Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 15 (1942-1943)

Artikel: Sur un théorème fondamental de la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles.

Autor: Ostrowski, Alexandre

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14886

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sur un théorème fondamental de la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles

Par ALEXANDRE OSTROWSKI à Bâle

1. Soient $A_\nu(x_1, \ldots, x_n)$, $B_\nu(x_1, \ldots, x_n)$, $\nu = 1, \ldots, n$, $2n$ fonctions des $x_1, \ldots, x_n$, continues et douées des dérivées continues du premier ordre au voisinage d'un point $P_0(a_1, \ldots, a_n)$.

Si une fonction $z(x_1, \ldots, x_n)$ continue et douée des dérivées continues du premier et du second ordre au voisinage de P_0, satisfait dans ce voisinage aux deux équations

$$X(z) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \frac{\partial z}{\partial x_\nu} = 0 \ , \quad Y(z) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu \frac{\partial z}{\partial x_\nu} = 0 \ , \tag{1}$$

elle satisfait aussi au voisinage de P_0 à l'équation

$$Z(z) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu \frac{\partial z}{\partial x_\nu} = 0 \ , \ C_\nu = X(B_\nu) - Y(A_\nu) \ , \ \nu = 1, \ldots, n \ . \tag{2}$$

Ceci résulte évidemment de l'identité

$$Z(u) = X(Y(u)) - Y(X(u)) \tag{3}$$

qu'on vérifie immédiatement au voisinage de P_0 pour chaque fonction $u(x_1, \ldots, x_n)$ dont les dérivées premières et secondes restent continues dans ce voisinage.

Ce n'est que tout récemment (1939) que M. *E. Schmidt*[1]) a réussi à démontrer que (2) est encore une conséquence de (1), si l'on suppose seulement que z possède des dérivées continues du *premier* ordre dans le voisinage de P_0. La démonstration de M. *Schmidt* repose sur une transformation assez délicate des intégrales n-ples et permet aussi une extension de la relation (3) au cas où $X(u)$, $Y(u)$ possèdent les dérivées continues du premier ordre.

Une autre démonstration donnée peu de temps après (1940) par M. *O. Perron*[2]) est plus „algébrique", mais encore assez compliquée.

---

[1]) *E. Schmidt*, Bemerkungen zum Fundamentalsatz der Theorie der Systeme linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Wiener Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. 48 (1940), pp. 426—432.

[2]) *O. Perron*, Das Verschwinden der Klammersymbole in der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungssysteme. Math. Annalen, Bd. 117 (1940/41), pp. 686—693.

Dans ce qui suit, nous donnons une démonstration très simple et très élémentaire d'un théorème un peu plus général que celui de M. *Schmidt*. Cette démonstration n'emploie que les notions élémentaires du calcul différentiel, en particulier celle de la différentielle totale.

2. On dit qu'une fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ possède une *différentielle totale*[3]) à l'origine $P_0(0, \ldots, 0)$ si l'on a au voisinage de P_0

$$f(x_1, \ldots, x_n) - f(0, \ldots, 0) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu x_\nu + o(r) \quad , \quad r = \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu| \ , \tag{4}$$

pour $r \to 0$, où $\alpha_\nu = f'_{x_\nu}(0, \ldots, 0)$ sont des constantes.

Nous aurons besoin de quelques lemmes sur les différentielles totales:

a) *Par une homographie régulière*

$$x_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} y_\mu \ , \ y_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} a'_{\nu\mu} x_\mu \ , \quad \nu = 1, \ldots, n \ , \tag{5}$$

une fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ douée d'une différentielle totale en P_0 se transforme en une fonction $g(y_1, \ldots, y_n)$ y possédant une différentielle totale, et l'on a en P_0

$$\left[\frac{\partial g}{\partial y_\nu}\right]_{P_0} = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\nu} \left[\frac{\partial f}{\partial x_\mu}\right]_{P_0} \ . \tag{6}$$

On démontre a) en remplaçant les x_ν dans (4) par

$$\sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} y_\mu \ .$$

b) *Si $f(x_1, \ldots, x_n)$ s'annule en P_0 et y possède une différentielle totale, et si $g(x_1, \ldots, x_n)$ est une fonction continue en P_0, fg possède une différentielle totale en P_0, et l'on a*

$$\left[\frac{\partial (fg)}{\partial x_\nu}\right]_{P_0} = g_0 \left[\frac{\partial f}{\partial x_\nu}\right]_{P_0} \ , \ g_0 = g(0, \ldots, 0) \ . \tag{7}$$

En effet, en posant $g(x_1, \ldots, x_n) = g_0 + \sigma(x_1, \ldots, x_n)$, où $\sigma(x_1, \ldots, x_n) \to 0$ avec $r = \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu|$, on obtient, en multipliant (4) par g

---

[3]) Cf. par exemple: *De la Vallée Poussin*, Cours d'Analyse Infinitésimal, t. 1, 3ème éd., 1914, pp. 140—146. — *I. W. Hobson*, The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier Series, vol. 1, 3rd ed. (1927), p. 419. — *O. Haupt* und *G. Aumann*, Differential- und Integralrechnung, Bd. 2 (1938), pp. 111—125.

$$fg = \sum_{\nu=1}^{n} g_0 \alpha_\nu x_\nu + o(r) \quad . \tag{8}$$

c) *Soit* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *continue au voisinage de* P_0. *Si* $\frac{\partial f}{\partial x_\lambda}, \frac{\partial f}{\partial x_\kappa}, (\kappa \neq \lambda)$ *existent au voisinage de* P_0 *et possèdent des différentielles totales en* P_0, *on a en* P_0

$$\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\lambda}\right) = \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\kappa}\right) \quad . \tag{9}$$

On trouve une démonstration, d'ailleurs très simple, de ce théorème dû à M. *W. H. Young*, dans les traités d'analyse[4]).

3. Voici l'énoncé exact de notre résultat:

Théorème. Soient A_ν, B_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, $2n$ *fonctions de* $x_1, \ldots, x_n$, *continues dans le voisinage d'un point* P_0 $(a_1, \ldots, a_n)$ *et douées des différentielles totales en* P_0. *Soit* u *une fonction de* $x_1, \ldots, x_n$ *continue et douée des dérivées continues du premier ordre au voisinage de* P_0. *Alors, si les expressions*

$$X(u) = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \quad , \quad Y(u) = \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \tag{10}$$

possèdent au point P_0 *des différentielles totales, on a en* P_0

$$Z(u) = X(Y(u)) - Y(X(u)) \ , \tag{11}$$

où $Z(u)$ *est donné par*

$$Z(u) = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \quad , \quad C_\nu = X(B_\nu) - Y(A_\nu) \quad . \tag{12}$$

Dans la démonstration, on peut supposer que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

4. *Démonstration du théorème.* Posons

$$\left.\begin{array}{ll} A_\nu^0 = A_\nu(0, \ldots, 0) \ , & B_\nu^0 = B_\nu(0, \ldots, 0) \\ A_\nu^* = A_\nu - A_\nu^0 \quad , & B_\nu^* = B_\nu - B_\nu^0 \end{array}\right\} \nu = 1, \ldots, n \ . \tag{13}$$

D'après l'hypothèse du théorème et le lemme b) du numéro 2, les expressions

[4]) Cf. *De la Vallée Poussin*, l. c., pp. 145—146. — *Hobson*, l. c. pp. 427—428. — *Haupt* und *Aumann*, l. c., p. 125. Nous donnons un résultat plus général dans une communication: Note sur l'interversion des dérivations et les différentielles totales, qui paraît dans ce volume p. 222.

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^* \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \quad , \quad \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu^* \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \tag{14}$$

possèdent des différentielles totales en P_0 et l'on a dans ce point

$$X\left[\sum_{\nu=1}^{n} B_\nu^* \frac{\partial u}{\partial x_\nu}\right] = \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu^0 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu^* \frac{\partial u}{\partial x_\nu} =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu^0 \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \frac{\partial B_\nu^*}{\partial x_\mu} = \sum_{\nu=1}^{n} \left[\sum_{\mu=1}^{n} A_\mu^0 \frac{\partial B_\nu}{\partial x_\mu}\right] \frac{\partial u}{\partial x_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} X(B_\nu) \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \ .$$

De même, on a en P_0

$$Y\left(\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^* \frac{\partial u}{\partial x_\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{n} Y(A_\nu) \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \ .$$

Donc, on obtient, en retranchant et en utilisant (12), en P_0

$$X\left(\sum_{\nu=1}^{n} B_\nu^* \frac{\partial u}{\partial x_\nu}\right) - Y\left(\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^* \frac{\partial u}{\partial x_\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \ . \tag{15}$$

De l'autre côté, puisque les expressions (10) et (14) possèdent en P_0 des différentielles totales, il en est de même, d'après (13), des expressions

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^0 \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \quad , \quad \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu^0 \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \ . \tag{16}$$

Il suffit maintenant de démontrer que l'on ait, en P_0, la relation

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^0 \frac{\partial}{\partial x_\nu} \sum_{\mu=1}^{n} B_\mu^0 \frac{\partial u}{\partial x_\mu} - \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu^0 \frac{\partial}{\partial x_\nu} \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu^0 \frac{\partial u}{\partial x_\mu} = 0 \ , \tag{17}$$

pour en déduire, en y ajoutant (15), la relation (11).

5. Or, si les deux systèmes A_ν^0, B_ν^0 sont proportionnels, (17) est évident. Si ces deux systèmes ne sont pas proportionnels, posons pour $\nu = 1, \ldots, n$:

$$x_\nu = A_\nu^0 \, y_1 + B_\nu^0 \, y_2 + \sum_{\mu=3}^{n} a_{\nu\mu} \, y_\mu \ , \tag{18}$$

en choisissant les constantes $a_{\nu\mu}$ de façon que la transformation (18) soit une homographie non-singulière.

On obtient alors par la relation (6) du lemme a) du numéro 2, en désignant par v la transformée de u:

$$\frac{\partial v}{\partial y_1} = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^0 \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y_2} = \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu^0 \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \quad ,$$

et ces deux expressions possèdent avec les expressions (16) des différentielles totales en P_0. On a donc en P_0, en appliquant (6) à $\frac{\partial v}{\partial y_2}$ et à $\frac{\partial v}{\partial y_1}$

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^0 \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial v}{\partial y_2}\right) = \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial v}{\partial y_2}\right) \quad , \quad \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu^0 \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right) = \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right) ,$$

et la relation (17) devient

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial v}{\partial y_2}\right) = \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right) \tag{19}$$

et résulte immédiatement du lemme c) du numéro 2, [5]) C. Q. F. D.

---

[5]) Pendant la revision des épreuves j'apprends que M. *Gillis*, Bull. Soc. R. Sc. Liège, Déc. 1940, pp. 197—212, a trouvé indépendamment le théorème de M. *Schmidt*. La démonstration de M. *Gillis* repose sur les mêmes principes que celle de M. *Schmidt*.

(Reçu le 28 juillet 1942.)