**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 15 (1942-1943)

**Artikel:** Sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica.
**Autor:** Enriques, Frederigo di
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-14888

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 07.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# Sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica

Di FEDERIGO ENRIQUES, Roma

## I. Introduzione.

In una Memoria recentemente pubblicata dalla R. Accademia d'Italia[1]), *F. Severi* offre il risultato di una revisione critica de "La teoria generale dei sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica,,. Disgraziatamente alcuni punti di questa Memoria riescono un po' oscuri o danno luogo a qualche dubbio, sicché occorre un nuovo esame dell'argomento, nell'interesse della scienza. Tanto più che da questa critica scaturisce una nuova posizione di problemi, che ci piace di segnalare all'attenzione degli studiosi.

1) Anzitutto è per noi oscura, e perciò non convincente, la deduzione del lemma del n. 17, che spiega, precisa o completa, il passaggio più delicato di un ragionamento di *B. Segre*, accennato nella Nota dei Comptes rendus dell'Accademia di Francia "Sur un théorème fondamental de géométrie sur les surfaces algébriques,, (9 gennaio 1939) [2]). Io stesso ho provato qualche difficoltà a ricostruire codesto ragionamento, sulla base del cenno contenuto nella detta Nota e di spiegazioni verbali datemi dal Segre stesso. Ma ho fatto poi un'osservazione risolutiva, che vale a sciogliere la questione senza bisogno di ricorrere a delicate considerazioni infinitesimali. Così viene colmata, nel modo più semplice, la lacuna che — in seguito ad una critica del Severi del 1921 — era apparsa sussistere nella dimostrazione del teorema fondamentale sulle superficie irregolari, da me data nel 1904, ed egualmente nelle altre dimostrazioni algebrico-geometriche del teorema, costruite sullo stesso modello[3]). Nel § II espongo

---

[1]) Vol. XII, 1941.

[2]) Non mi consta se a questa Nota sia seguita una più estesa pubblicazione dell'Autore sull'argomento.

[3]) *F. Enriques*, Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari, Rendic. R. Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna, 1904.

*F. Severi*, Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare, Rendic. Circolo Mat. di Palermo, 1905. — Nuovi contributi alla teoria dei sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica, Rendic. Acc. Lincei, 2 e 16 Aprile 1916 (Cfr. n. 1). — Una dimostrazione trascendente del teorema fu data da *H. Poincaré* (1910) e riesposta più tardi, con semplificazioni, da *Severi* e da *Lefschetz*. La dimostrazione di B. Segre, di cui si parla nel testo, è stata proposta nella Memoria "Un teorema fondamentale della geometria sulle superficie algebriche e il principio.

questa dimostrazione semplificata del teorema, secondo il concetto di B. Segre, mostrando dunque che "sopra una superficie di generi $p_a$ e $p_g$ ($p_a < p_g$), ogni sistema lineare irriducibile, senza punti base, che sia non speciale e regolare, è contenuto in un sistema continuo $\infty^q (q = p_g - p_a)$ di sistemi lineari disequivalenti".

2) Dall'estensione del teorema fondamentale al caso dei sistemi continui che contengono un sistema lineare $|C|$ comunque sovrabbondante, mediante considerazioni svolte nei nn. 16 e 26 della sua Memoria, il Severi trae la conseguenza che "un qualsiasi sistema lineare sovrabbondante $|C|$, che abbia la serie caratteristica deficiente, è contenuto in un sistema continuo di curve formato di sistemi lineari egualmente sovrabbondanti,,.

Riferiamoci al caso più semplice in cui $|C|$, sistema non speciale i cui caratteri indichiamo con $n$ e $\pi$, abbia la sovrabbondanza $d$, con $0 < d < q$ $(q = p_g - p_a)$, e quindi la dimensione

$$p_a + n - \pi + 1 + d ,$$

e possegga una serie caratteristica di deficienza eguale a $q - d$, coll'indice di specialità $p_g$. L'estensione del teorema fondamentale cui si è accennato porta che $|C|$ sia contenuto in un sistema continuo di curve di dimensione

$$p_g + n - \pi + 1 ,$$

ma, a priori, si può supporre che talvolta, e forse di regola, tale sistema sia formato con $\infty^q$ sistemi lineari generalmente regolari (la cui dimensione si ecceda soltanto da $|C|$), piuttosto che da $\infty^{q-d}$ sistemi lineari sovrabbondanti, colla stessa sovrabbondanza costante $d$. Così accade di fatto nell'esempio che il Severi stesso adduce (osservazione I del n. 28), senza approfondirne l'esame. Si tratta della superficie $F$ del 5° ordine possedente una retta tripla e una retta doppia, nello spazio ordinario $S_3$. Questa $F$ è una rigata di genere due ($p_g = 0$, $p_a = -2$, $q = 2$); e le sue sezioni piane $C$ formano un sistema lineare completo, sovrabbondante, colla sovrabbondanza $d = 1$, la cui serie caratteristica ha la deficienza $q - d = 1$. Orbene $|C|$ non appartiene ad un sistema continuo formato di $\infty^1$ sistemi lineari analoghi, bensì ad un sistema $\{C\}$ formato di $\infty^2$ sistemi lineari regolari, di dimensione 2, fra i quali figura il sistema $\infty^3 |C|$.

---

di spezzamento,, (Annali di Mat. 1938) e completata dall'Autore stesso nella citata Nota dei Comptes rendus (9/1/1939) in seguito ad un'obiezione mossa da *Enriques* nella Nota "Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari,, (Lincei, 3 Giugno 1938). Cfr. *F. Enriques*, Sur la propriété caractéristique des surfaces algébriques irrégulières (Comptes rendus, 3/1/1939).

Il motivo dell'eccezione, in rapporto al n. 26 della Memoria Severi, viene spiegato nel § III di questo scritto.

3) L'osservazione 2) porterebbe che si dovesse modificare l'enunciato della proposizione esposta nel n. 28 della citata Memoria, ritornando alla forma in cui il Severi la enunciava per la prima volta nella Nota "Nuovi contributi alla teoria dei sistemi continui di curve . . .,, (R. Accademia dei Lincei, 2 e 16 Aprile 1916): "ogni sistema continuo completo costituito di $\infty^d$ sistemi lineari distinti, con $0 < d < q$ $(q = p_g - p_a)$, sopra una superficie coi generi $p_a$ e $p_g$ $(p_a < p_g)$, è una varietà abeliana,,, sicché la sua esistenza imporrebbe che *fra le combinazioni lineari dei q integrali di prima specie di Picard con 2q periodi, annessi alla superficie, ve ne sieno d riducibili con 2d periodi.*

Ma la dimostrazione di questo teorema offerta nel n. 7 della Nota 1916 (a pag. 560 dei Rendic. Lincei), e che il Severi richiama nella recente Memoria, si appoggia ad una proposizione illusoria: da ciò che una varietà abeliana $V_q$, $\infty^q$, contenga una serie $\infty^{q-d}$ d'indice 1 di varietà $V_d$ $(0 < d < q)$ non segue che queste $V_d$ costituiscano un sistema d'imprimitività per il gruppo $\infty^q$ delle trasformazioni di $V_q$, e perciò siano, esse stesse, abeliane. La cosa è già chiarita dal primo esempio che si presenta per $d = 1$. Invero le superficie $F$ che contengono un fascio di genere $q\,(>1)$ di curve $C$ posseggono $q$ integrali semplici di prima specie, ma non — in generale — integrali riducibili.

4) Infine anche la precisazione del teorema di Riemann-Roch, che il Severi espone nella sua Memoria (n. 34), va incontro a qualche eccezione, come appare da esempi che ebbi già a recare nelle mie prime "Ricerche di geometria sulle superficie algebriche,, del 1893. Si possono avere, sopra una superficie, sistemi lineari comunque grandi, non regolari: tali sono, per esempio, i sistemi che posseggono curve fondamentali di genere $\varrho > 0$. La deduzione dell'Autore non ha tenuto conto di una circostanza che già si presenta per le superficie regolari: "il sistema $|C'|$ aggiunto ad una curva $C$ non è regolare, ma sovrabbondante, quando la $C$ è una curva riducibile, composta di parti sconnesse fra loro,,.

Se la $C$ è connessa, $|C'|$ è regolare, almeno per $p_a = p_g = p$; questo teorema, che è in nostro possesso fino dalla primavera del 1941, esige delicate considerazioni sulla connessione delle curve comunque formate di componenti semplici e multiple, che abbiamo richiamate ed esposte in una Nota di prossima pubblicazione. In essa dimostriamo che le curve canoniche pure sono connesse, e quindi i sistemi pluricanonici sono regolari per $p > 0$ e $p(^1) > 1$.

## II. Dimostrazione del teorema fondamentale sulle superficie irregolari.

Sia $|C|$ un sistema lineare irriducibile, privo di punti base, sopra la superficie $F$ di generi $p_a$ e $p_g$ ($p_a < p_g$), e, per semplicità di discorso, supponiamo che esso sia non speciale e regolare, sicché, designando i suoi caratteri con $n$ e $\pi$, la sua dimensione sarà

$$p_a + n - \pi + 1 .$$

A $|C|$ associamo un altro sistema, egualmente irriducibile, senza punti base e regolare, $|D|$, che si supporrà abbastanza grande in guisa che anche il sistema $|C+D|$ sia regolare.

Designeremo con $\nu$ e $\varrho$ i caratteri, grado e genere, di $|D|$ e con $m$ il numero delle intersezioni di una $C$ con una $D$. Fissiamo appunto una $C$ e una $D$ irriducibili, senza punti multipli, particolari, e nel gruppo degli $m$ punti $G = CD$ distinguiamo un gruppo $G'$ di $m - p_g$ punti e un residuo gruppo $G''$ di $p_g$ punti; quest'ultimo potrà supporsi non appartenere ad una curva canonica di $F$. Secondo le nostre ipotesi le curve di $|C+D|$ segheranno sulla $C$ una serie non speciale completa, mentre le curve dello stesso sistema per $G = CD$ segheranno su $C$ una serie completa speciale di indice di specialità $p_g$, sicché occorre che le curve di $|C+D|$ che passano per $G'$ passino in conseguenza per $G''$, e quindi seghino sulla $C$ una serie completa non speciale che ha come fissi i $p_g$ punti di $G''$.

Ora, nel sistema lineare $|C+D|$, che contiene la particolare curva spezzata $C+D$, consideriamo le curve $E$ variabili, aventi come limite codesta curva, e possedenti $m - p_g$ punti doppi (assegnati) prossimi agli $m - p_g$ punti di $G'$. Vogliamo dimostrare che le dette curve $E$ posseggono, in conseguenza dei punti doppi assegnati, altri $p_g$ punti doppi, tendenti ai punti del gruppo $G''$, e perciò (in forza del principio di degenerazione o di spezzamento) per $E \to C + D$ codeste $E$ si spezzano in due componenti, che tendono rispettivamente a $C$ e $D$.

Se non si avvera la detta tesi, vorrà dire che le curve $E$ (prima di passare al limite) sono irriducibili; e non importa domandarsi se per conseguenza degli $m - p_g$ punti doppi loro imposti esse posseggano qualche altro punto doppio tendente ad un punto di $G''$, che riterremo — in ogni caso — virtualmente inesistente[4]). Il discorso procede a ridurre all'assurdo l'ipotesi delle $E$ irriducibili, nel modo che segue.

---

[4]) *B. Segre* (nella Memoria degli Annali di Mat. del 1938) s'indugia a scartare questa ipotesi, richiamando all'uopo la dimostrazione che io ebbi a dare di un teorema di Kneser sul gruppo di una $g^1_n$ contenuta in una $g^2_n$. Ma nella mia Nota "Sulla proprietà caratteristica ...„ ho già rilevato che questa dimostrazione non è essenziale, e perciò deve esser lasciata da parte se non si vuole complicare inutilmente le cose.

Se le $E$ sono irriducibili, si costruisca sopra una $E$ variabile la serie caratteristica resa completa, $g$, del sistema continuo $\{E\}$, che verrà segnata, fuori di punti fissi, da un conveniente sistema lineare $|L|$; questa $g$ avrà una certa dimensione $R$, che calcoliamo qui appresso. Ora, per $E \to C + D$, la serie $g$ si riduce, al limite, ad una serie composta di gruppi su $C$ e di gruppi su $D$, ma la dimensione della serie complessiva, come vedremo, diventa $R - 1$. Questa conclusione è assurda, perché la continuità esige che la dimensione di una serie lineare si conservi, o almeno non diminuisca, in un qualsiasi passaggio al limite!

La dimostrazione di B. Segre così disegnata (e già espressa nella memoria degli Annali del 1938), per essere rigorosa, deve tener conto dell'intero limite di $g$, e così non soltanto della serie segnata su $C+D$ dalle curve irriducibili limiti delle $L$, ma — a priori — anche dei gruppi limiti dei gruppi di $g$ che si ottengano in corrispondenza alle $L$ che vengano a spezzarsi in guisa da contenere parzialmente $C$ o $D$, dove le intersezioni $CL$ e $DL$ appariscano indeterminate. Questa esigenza è stata messa in luce da un paradosso in cui Enriques, polemizzando contro la prima dimostrazione offerta dal Segre, vedeva qualcosa che sembra contraddire al principio di essa[5]). Ma a posteriori faremo vedere che, nel caso che ci occupa, ogni gruppo di $g$ segnato su una $E$ da una $L$ si può sempre immaginare segato da un'altra $L$ che, nel passaggio al limite, per $E \to C + D$, tende ad una curva irriducibile le cui intersezioni con $C$ e $D$ restano determinate.

Realizziamo il disegno della dimostrazione indicata. Abbiamo detto che la serie $g$ viene segnata sopra una $E$ variabile (con $m - p_g$ punti doppi) dalle curve di un conveniente sistema $|L|$. Per avere la serie completa conviene considerare le curve di un sistema $|L| = |C+D+H|$,

[5]) Enriques, avendo tentato già prima per proprio conto la via ora indicata dal Segre (nel caso più semplice $p_g = 1$), si era fermato di fronte all'esempio del sistema delle curve piane $C_8$ d'ordine 8 dotate di 15 punti doppi: queste $C_8$ possono degenerare in due quartiche $C_4$ e $\overline{C}_4$, che avranno — oltre i 15 punti comuni limiti dei 15 punti doppi delle $C_8$ — un sedicesimo punto comune $X$; ora la serie canonica $g^5_{10}$ sopra una $C_8$ segata dal sistema lineare delle quintiche aggiunte, che passano per i 15 punti doppi di $C_8$, viene a ridursi alla serie composta di due $g^2_4$ appartenenti alle dette $C_4$, aumentata del punto fisso $X$; e così la sua dimensione 5 sembra abbassarsi a $2 + 2 = 4$!

Questo è il paradosso che Enriques ha presentato come obiezione alla dimostrazione di *B. Segre*, nella Nota "Sulla proprietà caratteristica ...,,, ed è merito di B. Segre di averlo risolto, spiegando come esso non contraddica al principio di continuità, a priori inoppugnabile. Precisamente qui accade che la $g^5_{10} = g^2_4 + \bar{g}^2_4 + 2X$ composta come si è detto non è l'*intero limite* della serie canonica di $C_8$: quando le quintiche aggiunte a $C_8$ tendano a confondersi con una delle quartiche $C_4$, in cui la $C_8$ viene a degenerare, la serie limite su questa $C_4$, che a prima vista appare indeterminata, risulta essere la $g^3_6$ completa somma della $g^2_4$ canonica e di $X$ contato due volte (ai cui gruppi sono da associare i gruppi della serie canonica $\bar{g}^2_4$, sopra l'altra quartica $\overline{C}_4$).

più ampio di $|C+D|$, costruito sommando a $|C+D|$ una conveniente curva $H$, e considerare in ispecie le curve $L$ passanti per le intersezioni delle $E$ con $H$, alle quali curve si imponga inoltre di passare per gli $m - p_g$ punti doppi assegnati di $E$.

La dimensione $R$ della serie $g$, che è la serie caratteristica del sistema $E$ (con $m - p_g$ punti doppi variabili) resa completa, si calcola così. Il sistema $|C+D|$ ha il grado

$$N = n + \nu + 2m$$

e il genere

$$\Pi = \pi + \varrho + m - 1 ,$$

e quindi la dimensione

$$p_a + N - \Pi + 1 = p_a + n + \nu - (\pi + \varrho) + m + 2 .$$

Esso sega sopra una curva di $|C+D|$ una serie lineare di dimensione

$$p_a + n + \nu - (\pi + \varrho) + m + 1$$

e di deficienza $p_g - p_a$. La serie completa viene segata dalle curve $L$ passanti per un gruppo di punti $\Gamma$, intersezione di due curve di $|H|$ e di $|C+D|$, sicché la dimensione di questo sistema, diminuita della dimensione $r$ di $|L - (C+D)| = |H|$, vale

$$p_g + n + \nu - (\pi + \varrho) + m + 2 .$$

Pertanto la dimensione del sistema delle $L$ per $\Gamma$, cui s'imponga di passare semplicemente per gli $m - p_g$ punti doppi assegnati di una $E$ (entro $|C+D|$), sarà

$$2p_g + n + \nu - (\pi + \varrho) + 2 + r ,$$

e la dimensione della serie $g$ segnata da codeste $L$ sulla stessa $E$ varrà

$$R \geqslant n + \nu - (\pi + \varrho) + 2p_g + 1 .$$

Ora, quando $E$ tende a $C+D$, si ottiene come limite della serie $g$, segnata dal corrispondente $|L|$, una serie che si compone dei gruppi di una serie lineare $g_c$ su $C$, da prendere insieme ai gruppi di una serie lineare $g_d$ su $D$. E precisamente vogliamo dimostrare che: ogni gruppo di $g_c$, limite parziale su $C$ di un gruppo di $g$ su $E$, possiede come fissi i $p_g$ punti del nostro $G''$, e quindi la $g_c$ è una serie non speciale di dimensione

$$p_g + n - \pi ;$$

similmente ogni gruppo della $g_d$ su $D$ possiede come fissi i $p_g$ punti di $G''$ e perciò la $g_d$ ha la dimensione

$$p_g + \nu - \varrho \, .$$

Per conseguenza la serie limite di $g$ sulla $C+D$, che è la $g_c + g_d$, ha la dimensione

$$n + \nu - (\pi + \varrho) + 2p_g \ :$$

*una unità di meno* in confronto alla dimensione $R$ della $g$ che appartiene ad una $E$ variabile ($E \to C+D$) !

L'asserto (lim $g = g_c + g_d$ per $E \to C+D$) si prova in base all'osservazione seguente:

1) se una $L$ (segnante su $E$ un gruppo della $g$) si riduce, nel passaggio al limite, ad una curva $\overline{L}$, che non comprenda la $C$ come parte, è senz'altro evidente che il limite del gruppo $EL$ su $C$ è un gruppo segnato da una curva $\overline{L}$ che passa per i punti di $HC (H = L - |C+D|)$ e per quelli del $G'$, ed in conseguenza anche per i punti fissi del gruppo $G''$ ;

2) se, invece, la $L$ tenda ad una curva limite $\overline{L}$ contenente come parte la $C$, si può sempre sostituirla con una curva del fascio definito da $E+H$ e da $L$, che al limite dia una curva $\overline{L}$ (corrispondente ad $E = C+D$) irriducibile.

Questa osservazione 2) sostituisce il lemma di Segre-Severi. In sostanza il lemma, per quel che concerne il nostro caso, viene giustificato dall'osservare che ogni gruppo di $g$ fa parte del gruppo base di un fascio, definito da $E+H$ e da $L$, che al limite viene ad avere due punti base infinitamente vicini, nei punti del $G''$.

Infine dunque l'ipotesi che le $E$ sieno irriducibili è stata ridotta all'assurdo: vuol dire che il sistema continuo delle curve spezzate con $m$ punti doppi cui appartiene $|C+D|$ si definisce imponendo alle curve di $|C+D|$ di possedere $m - p_g$ punti doppi, i rimanenti $p_g$ punti doppi resultandone per conseguenza. E pertanto $|C|$ *dovrà appartenere ad un sistema continuo di curve* $\{C\}$ *di dimensione* $p_g + n - \pi + 1$, *formato di* $\infty^{p_g - p_a}$ *sistemi lineari distinti.*

È il *teorema fondamentale* sulle superficie irregolari, che importa *l'integrità della serie caratteristica del sistema completo* $\{C\}$, cui appartiene il sistema regolare $|C|$. E che, in questa forma, si lascia estendere anche a sistemi $|C|$, speciali o no, regolari o sovrabbondanti.

## III. Sistemi continui $\infty^d$, con $0 < d < q$, sopra una superficie di irregolarità $q$.

Nell'introduzione 2) abbiamo affermato che "possono esistere, sopra una superficie di irregolarità $q = p_g - p_a$, sistemi continui di curve costituiti da $\infty^q$ sistemi lineari completi generalmente regolari, contenenti un particolare sistema sovrabbondante„. E abbiamo addotto l'esempio della superficie $F$ del 5° ordine con una retta tripla ed una doppia, che — nello spazio ordinario $S_3$ — è una rigata di genere 2 ($p_g = 0$, $p_a = -2$, $q = 2$) su cui le sezioni piane $C$ formano un sistema sovrabbondante, di dimensione 3. Questo sistema $|C|$ — si è detto — dà luogo ad una serie caratteristica di deficienza 1, ed è contenuto in un sistema continuo $\{C\}$, formato non da $\infty^1$ sistemi lineari sovrabbondanti, ma da $\infty^2$ sistemi lineari generalmente regolari, fra i quali si trova il solo sistema sovrabbondante $|C|$. Per dimostrare l'asserto si sommi al sistema $|C|$ delle sezioni piane di $F$ una coppia di generatrici $a$ e $b$ sghembe fra loro, e perciò non appartenenti alla $g_2^1$ costituita dalle coppie di rette che escono dai punti della retta doppia. Si avrà così un sistema lineare completo $|L|$, di genere 2 e di grado 9, di dimensione $r \geqslant 9 - 2 - 2 + 1 = 6$, che condurrà a costruire, in uno spazio $S_6$ o $S_7$, una rigata normale $\Phi$ che dà la $F$ per proiezione da due generatrici $a'$ e $b'$, omologhe ad $a$ e $b$. Ora si vede facilmente che la dimensione di $|L| = |C + a + b|$ non può superare 6, cioè che la nostra $F$ non può essere proiezione di una $\Phi$ normale in $S_7$. L'asserto risulta dall'osservare:

1) che la $\Phi$ non può ammettere una retta direttrice doppia, poiché altrimenti la sua proiezione da una generatrice sarebbe un cono;

2) che, così essendo, la rigata $\Phi$, supposta appartenere ad $S_7$, sarebbe segata dagli iperpiani per una coppia di generatrici secondo una residua curva d'ordine 7, normale in un $S_5$, per la quale passerebbero $\infty^1$ iperpiani, e quindi la coppia delle generatrici suddette apparterrebbe sempre ad una $g_2^1$ (ossia sarebbe speciale).

Ciò posto, è chiaro che quando si considerano gli iperpiani di $S_6$ per due generatrici di $\Phi$ si ottiene in generale un sistema lineare regolare $\infty^2$; affinché si abbia fra questi sistemi il sistema $\infty^3|C|$, bisogna che le due generatrici $a$ e $b$, da cui $\Phi$ viene proiettata su $F$, sieno incidenti, cioè passino per un punto $O$, doppio per $\Phi$.

Si avrà dunque su $F$ una serie $\infty^2\{C\}$ di sistemi lineari generalmente regolari, che contiene il sistema sovrabbondante $|C|$. E si può aggiungere che il sistema lineare $\infty^3|C|$ contenuto in $\{C\}$ è un sistema isolato. Altrimenti la rigata $\Phi$ dello $S_6$ dovrebbe possedere una curva direttrice

doppia per $O$, che — avuto riguardo alla sua proiezione $F$ — non potrebbe essere che una retta; ed in tal caso la proiezione di $\Phi$ da una sua generatrice sarebbe un cono.

Concludendo, l'esempio citato non appare conforme alla proposizione di Severi. Ma è interessante osservare che, in altro modo, si ottiene sulla nostra superficie una serie $\infty^1$ di sistemi lineari di genere 2 e grado 5, tutti sovrabbondanti, di dimensione 3. Infatti sono tali i sistemi lineari segati su $\Phi$ dagli iperpiani passanti per il punto doppio $O$ e per una generatrice. E fra questi sistemi ve ne sono due, tangenti ad una delle due falde della rigata in $O$, che contengono parzialmente ciascuno una rete di $|C|$. Per vedere come la detta serie continua di $\infty^1$ sistemi lineari sovrabbondanti venga data su $F$, conviene partire da tale superficie, e costruire su di essa il sistema lineare $|L| = |C+a+b|$, che diventa il sistema delle sezioni iperpiane della superficie $\Phi$, mediante superficie aggiunte ad $F$. Le aggiunte del 3° ordine $\varphi_3$ sono $\infty^5$, e segano sulla rigata $F$ i gruppi di una $g_7^5$. Le $\varphi_4$ aggiunte formano un sistema lineare $\infty^{16}$ e segano $F$ secondo curve unisecanti le generatrici, d'ordine 12. Il sistema $\infty^{16}$ di queste curve ha il grado 19 ed è regolare.

Costringendo le sue curve a contenere un gruppo di generatrici della nominata $g_7^5$, le curve si spezzano nelle dette generatrici e nelle $\infty^3$ sezioni piane $C$, perché le corrispondenti $\varphi_4$ si spezzano in una $\varphi_3$ e in un piano. Così si ottiene intanto il sistema $|C|$, $\infty^3$, delle sezioni piane di $F$: la circostanza che esso sia sovrabbondante si rispecchia in ciò che i gruppi della $g_7^5$ impongono 13 anziché 14 condizioni alle $\varphi_4$.

Per ottenere il sistema $\infty^6 |L|$ che rappresenta la $\Phi$ d'ordine 9 di $S_6$, occorre imporre alle $\varphi_4$ di passare per 5 generatrici di $F$, che insieme alle due $a$ e $b$ da sommare a $|C|$ formino un gruppo della detta $g_7^5$. Dunque il sistema $|L| = |C+a+b|$ verrà segnato su $F$ dalle $\varphi_4$ per le 5 generatrici indicate, e sarà costituito da curve $L$ d'ordine 7; al punto doppio $O$ di $\Phi$ corrisponderà su $F$ una coppia di punti $A$ e $B$, appartenenti rispettivamente alle $a$ e $b$, coppia neutra per cui passano $\infty^5$ curve $L$ (anziché $\infty^4$).

Quindi ai sistemi $\infty^3$ delle sezioni iperpiane di $\Phi$ passanti per $O$ e per una generatrice, corrisponderanno su $F$ sistemi lineari $\infty^3$ (sovrabbondanti) di sestiche per $A$ e $B$. Due di tali sistemi contengono parzialmente due reti di curve con un punto base, risp. in $A$ e $B$: reti che vanno completate aggiungendovi rispettivamente le generatrici $b$ ed $a$.

Aggiungasi che il nominato sistema $\infty^3$ di sestiche è *esorbitante*, cioè — completo come sistema di curve — va ampliato in una varietà $\infty^2$ avente per elementi dei sistemi lineari (in generale di dimensione 2).

L'esempio delle curve di 5° ordine esistenti su $F$ che abbiamo qui

approfondito sembra contraddire al ragionamento di Severi nei n. 16 e 26 della sua Memoria. Sicché occorre chiarire la cosa.

Ad un sistema lineare irriducibile $|C|$, senza punti base, non speciale, che abbia la sovrabbondanza $d$ e la serie caratteristica di deficienza $q-d$ ($q = p_g - p_a$), si associ il sistema regolare, ampio quanto si vuole, $|D|$, per modo che $|E| = |C+D|$ seghi su una $C$ una serie completa e non speciale. Si vede tosto che, per essere $|C|$ sovrabbondante, $|E|$ segherà su una $D$ una serie non completa, di deficienza $d$. Quindi si deduce, con Severi, che anche le curve $E$ passanti per il gruppo di punti $CD$ segano su $D$ una serie colla stessa deficienza $d$. Da ciò, sostanzialmente, l'autore argomenta che non può esistere un sistema continuo $\{C\}$ formato di $\infty^q$ sistemi lineari generalmente regolari, altrimenti le curve di questo infinitamente vicine alla data $C$ dovrebbero dare come resti rispetto ad $|E|$ tutte le curve di $\{D\}$ infinitamente vicine alla data $D$, le quali apparterrebbero — egli opina — a curve $E$ spezzate, vicine alla $C+D$, e *passanti per* $CD$: ciò contradice all'osservazione fatta innanzi che codeste $E$ segano su $D$ una serie deficiente (cioè *non tutta* la serie caratteristica di $\{D\}$).

Ma conviene osservare che, per ipotesi, la dimensione di $|C|$ eccede quella degli altri sistemi lineari regolari che formano il sistema continuo $\{C\}$; perciò un sistema lineare variabile di $\{C\}$ che tenda a $|C|$, avrà curve infinitamente vicine a qualche $C$ di $|C|$, ma non ad ogni $C$ di questo sistema lineare. In conseguenza di ciò le curve di $\{D\}$ infinitamente vicine alla $D$, prese insieme colle corrispondenti curve vicine a $C$, apparterranno sì ad $|E|$, ma non sempre al sistema particolare delle $E$ passanti per il gruppo $CD$.

## IV. Serie continue di curve disequivalenti ed integrali di Picard appartenenti ad una superficie irregolare.

Pongasi che una superficie irregolare $F$, di irregolarità $q = p_g - p_a$, contenga un sistema continuo completo $\{C\}$ formato da $\infty^d$ sistemi lineari distinti, o addirittura da $\infty^d$ curve disequivalenti, dove $0 < d < q$. E sia $\{D\}$ un altro sistema continuo su $F$, formato da $\infty^q$ sistemi lineari, o — se si vuole — da $\infty^q$ curve disequivalenti. Designando con $C_1$ e $C_2$ due curve di $\{C\}$, le operazioni $+ C_1 - C_2$, applicate agli elementi (sistemi lineari o curve) di $\{D\}$, danno luogo a trasformazioni birazionali $T$ della varietà di Picard $V_q$, immagine di $\{D\}$. Ma si possono presentare due casi:

1) Le $T$ formano un gruppo, cioè un sottogruppo $\infty^d$ del gruppo $\infty^q$ delle trasformazioni di $V_q$ in se stessa. In questo caso, fra le combinazioni

lineari dei $q$ integrali semplici di prima specie appartenenti ad $F$, vi sono $d$ integrali riducibili con $2d$ periodi.

2) Le $T$ generano un gruppo più ampio, che — in generale — sarà l'intero gruppo $\infty^q$ della varietà di Picard $V_q$.

Questo secondo caso non si può escludere, come opina l'autore della Memoria in esame. Esso si presenta anzi per una *qualunque* superficie di irregolarità $q$, poiché basta imporre $d<q$ punti base alle curve disequivalenti di un sistema completo $\infty^q$ : in ispecie se $d=q-1$ si ottiene su $F$ un sistema $\infty^1$ che, di regola, ha il genere $p>q$ ; ed i periodi degli integrali di Picard di $F$ rispondono ad integrali riducibili fra i $p$ integrali abeliani appartenenti alla detta serie.

Una famiglia particolare notevole di superficie irregolari su cui esistono sistemi $\{C\}$ rispondenti al nostro secondo caso, appare essere la famiglia delle superficie che contengono un sistema continuo completo $\infty^1$ d'indice $i \geqslant 1$ di curve disequivalenti, formanti un ente algebrico di genere $q (d=1\,,\ 0<1<q)$. In questo caso la varietà di Picard $V_q$, pur non ammettendo integrali di prima specie riducibili, non è una varietà abeliana generale: invero i periodi dei suoi integrali di Picard di prima specie (i cosidetti *moduli di irregolarità*) debbon soddisfare a quelle condizioni di Riemann che caratterizzano fra le varietà abeliane le varietà rappresentative dei gruppi di $q$ punti d'una curva di genere $q$ (funzioni abeliane particolari provenienti dall'inversione degli integrali abeliani di prima specie annessi alla curva).

Lo studio di questa particolare famiglia di superficie d'indice $i>1$, anzi $i>2$, conduce in generale a considerare le serie $\infty^2$ di gruppi di $i$ punti disequivalenti sopra una curva $K$ di genere $q$, priva di integrali di 1ª specie riducibili. Tali serie rispondono a superficie $F$, che — almeno in generale — sembrano possedere un sistema continuo completo $\infty^1$ del genere $q$ di curve $C$ disequivalenti: le $C$ sarebbero le immagini delle serie $\infty^1$ dei gruppi della serie considerata su $K$, che hanno come fisso un punto della curva $K$.

Così può dirsi, all'ingrosso, che codesta famiglia notevole di superficie rispondente alla nostra ipotesi 2) sarebbe costituita da superficie la cui varietà di Picard è una varietà abeliana particolare, rappresentativa dei gruppi di $q$ punti di una curva di genere $q$ ($>1$).

(Reçu le 20 mars 1942.)