Non si può cioè, allo stato delle cose, asserire che la serie caratteristica d'un sistema continuo completo di curve (sia pure irriducibili, senza punti multipli) sopra una superficie F, sia sempre completa. Ad ogni modo gli eventuali sistemi completi per cui la serie caratteristica non è completa debbon su qualunque superficie considerarsi come eccezionali.

Invero, il trapasso dai sistemi regolari ai sistemi continui determinati da sistemi lineari sovrabbondanti, fatto da B. Segre in una Nota del 1931[8]), non è conclusivo (l'ho già detto nel n. 2). Ma anche il procedimento di B. Segre relativo ai sistemi regolari e quello della M dànno luogo ad altre obiezioni, relative a inaspettati fenomeni infinitesimali, che

[7]) Ved. a pag. 173 della mia Memoria, I fondamenti della geometria numerativa, Annali di matematica, t. XIX, 1940.

[8]) Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. LV, p. 443.

si manifestano quando si ha da fare con rami o falde analitiche non lineari o tangenti, quali si presentano in un più profondo esame della questione, di cui dirò altra volta.

Nè sembra agevole completare il procedimento restando nello stesso ordine di idee. L'esempio seguente costituisce in questo senso un sintomo non incoraggiante.

Sulla F sia C una curva irriducibile, priva di punti multipli, appartenente ad un sistema continuo $\{ C \}$ avente in C la serie caratteristica completa. La serie caratteristica di $| C |$ sia inoltre incompleta. Assumasi su C un gruppo $G \equiv (C, C)$, non appartenente alla serie caratteristica di $| C |$. Per G non passa alcun sistema continuo di curve di $\{ C \}$, contenente C, perché un tal sistema sarebbe necessariamente un fascio ed un fascio lineare, in quanto possiede punti base. Ma allora G apparterrebbe alla serie caratteristica di $| C |$, contro il supposto. Per G passa bensì una curva infinitamente vicina a C (cioè vi è qualche curva $\overline{C}$ di $\{ C \}$, tale che quando $\overline{C} \to C$ risulta $(\overline{C}, C) \to G$); tuttavia non è possibile avvicinarsi a C tenendo fissi i punti di G. Eppure sulla C col gruppo base G, cioè sulla curva $C - G$, esiste la serie caratteristica (è la serie lineare zero). Ecco dunque un sistema ∞^0 completo come sistema continuo, a serie caratteristica esistente e incompleta [9]).

Un esempio più espressivo di un sistema ∞^0 completo a serie caratteristica di ordine > 0, incompleta, sarà indicato nel n. 10.

Questi esempi indurrebbero a pensare che qualche dettaglio del complesso ragionamento incosciamente escluda i sistemi completi ∞^0, anche se dotati di serie caratteristica effettiva. Un esame più approfondito non mi fa apparir probabile una simile eventualità.

Vi è ad ogni modo su qualunque F un'altra vasta classe di sistemi continui a serie caratteristica completa: son quelli che ho studiati fin dal 1905 e che ho chiamato *aritmeticamente effettivi*. Se C è aritmeticamente effettiva, cioè se la dimensione virtuale del sistema lineare $| C |$ è non negativa, essa appartiene sempre ad un sistema continuo $\{ C \}$ costituito da ∞^q sistemi lineari, $q = p_g - p_a$ essendo l'irregolarità di F. Detta r la dimensione del generico $| C |$, la serie caratteristica di $\{ C \}$, sulla generica C di $\{ C \}$, ha la dimensione $r + q - 1$, mentre la serie caratteristica di $| C |$ ha la dimensione $r - 1$; onde la prima delle due serie non può esser incompleta, pel teorema di Castelnuovo, che assegna q come massimo della deficienza della serie caratteristica d'un sistema lineare. Tutto ciò è ben noto e l'ho richiamato soltanto per comodità.

---

[9]) Se si vuole, ci si può riferire ad una superficie trasformata birazionale di F, in cui i punti di G sieno divenuti curve eccezionali.

In conclusione:

La completezza della serie caratteristica d'un sistema continuo completo $\{C\}$, *sovra una curva* C, *irriducibile, priva di punti multipli, appartenente ad una superficie irregolare, è acquisita soltanto se* C *è aritmeticamente effettiva e generica entro* $\{C\}$ [10]).

Se esiste un sistema continuo completo $\{C\}$ a serie caratteristica incompleta, la sua C generica non è aritmeticamente effettiva. Si tratta dunque eventualmente di un sistema di tipo molto eccezionale.

6. Analoghe ipotesi sulla natura del sistema vanno introdotte nelle estensioni del teorema fondamentale ai casi più complessi considerati nella M (curve con nodi o fissi o virtualmente variabili o virtualmente inesistenti, curve riducibili, ecc.).

Anche nei riguardi del *teorema generale di esistenza e di unicità*, dato per la prima volta nella M, occorrono simili avvertenze.

Tutto ciò sarà fatto nella traduzione tedesca della M, che sto preparando[11]). È però opportuno avvertire sino da ora che *le accennate alternative non producono alcuna limitazione nelle proprietà essenziali di geometria sopra una superficie, che sono state dedotte dal teorema fondamentale dal 1904 in poi; e sopratutto in quelle relative agl'integrali semplici di 1ª specie.*

7. Debbo ora tornare al critico, per parlare di un altro dubbio sollevato sui nn. 16 e 26 della M. Dico subito che nessuna eccezione soffron le deduzioni del n. 16, mentre il dubbio è legittimo nei riguardi del n. 26.

In fondo la critica del n. 26 sorgeva spontanea in un attento lettore (l'Autore è invece spesso il peggior revisore dei propri lavori quando son compiuti) dal confronto della conclusione di quel n. con l'esempio addotto nell'Oss. 1ª del n. 28, che io gettai là, senza approfondirne l'esame. Quest'esempio è il perno della critica di Enriques, il quale invece lo studia largamente e ne trae giuste conclusioni.

Gli enunciati di pag. 397 e di pag. 404, legati al n. 26, conservan ciò nonostante validità riferiti che siano ad un sistema lineare $|C|$ generico entro al proprio sistema continuo. Aggiungerò che la possibilità che un particolare sistema lineare $|C|$, d'un sistema continuo completo $\{C\}$,

---

[10]) Se la superficie è regolare, è ben noto che il teorema vale per **tutti** i sistemi continui completi (che son necessariamente lineari).

[11]) Per comprendere gli eventuali casi d'eccezione, il teorema T sarà ivi fiancheggiato da un teorema di Riemann-Roch per sistemi continui completi, esprimente che il limite inferiore o dimensione virtuale d'un tal sistema ha la stessa forma della dimensione virtuale d'un sistema lineare completo, salvo la sostituzione di p_a con p_g.

abbia dimensione maggiore del generico $|C|$, senza essere esorbitante, si verifica similmente per le serie lineari contenute nelle serie abeliane di gruppi di punti sopra una curva: il che è segnalato a pag. 394 della M. I due fatti posson essere ravvicinati.

8. Prima di procedere oltre stimo necessario di avvertire che la *mia* critica al teorema fondamentale (n. 5) investe pure la dimostrazione della regolarità del sistema aggiunto ad una curva irriducibile C, atta a definire su F un sistema continuo, che non sia un fascio irrazionale[12]). La dimostrazione si conserva ineccepibile se la superficie F non contiene sistemi continui completi (almeno ∞^1) a serie caratteristica incompleta[13]), mentre non è esauriente se sistemi siffatti esistono.

Il teorema però è valido in qualunque ipotesi. Eccone una dimostrazione trascendente[14]). Supporremo per semplicità che C non abbia punti multipli.

Si determini sulla F (priva di punti multipli in un conveniente spazio) un multiplo abbastanza alto $|E|$ delle sezioni iperpiane, che contenga parzialmente C e lasci un residuo $|D| = |E - C|$ irriducibile, privo di punti base. Fatta l'imagine proiettiva di $|E|$, si avrà una trasformata birazionale, priva di punti multipli, della data superficie: continueremo a chiamarla F. Su questa esisterà un sistema lineare di sezioni iperpiane E contenenti C; e si potrà sempre proiettare F in S_3 in guisa che una di queste sezioni iperpiane si proietti in una sezione piana α della superficie Φ proiezione, e che Φ sia dotata di singolarità ordinarie (linea doppia e punti tripli). Indichiamo con $f(x, y, z) = 0$ l'equazione della Φ, d'ordine m, e con $y = 0$ l'equazione di α. La sezione di Φ con α è una curva $C + D$ (così continuiamo a chiamar le trasformate delle curve originarie C, D) di equazione:

$$f(x, 0, z) \equiv \gamma(x, z)\,\delta(x, z) = 0 ,$$

ove $\gamma = 0$, $\delta = 0$ son le equazioni di C, D. La C, per la genericità delle operazioni compiute per arrivare a Φ, non ha che nodi sulla linea doppia di Φ.

Le superficie d'ordine $m - 3$ aggiunte a Φ staccano ivi, fuori della linea doppia, il sistema $|E'| = |C' + D|$, aggiunto a $|E|$, essendo

[12]) Ved. la mia Nota: Sulla regolarità del sistema aggiunto ad un sistema lineare di curve appartenenti ad una superficie algebrica. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XVII, 2° sem., 1908, p. 467.

[13]) E non soffre dunque eccezioni p. es. sopra una superficie regolare.

[14]) Che riferiscesi naturalmente alle sole superficie irregolari, giacché, come ho detto, la dimostrazione geometrica non soffre limitazioni per le superficie regolari.

$|C'|$ aggiunto a $|C|$. Onde le superficie d'ordine $m-3$ aggiunte a Φ e passanti per D, staccano su Φ, fuori della linea doppia e di D, il sistema completo $|C'|$. Sia $\varphi(x, y, z) = 0$ l'equazione di una di queste ultime aggiunte, la quale si ridurrà su $y = 0$ ad un'equazione del tipo

$$\varphi(x, 0, z) \equiv \psi(x, z)\,\delta(x, z) = 0\,,$$

$\psi = 0$ essendo un'aggiunta d'ordine $\mu - 3$ alla curva C di ordine μ. I periodi dell'integrale abeliano

$$\int \frac{\varphi(x, \bar{y}, z)}{f'_z}\,dx \qquad (\bar{y} \text{ parametro}) \tag{1}$$

ai $2q$ cicli (invarianti) sezioni della curva comune a Φ e ad $y = \bar{y}$ con un sistema fondamentale di $2q$ cicli tridimensionali di Φ, son notoriamente nulli (Picard). Quando la sezione considerata riducesi ad α ($\bar{y} = 0$), ognuno dei predetti cicli tridimensionali stacca su $C + D$ la somma di due cicli, uno in C e l'altro in D; sicché la somma dei valori di (1) ($\bar{y} = 0$) lungo questi due cicli è zero.

Ora (1) riducesi per $\bar{y} = 0$ all'integrale

$$\int \frac{\psi(x, z)\,\delta(x, z)\,dx}{\gamma'_z(x, z)\,\delta(x, z) + \gamma(x, z)\,\delta'_z(x, z)}\,, \tag{2}$$

epperò ha valore nullo lungo ogni ciclo di D ($\delta = 0$) e quindi valore nullo lungo ogni ciclo invariante di C. Ma su C l'integrale (2) diviene l'integrale di 1ª specie:

$$\int \frac{\psi(x, z)\,dx}{\gamma'_z(x, z)}\,,$$

pertanto quest'integrale ha periodi nulli ai cicli invarianti di C.

Se $|C'|$ non è regolare, cioè s'esso sega su C una serie lineare di gruppi canonici avente deficienza minore del valore normale q, vi è qualche gruppo canonico, subordinato su C da un integrale semplice di 1ª specie di F, il quale appartiene ad una curva del tipo $\psi = 0$ segata su α da una delle aggiunte d'ordine $m - 3$ a Φ, passanti per D. E questo perché, essendo C atta a definire un sistema continuo diverso da un fascio irrazionale, i q integrali semplici di 1ª specie di Φ subordinan su C q integrali abeliani di 1ª specie indipendenti.

Ne deriva che qualcuno dei q integrali semplici di 1ª specie di Φ ha periodi nulli lungo i cicli invarianti di C. Ciò è assurdo, perché ogni ciclo lineare di Φ è legato mediante un'omologia a tali cicli invarianti. *Si conclude così che* $|C'|$ *è regolare.*

L'estensione per questa via a curve con punti multipli e a curve riducibili sarà indicata nella traduzione tedesca della M.

9. Desidero, innanzi di tornare al critico, di fare un'altra osservazione.

Se A, B son due curve della superficie F, la seconda delle quali sia atta a definire un sistema continuo diverso da un fascio irrazionale, e tali che (A, B) sia parzialmente contenuto nella serie caratteristica completa $|(A, A)|$ di A, *e inoltre che il sistema completo delle* A *per* (A, B) *abbia sulla data* A *la serie caratteristica completa*, non soltanto la curva virtuale $A - B$ esiste nel campo dell'equivalenza algebrica (si ottengono curve effettive $A - B$ imponendo alle A per (A, B) il passaggio per un punto generico di B), ma anche nel campo lineare. Invero, un sistema continuo di curve A per (A, B), contenente la data A, consta di curve equivalenti tra loro, perché esse staccano su B gruppi equivalenti (un medesimo gruppo). È questa in fondo l'argomentazione essenziale della mia Nota del 1908 citata nel n. prec. Di quest'osservazione profitterò nel n. successivo.

10. Posso ora riprender l'esame dei dubbi sollevati da Enriques e fermarmi sull'ultimo di essi riguardante il teorema da me dato nel 1916, che concerne un sistema continuo completo di $\infty^{q'}$ sistemi lineari sopra una superficie d'irregolarità q $(0 < q' < q)$. Il teorema afferma che questo sistema è una varietà abeliana. Il critico asserisce che la dimostrazione poggia sopra una proposizione illusoria. Invece, tale proposizione, riguardante, si badi bene, sistemi continui completi su varietà *abeliane*, non è affatto illusoria. L'esempio in contrario da lui addotto non si riferisce a varietà abeliane. *Vi è dunque qui un equivoco inesplicabile.*

Tuttavia la mia dimostrazione del teorema in oggetto non è esatta[15]), sebbene per una cagione, sulla quale non giova intrattenermi, ben diversa da quella indicata da Enriques. Ad ogni modo il teorema sussiste sotto larghe ipotesi, come ora vedremo.

Cominciamo coll'osservare che un sistema continuo $\{|C|\}$, anche non completo, di sistemi lineari $|C|$ su F, stacca sopra una curva irriducibile A, atta a definire un sistema continuo diverso da un fascio irrazionale,

---

[15]) Nel gennaio del 1942, qualche mese innanzi che la critica di Enriques entrasse in redazione, m'ero accorto della lacuna nella dimostrazione del 1916 e ne avevo parlato con un ricercatore del Reale Istituto di Alta Matematica.

una serie contenuta totalmente in una serie abeliana d'irregolarità q. Invero, $| A' |$ stacca su A una serie canonica di deficienza q, sicché gl'integrali abeliani di 1ª specie di A inerenti ai gruppi canonici (A, A'), formano un sistema regolare Σ di $p - q$ integrali riducibili indipendenti (p genere di A), complementare del sistema regolare di q integrali riducibili indipendenti staccato su A dagl'integrali semplici di 1ª specie di F; e le somme fornite dagl'integrali di Σ nei gruppi (C, A) si conservan costanti non soltanto quando C varia in $| C |$, ma anche quando si passa da un $| C |$ ad un altro[16]).

Ciò significa che i gruppi (C, A) appartengono alla serie completa γ, d'irregolarità q, definita da uno qualunque di essi: i gruppi di γ son caratterizzati dal fatto che sovr'essi forniscon somme costanti gl'integrali di Σ. Ne deriva (M, p. 391) che prese in $\{|C|\}$ tre curve qualunque C, C_1, C_2 la serie $|(C + C_1 - C_2, A)|$ è effettiva ed appartiene a γ.

Premesso questo supponiamo che:

1) Il sistema $\{|C|\}$ consti di $\infty^{q'}$ $(q' > 0)$ sistemi lineari almeno ∞^1 non composti colle curve di un medesimo fascio lineare o no (eliminate le eventuali curve fisse, da cui si può prescindere).

È possibile allora assumere $A \equiv C + C_1$, in quanto $| C + C_1|$ è irriducibile e di grado > 0. E siccome in tal caso $|(C, A) + (C_1, A)|$ non è che la serie caratteristica di A, si può affermare che questa serie contiene parzialmente (C_2, A) e lascia come residuo una serie effettiva di ordine $2[C, C] > 0$. Aggiungiamo qui l'ipotesi che:

2) Il sistema continuo completo delle curve di $\{|A|\}$ passanti pel gruppo (C_2, A) abbia su A la serie caratteristica completa (il che sarebbe vero sempre, se su F il teorema T non soffrisse eccezioni).

In virtù del n. 9 si conclude che esiste effettivo il sistema lineare $|C + C_1 - C_2|$, il quale appartiene a $\{|C|\}$, se questo sistema è completo e $|C|$ è ivi generico. Tanto basta, in forza d'un notissimo ragionamento, per concludere che $\{|C|\}$ è abeliano.

11. I sistemi di curve linearmente isolati son casi banali d'eccezione fra i quali rientrano quelli considerati da Enriques; ma questo Autore non ha avvertito che un esempio più significativo vien fornito dall'analisi

---

16) Ved. la mia Nota: Sulla teoria degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica. Rend. della R. Accademia dei Lincei, vol. XXX_5, 1º sem. 1921; e precisamente la Nota VI, p. 329. Il teorema è ivi riferito ad una A atta a definire un fascio lineare di grado > 0, ciò che sarebbe per noi sufficiente. L'estensione è ovvia.

da lui fatta della rigata F del 5° ordine, dello S_3, con una retta doppia ed una tripla, da me indicata al n. 28 (Oss. 1ª) di M. Su F esiste invero un sistema continuo completo $\{|C|\}$ di ∞^1 sistemi lineari $|C|$ sovrabbondanti, di genere 2, grado 5 e dimensione 3. La serie caratteristica del sistema continuo sopra una C è una g_5^3, completa non speciale. Costruita in tal caso la curva $A \equiv C + C_1$, non vi è un sistema continuo infinito di curve del sistema completo $\{|A|\}$ (di ∞^2 sistemi lineari) passanti per un gruppo (C_2, A) e comprendenti A, perché se no $\{|C|\}$ sarebbe abeliano, mentre evidentemente non lo è. Nonostante questo esiste (n. prec.) la serie caratteristica effettiva, di ordine 10, sulla curva $A - (C_2, A)$ [e vi son sempre curve infinitamente vicine ad A passanti per (C_2, A)]. La curva $A - (C_2, A)$ costituisce pertanto un sistema ∞^0 completo come sistema continuo e a serie caratteristica effettiva d'ordine > 0, incompleta.

(Reçu le 30 novembre 1942.)

P. S. — Uno studio approfondito dei sistemi *analitici* di curve algebriche d'un piano o d'una superficie mi ha portato ulteriormente alla conclusione che *il teorema della completezza della serie caratteristica d'un sistema continuo completo Σ di curve algebriche C, sopra una superficie algebrica F, vale in relazione ad ogni curva di Σ alla quale sia possibile avvicinarsi movendosi in un sistema analitico ∞^1 di curve C, avente (in piccolo) l'indice 1*; *condizione questa soddisfatta dalla generica C, quando Σ è almeno ∞^1*.

Esiston effettivamente sistemi *infiniti* Σ dotati di curve totali C particolari (anche irriducibili e prive di punti multipli) sulle quali la serie caratteristica, costituita in ogni caso da gruppi equivalenti, o non è lineare (e non può quindi essere completa) o, pur essendo lineare, non è completa. Esempi di questa natura sono stati costruiti dal mio assistente Dott. Guido Zappa in un lavoro di prossima pubblicazione.

I sistemi analitici Σ, d'indice 1 (in piccolo), di curve C d'ordine m, su F, son quelli e soltanto quelli che in una proiezione di F in un piano multiplo, generica rispetto al proiettando sistema, si proiettano in rami lineari dello spazio lineare di tutte le curve piane d'ordine m. Se l'intorno d'una curva C in un sistema analitico ∞^r, tracciato su F, si proietta in una falda lineare del predetto spazio, è sempre possibile avvicinarsi a C in quell'intorno, lungo un ramo lineare. Pertanto le curve che posson dar luogo ad eccezioni sono, come prevedevo, quelle algebricamente isolate e quelle che appartengono ad un sistema continuo completo infinito, essendo ivi origini di falde superlineari (nel senso sopra espresso).

(Reçu le 11 février 1943.)