

Zeitschrift:	Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber:	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band:	15 (1942-1943)
Artikel:	Zur Theorie der Klassenkörper der Kreiskörper, insbesondere der Strahlklassenkörper der quadratisch imaginären Zahlkörper.
Autor:	Gut, Max
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-14882

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zur Theorie der Klassenkörper der Kreiskörper, insbesondere der Strahlklassenkörper der quadratisch imaginären Zahlkörper

Von MAX GUT, Zürich

Herrn RUDOLF FUETER

*anlässlich seiner 25 jährigen Lehrtätigkeit
als Ordinarius in Zürich zugeeignet*

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Bestimmung des maximalen absolut-abelschen Körpers, der im Klassenkörper eines beliebigen absolut-abelschen Körpers, insbesondere auch im Strahlklassenkörper eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers enthalten ist.

Mit k soll hier immer ein algebraischer Zahlkörper von endlichem Grade bezeichnet werden und unter „Ideal von k “ durchwegs ein *ganzes* Ideal verstanden werden, speziell nennen wir weiter ein Ideal *ungerade*, wenn es durch keinen Primidealteiler von (2) teilbar ist, *gerade*, wenn es vom Einheitsideal verschieden und nur durch Primidealteiler von (2) teilbar ist. Ferner bedeute k_0 immer den Körper der rationalen Zahlen und

$c(m) = k_0(e^{\frac{2\pi i}{m}})$ den Körper der m -ten Einheitswurzeln. Jeder absolut-abelsche Körper ist bei geeigneter Wahl der natürlichen Zahl m ein Unterkörper von $c(m)$, und daher wollen wir jeden absolut-abelschen Körper kurz einen *Kreiskörper* nennen.

Ist k ein beliebiger Kreiskörper, \mathfrak{f} ein Ideal von k , so bezeichne $K\{\mathfrak{f}\}$ den zu k gehörigen Strahlklassenkörper mit dem Führer \mathfrak{f} und $k\{\mathfrak{f}\}$ den maximalen Unterkörper von $K\{\mathfrak{f}\}$, der absolut-abelsch ist. Insbesondere ist also $K\{1\}$ der absolute (Hilbert'sche) Klassenkörper, $k\{1\}$ der maximale Unterkörper dieses Körpers, der absolut-abelsch ist.

Die vorliegende Arbeit zerfällt in zwei Teile. Im ersten kürzern Teile wird in

1. eine neue einfache Formulierung für die Bestimmung von $k\{1\}$ gegeben, falls k ein beliebiger Kreiskörper ist;
dann auf Grund dieser Formulierung in
2. der Körper $k\{1\}$ auf eine neue Art bestimmt für den Fall, daß k ein imaginärer, ferner bestimmt für den Fall, daß k ein reeller quadratischer Zahlkörper, endlich das Kompositum von absolut-quadratischen Zahlkörpern ist;

und in

3. der Körper $k\{1\}$ bestimmt für den Fall, daß k ein absolut-zyklischer Körper vom ungeraden Primzahlgrad q oder das Kompositum von solchen ist, die alle den Grad q haben.

Der zweite umfangreichere Teil der vorliegenden Arbeit befaßt sich mit der Bestimmung von $k\{\mathfrak{f}\}$, falls k ein quadratisch-imaginärer Zahlkörper ist, also $k = k_0(\sqrt{m})$ ist, wo m eine beliebige quadratfreie negative ganze Zahl bedeutet und ebenso \mathfrak{f} beliebig ist.

Ist die Norm von \mathfrak{f} eine Primzahl oder die Potenz einer Primzahl, so wollen wir in dieser Arbeit \mathfrak{f} als ein *Stammideal* bezeichnen. Benutzt man die Formel für die Strahlklassenzahl, so wird sich insbesondere für ein Stammideal \mathfrak{f} ein genauer Überblick über den Aufbau von $K\{\mathfrak{f}\}$ aus $K\{1\}$ ergeben.

Im 4. Abschnitt stellen wir einige allgemeine Sätze und Formeln zur Bestimmung von $k\{\mathfrak{f}\}$ zusammen. Hierauf bestimmen wir $k\{\mathfrak{f}\}$ zunächst für den Fall, daß \mathfrak{f} ein Stammideal ist gemäß folgender Übersicht:

\mathfrak{f} ist ein ungerades Stammideal :

5. Abschnitt: 1. Hauptfall: $p = \mathfrak{p}$, $n(\mathfrak{p}) = p^2$.
6. Abschnitt: 2. Hauptfall: $p = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$, $n(\mathfrak{p}) = n(\mathfrak{p}') = p$.
7. Abschnitt: 3. Hauptfall: $p = \mathfrak{p}^2$, $n(\mathfrak{p}) = p$.

\mathfrak{f} ist ein gerades Stammideal :

8. Abschnitt: $m \equiv 3 \pmod{4}$.
9. Abschnitt: $m \equiv \pm 2 \pmod{8}$.
10. Abschnitt: $m \equiv 5 \pmod{8}$.
11. Abschnitt: $m \equiv 1 \pmod{8}$.

Endlich bestimmen wir im 12. Abschnitt $k\{\mathfrak{f}\}$, falls \mathfrak{f} weder das Einheitsideal, noch ein Stammideal ist.

Das klassische Problem, alle in bezug auf einen quadratisch-imaginären Zahlkörper relativ-abelschen Körper durch singuläre Werte von analytischen Funktionen festzulegen, ist auf mehrere Arten gelöst worden. Je nachdem man z. B. die Kreiskörper explizite adjungiert oder nicht, je nachdem man ferner bei festgehaltenem Grundkörper nur die Wurzeln¹⁾ der Klassengleichung oder aber die Wurzeln aller Ringklassengleichungen der absolut-invarianten Modulfunktion adjungiert, endlich je nachdem man die Wurzeln der Teilungsgleichungen der Jacobi'schen oder aber der Weierstraß'schen elliptischen Funktionen adjungiert, ergibt sich eine andere Form der Theorie. Wir wollen hier nicht auf eine Darstellung der

¹⁾ Natürlich genügt immer auch die Adjunktion je einer Wurzel, da es sich ja um relativ-Galois'sche Gleichungen handelt!

begangenen Wege eintreten, sondern nur die beiden grundlegenden Tatsachen benutzen, daß die Wurzeln der Klassengleichung der absolut-invarianten Modulfunktion jedenfalls den (Hilbert'schen) Klassenkörper des imaginär-quadratischen Grundkörpers liefern, und nach deren Adjunktion die Wurzeln der zu festem \mathfrak{f} gehörigen Teilungsgleichung der Weierstraß'schen Funktion

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(z; \omega_1, \omega_2) &= \frac{g_2(\omega_1, \omega_2)}{g_3(\omega_1, \omega_2)} p(z; \omega_1, \omega_2), \text{ falls } m \neq -2 \pm 1, \\ \mathfrak{S}(z; \omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{g_2(\omega_1, \omega_2)} p^2(z; \omega_1, \omega_2), \text{ falls } m = -1, \\ \mathfrak{S}(z; \omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{2g_3(\omega_1, \omega_2)} p^3(z; \omega_1, \omega_2), \text{ falls } m = -3,\end{aligned}$$

den Strahlklassenkörper zu vorgegebenem \mathfrak{f} festlegen.

Daß die Gesamtheit der so erzeugten Körper gerade vollständig alle in bezug auf quadratisch-imaginäre Grundkörper relativ-abelschen Körper liefern, ist von Fueter²⁾ bewiesen worden. Für den *Beweis* dieser fundamentalen Aussage wird noch die Funktion

$$\mathfrak{T}(z; \omega_1, \omega_2) = \frac{p\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{4}\right) - p\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)}{p(z) - p\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)}$$

und damit der *Ringklassenkörper* zum Führer 4 herangezogen. Der Grund liegt darin, daß einerseits die arithmetische Natur der Multiplikationsformeln der Funktion $\mathfrak{S}(z; \omega_1, \omega_2)$ zu wenig bekannt ist³⁾, tieferliegend aber darin, daß der zum Führer 4 \mathfrak{f} gehörige Strahlklassenkörper sich aus den zu den Führern $4p^w$ gehörigen Strahlklassenkörpern rational zusammensetzt, wo p^w die in \mathfrak{f} enthaltenen Primidealpotenzen durchläuft, während diese Eigenschaft i. a. nicht gilt, wenn man den Faktor 4 wegläßt⁴⁾. Von dieser beweistechnischen Notwendigkeit soll also hier ganz abgesehen werden.

²⁾ Vergleiche die ausführliche Darstellung in *Fueter, Rudolf, Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen. 1. Teil (1924), 2. Teil (1927)*, B. G. Teubner, Berlin und Leipzig. In der vorliegenden Arbeit werden diese beiden Bände mit fortlaufender Paginierung immer kurz durch die Angabe des Autornamens zitiert.

³⁾ Vergleiche *Weber, Heinrich, Lehrbuch der Algebra, 3. Band; 2. Auflage (1908); Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig; S. 576.*

⁴⁾ Vergleiche hierzu auch das 2. Alinea im Vorwort zum 2. Teile von *Fueter*.

Da die Kreiskörper absolut-abelsch sind, sind sie a fortiori relativ-abelsch zu jedem quadratisch-imaginären Zahlkörper, und daher werden auch sie geliefert durch die Wurzeln der Klassengleichungen der absolut-invarianten Modulfunktion und durch die Wurzeln der Teilungsgleichungen der \mathfrak{S} -Funktion. Die vorliegende Arbeit setzt sich also in anderer Form ausgedrückt auch zum Ziele, festzustellen, wie dies geschieht. Umgekehrt zeigt diese Untersuchung, welche Kreiskörper die Galois'sche Gruppe der Klassengleichung der absolut-invarianten Modulfunktion und einer Teilungsgleichung der \mathfrak{S} -Funktion reduzieren. Für die Klassengleichung ist das Resultat⁵⁾ klassisch und wohlbekannt, für die Teilungsgleichungen der \mathfrak{S} -Funktion ist aber diese Untersuchung meines Wissens noch nicht durchgeführt worden.

Abgesehen von dem wichtigeren theoretischen Interesse erleichtert diese Kenntnis die Berechnung der Wurzeln der Teilungsgleichungen der \mathfrak{S} -Funktion. Für den Körper der 3. Einheitswurzeln sind für viele Führer die Teilungsgleichungen berechnet worden von Bindschedler, für den Körper der 4. Einheitswurzeln von Hagenbuch, der außerdem noch die Wurzeln der Teilungsgleichungen für eine Reihe von Führern berechnete⁶⁾. Beide Autoren verwenden nicht die von Fueter benutzte \mathfrak{S} -Funktion, sondern Hagenbuch die Funktion

$$\frac{4}{g_2(\omega_1, \omega_2)} p^2(z; \omega_1, \omega_2), \quad m = -1,$$

und Bindschedler die Funktion

$$g_3(\omega_1, \omega_2) \cdot \frac{1}{p^3(z; \omega_1, \omega_2)}, \quad m = -3.$$

Da sich aber die erste dieser Funktionen nur um den Faktor 4 von der von Fueter benutzten \mathfrak{S} -Funktion unterscheidet, die zweite abgesehen vom Faktor 2 die reziproke der von Fueter benutzten \mathfrak{S} -Funktion ist, hat die Verschiedenheit der Normierung natürlich keinen Einfluß auf die Galois'sche Gruppe einer Teilungsgleichung und deren Reduktion. Wenn wir daher weiter unten Teilungsgleichungen und Wurzeln von Teilungsgleichungen angeben, um Beispiele zur allgemeinen Theorie zu liefern,

⁵⁾ Vergleiche hier Abschnitt 2.

⁶⁾ Vergleiche die Tabellen am Schluß in den beiden Inaugural-Dissertationen der Zürcher Universität: *Bindschedler, Carl*, Die Teilungskörper der elliptischen Funktionen im Bereich der dritten Einheitswurzel, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 152, S. 49 (1922) und *Hagenbuch, Gustav*, Über die Teilungskörper der elliptischen Funktionen für den Grundkörper $k(\sqrt{-1})$, Zürich 1926.

werden wir, um den Vergleich zu erleichtern, die von Bindschedler und Hagenbuch benutzte Normierung verwenden.

Es ist sehr zu wünschen, daß trotz der großen rechnerischen Schwierigkeiten auch für den Fall eines vom Körper der 3. oder 4. Einheitswurzeln verschiedenen quadratisch-imaginären Grundkörpers Teilungsgleichungen und deren Wurzeln berechnet würden, um Illustrationen für die hier allgemein entwickelte Theorie zu liefern⁷⁾.

Für die auch in der Theorie wichtigen Führer 2 und 4 fällt bei jedem quadratisch-imaginären Körper $k = k_0(\sqrt{m})$ je der Strahlklassenkörper mit dem Ringklassenkörper desselben Führers zusammen⁸⁾. Berücksichtigt man daher die Ausführungen über die singulären Werte der Funktion

$$t(\omega_1, \omega_2) = \frac{4 \cdot 3 \cdot p\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)}{p\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{4}\right) - p\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)}$$

auf Seite 111 u. f. in *Fueter*, so ergeben die Tabellen auf Seite 351—354 jenes Buches, die ich seiner Zeit berechnete, sofort die Strahlklassenkörper $K\{2\}$ und $K\{4\}$ für die dort aufgeführten Werte von m . Wir verzichten daher hier auf die Angabe diesbezüglicher Beispiele.

1. Ist $m = 2^{h_0}l_1^{h_1} \dots l_R^{h_R}$ die Primzahlpotenz — Produktdarstellung der natürlichen Zahl $m \geq 3$, wo also die l_r , $r = 1, 2, \dots, R$, voneinander verschiedene ungerade Primzahlen bedeuten, so zerfallen die Unterkörper von $c(m)$ in 2 Typen, nämlich solche, die als direktes Kompositum von Unterkörpern der Körper $c(2^{h_0})$, $c(l_1^{h_1})$, \dots , $c(l_R^{h_R})$ dargestellt werden können, und die ich in einer früheren Arbeit⁹⁾ *Ausgangs-Kreiskörper* nannte, und solche, die diese Eigenschaft nicht haben, und die ich hier kurz *verschränkte Kreiskörper* nennen will.

Jedem Kreiskörper k sei dann eine Hülle k_H in folgender Weise zugeordnet: Ist k ein *Ausgangs-Kreiskörper*, so ist seine Hülle k_H mit k identisch: $k_H = k$. Ist k ein *verschränkter Kreiskörper*, so ist k_H der kleinste,

⁷⁾ Außer einigen Teilungsgleichungen für die \mathfrak{T} -Funktion für den Körper $k_0(\sqrt{-7})$, die ich auf S. 357/358 in *Fueter* angegeben habe, sind mir keine solchen Berechnungen bekannt.

⁸⁾ Dies entnimmt man sofort der diesbezüglichen Formel auf S. 181, 5. Zeile von unten, der Abhandlung: *Fueter, Rudolf, Abelsche Gleichungen in quadratisch-imaginären Zahlkörpern*, Math. Ann., Bd. 75, S. 177 (1914). Diese Arbeit ist im gesamten von Interesse für das vorliegende Thema.

⁹⁾ *Gut, Max, Die Zetafunktion, die Klassenzahl und die Kronecker'sche Grenzformel eines beliebigen Kreiskörpers*, Comment. Math. Helvet., vol. 1, S. 160 (1929).

d. h. am wenigsten Elemente umfassende *Ausgangskreiskörper*, der k als Unterkörper enthält.

Dann gilt der Satz: *Ist k ein beliebiger Kreiskörper, so ist $k\{1\}$ gleich der Hülle von k .*

In der Tat ist zunächst gemäß dem letzten Satz, S. 220 der eben zitierten Arbeit die Relativdifferente von der Hülle k_H jedes verschränkten Kreiskörpers k in bezug auf k gleich 1. Ferner ist die Relativdifferente jedes Ausgangskreiskörpers in bezug auf jeden in ihm enthaltenen echten Unter-Ausgangskreiskörper von 1 verschieden. Endlich ist bei sukzessiven einfachen algebraischen Erweiterungen die Relativdifferente der gesamten Erweiterung gleich dem Produkt der Relativdifferenzen der einzelnen sukzessiven Erweiterungen.

Selbstverständlich ergibt sich dann als Korollar, daß die (absolute) Klassenzahl h von k durch den Relativgrad von $k\{1\}$ in bezug auf k teilbar ist. Hiebei ist natürlich die Äquivalenz der Ideale im engeren Sinne zugrunde gelegt, was insbesondere bei den reell-quadratischen Körpern, deren Grundeinheit eine positive Norm hat, im nächsten Abschnitt zu beachten ist¹⁰⁾.

2. Es sei die ganze rationale Zahl $m \neq 1$ quadratfrei, $k = k_0(\sqrt{m})$ ein reeller oder imaginärer quadratischer Körper.

Aus der in Anmerkung 9 zitierten Arbeit ergibt sich sofort, daß falls $m \equiv 1 \pmod{4}$ ist, die Hülle k_H von k aus dem Kompositum aller Aus-

gangskreiskörper $k_0\left(\sqrt{(-1)^{\frac{l-1}{2}}l}\right)$ besteht, wo l die ungeraden Primteiler von m durchläuft. Falls $m \equiv 3$ oder $\equiv 2 \pmod{4}$ ist, kommt dann noch genau *ein* absolut quadratischer Unterkörper des Körpers $c(8)$, d. h. entweder $k_0(\sqrt{-1})$ oder $k_0(\sqrt{2})$ oder $k_0(\sqrt{-2})$ dazu.

Wir zeigen, daß *zwei* dieser Unterkörper und damit $c(8)$ nicht in k_H stecken können. In der Tat ist in $c(8)$ das Ideal $(2) = \mathfrak{Q}^4$, wo \mathfrak{Q} ein Primideal von $c(8)$ ist, und die absolute Differente von $c(8)$ ist \mathfrak{Q}^8 . Die Differente von $k_0(\sqrt{m})$ ist aber im Falle $m \equiv 3$ oder $m \equiv 2 \pmod{4}$ gleich $2\sqrt{m}$. Ist I das in 2 enthaltene Primideal von k , so ist die Potenz, in der I in der Differenzen von k auftritt, gleich I^2 , falls $m \equiv 3 \pmod{4}$, und gleich I^3 , falls $m \equiv 2 \pmod{4}$ ist. Mithin ist diese Differente, als Ideal von $c(8)$ aufgefaßt, gleich \mathfrak{Q}^4 bzw. \mathfrak{Q}^6 . Wegen $4 < 6 < 8$ kann mithin $c(8)$ nicht in k_H stecken.

¹⁰⁾ Vergleiche hiezu z. B. *Hilbert, David, Die Theorie der algebraischen Zahlkörper, Gesammelte Abhandlungen*, 1. Band, Berlin 1932, § 24, S. 112 und § 83, S. 186 und 187.

Da \sqrt{m} gewiß in k_H vorkommt, ist der quadratische Unterkörper von $c(8)$, der in k_H steckt, falls $m \equiv 3$ oder $m \equiv 2$ (mod. 4) ist, der Körper

$$k_0 \left(\sqrt{\frac{m}{\prod (-1)^{\frac{l-1}{2}} l}} \right),$$

wo das Produkt über alle ungeraden Primteiler von m zu erstrecken ist.

Wir erhalten also in jedem Falle das Resultat:

$$k\{1\} = k_0 \left(\sqrt{m}, \sqrt{(-1)^{\frac{l_1-1}{2}} l_1}, \dots, \sqrt{(-1)^{\frac{l_R-1}{2}} l_R} \right),$$

falls $l_r, r = 1, 2, \dots, R$ die ungeraden Primteiler von m sind¹¹⁾.

Es läßt sich auch so formulieren:

$$\begin{aligned} m \equiv 1 \pmod{4} : \quad k\{1\} &= k_0 \left(\sqrt{(-1)^{\frac{l_1-1}{2}} l_1}, \dots, \sqrt{(-1)^{\frac{l_R-1}{2}} l_R} \right), \\ m \equiv 3 \pmod{4} : \quad k\{1\} &= k_0 \left(\sqrt{-1}, \sqrt{(-1)^{\frac{l_1-1}{2}} l_1}, \dots, \sqrt{(-1)^{\frac{l_R-1}{2}} l_R} \right), \\ m \equiv 2 \pmod{8} : \quad k\{1\} &= k_0 \left(\sqrt{-2}, \sqrt{(-1)^{\frac{l_1-1}{2}} l_1}, \dots, \sqrt{(-1)^{\frac{l_R-1}{2}} l_R} \right), \\ m \equiv 6 \pmod{8} : \quad k\{1\} &= k_0 \left(\sqrt{-2}, \sqrt{(-1)^{\frac{l_1-1}{2}} l_1}, \dots, \sqrt{(-1)^{\frac{l_R-1}{2}} l_R} \right). \end{aligned}$$

Bemerkung: Ist allgemeiner für quadratfreies $m_s \neq 1, s = 1, 2, \dots, S$, der Körper $k = k_0(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \dots, \sqrt{m_S})$ ein Körper vom Grade 2^S , und sind l_1, l_2, \dots, l_R die sämtlichen in den $m_s, s = 1, 2, \dots, S$ aufgehenden voneinander verschiedenen ungeraden Primzahlen, so ist

$$k\{1\} = k_0 \left(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \dots, \sqrt{m_S}; \sqrt{(-1)^{\frac{l_1-1}{2}} l_1}, \dots, \sqrt{(-1)^{\frac{l_R-1}{2}} l_R} \right),$$

wie man auf gleiche Weise sofort einsieht. Insbesondere ergibt sich so $k\{1\}$ für einen Dirichlet'schen Körper: $k = k_0(\sqrt{-1}, \sqrt{m})$, wo $m \neq \pm 1$ und quadratfrei ist.

¹¹⁾ Für quadratisch-imaginäre Zahlkörper wurde dieses Resultat zum ersten Male mit Hilfe der Theorie der Geschlechter und mit Hilfe der Primzahlzerfällung in den Körpern $K\{1\}$ und $c(m)$ für geeignetes m bewiesen durch *Weber, Heinrich, Über Zahlengruppen in algebraischen Körpern*; Zweite Abhandlung. Math. Ann., Bd. 49, S. 83 (1897), vgl. dort S. 99. Einen weiteren Beweis auf gruppentheoretischer Grundlage gab *Fueter*, siehe *Fueter*, S. 74 und S. 181—185.

3. Sei k ein absolut-zyklischer Körper vom Grade q , wo q eine ungerade Primzahl ist¹²⁾.

Die Diskriminante d von k enthalte die voneinander verschiedenen ungeraden Primzahlen l_1, l_2, \dots, l_R , die natürlich alle $\equiv 1 \pmod{q}$ sind, bzw. die Primzahlen q, l_1, l_2, \dots, l_R . Ist λ_r eine Primitivzahl des Unterkörpers vom absoluten Grade q des Körpers $c(l_r)$, $r = 1, 2, \dots, R$, z. B. eine $\frac{l_r - 1}{q}$ gliedrige Periode, ferner λ_0 eine Primitivzahl des Unterkörpers vom absoluten Grade q des Körpers $c(q^2)$ — alle diese Körper sind Ausgangskreiskörper — so ist die Hülle von k :

$$k\{1\} = k_0(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_R),$$

bezw.

$$k\{1\} = k_0(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_R).$$

Bemerkung: Ist k das Kompositum von S absolut-zyklischen Körpern, die alle vom ungeraden Primzahlgrade q sind, und d die Diskriminante von k , so gilt die gleiche Vorschrift wie eben.

4. Zur Bestimmung von $k\{f\}$ brauchen wir allgemein die in diesem Abschnitt zusammengestellten Bezeichnungen, Sätze und Formeln.

Liegt irgend eine Galois'sche Erweiterung K eines beliebigen Grundkörpers k vor, so bezeichne immer \mathfrak{G} die Galois'sche Gruppe und für ein festgehaltenes Primideal \mathfrak{P} von K stets \mathfrak{Z} , \mathfrak{T} und \mathfrak{V} bzw. die *relative* Zerlegungs-, Trägheits- und gesamte Verzweigungsgruppe von \mathfrak{P} .

Es sei nun K im folgenden insbesondere *abelsch* über k vom Relativgrade n , \mathfrak{P} ein Primideal von K , das im Primideal \mathfrak{p} von k und in der Relativdifferenten \mathfrak{D} von K in bezug auf k aufgeht. Um eine einfache Formulierung der zu benutzenden Formeln zu erhalten, bezeichne man dann die Trägheitsgruppe \mathfrak{T} von \mathfrak{P} mit \mathfrak{V}_0 , und es sei

$$\mathfrak{V}_0 \supset \mathfrak{V}_1 \supset \mathfrak{V}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{V}_{r-1} \supset \mathfrak{V}_r \equiv \mathfrak{G}$$

die vollständige Reihe der Trägheitsgruppe und der *voneinander verschiedenen* Verzweigungsgruppen von \mathfrak{P} . Falls also $\mathfrak{T} = \mathfrak{V}$ ist, so ist $\mathfrak{V}_0 = \mathfrak{T} = \mathfrak{V}$ und \mathfrak{V}_1 eine echte Untergruppe von \mathfrak{V} ; falls $\mathfrak{T} \supset \mathfrak{V}$ ist, ist $\mathfrak{V}_0 = \mathfrak{T}$, dagegen $\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}$. Für $\varrho = 0, 1, 2, \dots, r$ sei n_ϱ die Ordnung der Gruppe \mathfrak{V}_ϱ , so daß

¹²⁾ Auf Grund der Ausführungen in meiner in Anmerkung 9 zitierten Arbeit ist dieser Fall schon behandelt worden von Carlitz, L., On abelian fields, Transactions of the American Math. Society, vol. 35, pag. 122 (1933).

$$n \geq n_0 > n_1 > n_2 > \cdots > n_{r-1} > n_r = 1 .$$

Man setze endlich

$$v_0 = -1 , \quad (1)$$

und für alle ϱ sei $v_{\varrho+1}$ der größte Exponent, so daß für alle Automorphismen V_ϱ aus \mathfrak{V}_ϱ und für alle ganzen Zahlen Γ aus K die Kongruenz

$$V_\varrho \Gamma \equiv \Gamma \pmod{\mathfrak{P}^{v_{\varrho+1}+1}}$$

(im additiven Sinne) gilt. Speziell ist also $v_{r+1} = \infty$.

Unter diesen Voraussetzungen gilt der Satz:

1. Satz: Ist w der Exponent der Potenz, in der \mathfrak{p} im Führer der zugehörigen Strahlklassengruppe auftritt, so gilt die Formel¹³⁾:

$$w = \frac{1}{n_0} \left[n_0(v_1 - v_0) + n_1(v_2 - v_1) + \cdots + n_{r-1}(v_r - v_{r-1}) \right]. \quad (2)$$

Wir bezeichnen dann $\mathfrak{f}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^w$ als den \mathfrak{p} -Führer von \mathfrak{f} .

Da der Exponent W der Potenz, in der \mathfrak{P} in der Relativdifferenten \mathfrak{D} von K in bezug auf k auftritt, gleich

$$W = (n_0 - 1)(v_1 - v_0) + (n_1 - 1)(v_2 - v_1) + \cdots + (n_{r-1} - 1)(v_r - v_{r-1}) \quad (3)$$

ist, ergibt sich

$$W = n_0 w - (v_r + 1) , \quad (4)$$

und damit

$$w = \frac{W + (v_r + 1)}{n_0} . \quad (5)$$

Endlich ist der Exponent der Potenz, in der \mathfrak{p} in der Relativdiskriminanten \mathfrak{d} von K in bezug auf k auftritt:

$$\frac{n}{n_0} \left[(n_0 - 1)(v_1 - v_0) + (n_1 - 1)(v_2 - v_1) + \cdots + (n_{r-1} - 1)(v_r - v_{r-1}) \right] = \frac{n}{n_0} W . \quad (6)$$

¹³⁾ Vergleiche zu diesem Satze und den Formeln (3) und (6): *Hasse, Helmut, Führer, Diskriminante und Verzweigungskörper relativ-abelscher Zahlkörper, Journal für die reine und angewandte Math., vol. 162, pag. 131 (1930); Hasse, Helmut, Théorie des restes normiques dans les extensions galoisiennes, C. R. des séances de l'Académie des Sciences, Paris, vol. 197, pag. 469 (1933); Hasse, Helmut, Applications au cas abélien de la théorie des restes normiques dans les extensions galoisiennes, C. R. des séances de l'Académie des Sciences, Paris, vol. 197, pag. 511 (1933); Vassiliou, Ph., Bestimmung der Führer der Verzweigungskörper relativ-abelscher Zahlkörper. Beweis der Produktformel für den Führer-Diskriminanten-Satz. Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 169, pag. 131 (1933); Hasse, Helmut, Klassenkörpertheorie, Autographierte Vorlesung an der Universität Marburg gehalten 1932/1933.*

Hat man insbesondere eine relativ-zyklische Erweiterung vom Primzahlgrade l (wo l auch gleich 2 sein darf), so ist $r = 1$, $n = n_0 = l$, und da die $l - 1$ Elemente der Relativdifferenten \mathfrak{D} das Ideal \mathfrak{P} gemäß der Definition von v_1 in der $(v_1 + 1)$ -ten Potenz enthalten, und $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^l$ ist, wird gemäß (4), (3) und (1):

$$\frac{n}{n_0} W = \frac{l}{l} W = W = lw - (v_1 + 1) = (l - 1) (v_1 + 1) ,$$

also

$$lw = l(v_1 + 1) ,$$

d. h.

$$w = v_1 + 1 ,$$

und gemäß (4)

$$\frac{n}{n_0} W = W = (l - 1) w .$$

Das liefert unter Berücksichtigung von (6), da bekanntlich allgemein ein Primideal \mathfrak{p} von k die Ideale \mathfrak{d} und \mathfrak{f} immer gleichzeitig teilt oder nicht teilt, den in der Klassenkörpertheorie wohlbekannten Satz¹⁴⁾:

2. Satz: Ist K relativ-zyklisch vom Primzahlgrade l über k , und $\mathfrak{d} = \mathfrak{f}^{l-1}$ die Relativdiskriminante von K in bezug auf k , dann ist \mathfrak{f} der Führer der zugehörigen Strahlklassengruppe vom Index l im Grundkörper k .

Von hier an bis zum Schlusse dieser Arbeit sei k endlich immer ein quadratisch-imaginärer Zahlkörper $k = k_0(\sqrt{m})$, wo m eine quadratfreie negative ganze Zahl ist. Ferner soll e immer die Anzahl der Einheiten in $k_0(\sqrt{m})$, also die Zahl 2 bzw. 4 bzw. 6 bedeuten, je nachdem $m \neq -2 \pm 1$, bzw. $m = -1$, bzw. $m = -3$ ist. Endlich bedeute $H_s(\mathfrak{f})$ immer den Quotienten aus der Anzahl der Strahlklassen, in die alle zum Führer \mathfrak{f} teilerfremden Ideale zerfallen, und der Klassenzahl von k . Gemäß dem Satze 118, Fueter S. 110, gilt der Satz:

3. Satz: Die Funktion $H_s(\mathfrak{f})$ hat den Wert:

$$H_s(\mathfrak{f}) = \frac{e_s(\mathfrak{f})}{e} \varphi(\mathfrak{f}) ,$$

wo $e_s(\mathfrak{f})$ die Anzahl der Strahleinheiten im Strahle mit dem Führer \mathfrak{f} und $\varphi(\mathfrak{f})$ die Anzahl der zu \mathfrak{f} teilerfremden Kongruenzklassen (mod. \mathfrak{f}) in k ist.

¹⁴⁾ Vergleiche z. B. Satz 26, S. 77 in *Takagi, Teiji, Über eine Theorie des relativ Abelschen Zahlkörpers, Journal of the College of Science, Imp. Univ. of Tokyo, Bd. 41, Art. 9 (1920)*.

Im Falle $m = -2 \pm 1$ ist also:

$$H_s(\mathfrak{f}) = \frac{1}{2} \varphi(\mathfrak{f}), \text{ falls } \mathfrak{f} \text{ kein Teiler von (2) ist,}$$

$$H_s(\mathfrak{f}) = \varphi(\mathfrak{f}), \text{ falls } \mathfrak{f} \text{ ein Teiler von (2) ist.}$$

Im Falle $m = -1$ ist:

$$H_s(\mathfrak{f}) = \frac{1}{4} \varphi(\mathfrak{f}), \text{ falls } \mathfrak{f} \text{ kein Teiler von (2) ist,}$$

$$H_s(\mathfrak{f}) = 1, \text{ falls } \mathfrak{f} = (1+i) \text{ oder } \mathfrak{f} = (2) \text{ ist.}$$

Im Falle $m = -3$ ist:

$$H_s(\mathfrak{f}) = \frac{1}{6} \varphi(\mathfrak{f}), \text{ falls } \mathfrak{f} \neq \left(\frac{-3 + \sqrt{-3}}{2} \right), \mathfrak{f} \neq (2) \text{ ist,}$$

$$H_s(\mathfrak{f}) = \frac{1}{2} \varphi(\mathfrak{f}), \text{ falls } \mathfrak{f} = \left(\frac{-3 + \sqrt{-3}}{2} \right) \text{ ist,}$$

$$H_s(\mathfrak{f}) = \frac{1}{3} \varphi(\mathfrak{f}), \text{ falls } \mathfrak{f} = (2) \text{ ist.}$$

In den Fällen $m = -2 \pm 1$ ist überdies bekanntlich die Klassenzahl des Grundkörpers gleich 1.

Liegt im folgenden eine Differente vor, sei es eine absolute oder eine Relativdifferente, und teilt man sie durch den zur Primzahl p bzw. zum Primideal \mathfrak{p} teilerfremden Faktor, so wollen wir den Quotienten als die p - bzw. \mathfrak{p} -Differenten bezeichnen. Die p - bzw. \mathfrak{p} -Differente ist also immer gleich 1 oder ein Potenzprodukt von nur in p bzw. \mathfrak{p} aufgehenden Primidealen.

Da in der Relativdiskriminanten und daher auch in der Relativdifferenten von $K\{\mathfrak{p}^w\}$, $w \geq 1$, in bezug auf k nur Primideale aufgehen, die Teiler von \mathfrak{p} sind, anderseits $k\{1\}$ ein Ausgangskreiskörper ist, kann $k\{\mathfrak{p}^w\}$ aus $k\{1\}$ nur entstehen durch Adjunktion eines bestimmten Unterkörpers von $c(p^h)$ für genügend großes h ; dabei ist natürlich p die in \mathfrak{p} liegende rationale Primzahl. Ist insbesondere $p = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$, so ist die Relativdiskriminante irgend eines von k verschiedenen, aber k enthaltenden Unterkörpers von $k(c(p^h))$ in bezug auf k immer gleichzeitig durch \mathfrak{p} und \mathfrak{p}' teilbar, und daher in diesem Falle

$$k\{\mathfrak{p}^w\} = k\{\mathfrak{p}'^w\} = k\{1\}, \quad w \geq 1,$$

und, falls $w_1 \geq 1$, $w_2 \geq 1$ ist:

$$k\{\mathfrak{p}^{w_1} \mathfrak{p}'^{w_2}\} = k\{p^w\}, \quad \text{wo } w = \text{Min. } (w_1, w_2). \quad (7)$$

Generell ist die triviale Tatsache zu beachten, daß wenn $K\{\mathfrak{f}\}$ durch eine Reihe von Adjunktionen aus k gewonnen wird, man immer zuerst die absolut-abelschen Bestandteile adjungieren darf.

5. In diesem Abschnitt soll p eine *ungerade* Primzahl sein, für welche in $k = k_0(\sqrt[m]{m})$ die Gleichung $p = \mathfrak{p}$, $n(\mathfrak{p}) = p^2$ gilt. p ist also zur Diskriminanten von k teilerfremd.

Gemäß Satz 3 von Abschnitt 4 ist in diesem Falle für jede natürliche Zahl w :

$$H_s(\mathfrak{p}^w) = \frac{1}{e} \varphi(\mathfrak{p}^w) = \frac{1}{e} n(\mathfrak{p}^w) \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = p^{2w-2} \cdot \frac{p^2 - 1}{e}.$$

Mithin wird für die Körper-Relativgrade:

$$(K\{\mathfrak{p}\} : K\{1\}) = \frac{p^2 - 1}{e} = (p - 1) \frac{p + 1}{e} ;$$

$$(K\{\mathfrak{p}^{w+1}\} : K\{\mathfrak{p}^w\}) = p^2 , w \geq 1 .$$

Beim Übergang von $K\{1\}$ zu $K\{\mathfrak{p}\}$ werden also nur relativ-zyklische Körper adjungiert, deren Relativgrade zu p teilerfremd sind, beim Übergang von $K\{\mathfrak{p}^w\}$ zu $K\{\mathfrak{p}^{w+1}\}$, $w \geq 1$, werden sukzessive zwei relativ-zyklische Körper vom Primzahlgrade p adjungiert.

Wir bestimmen zunächst den Führer \mathfrak{p}^w von $k(c(p^h))$, $h \geq 1$, in bezug auf den Grundkörper k . In $k(c(p^h))$ ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^{p^{h-1}(p-1)}$ und \mathfrak{P} ein Primideal 2. Grades von $k(c(p^h))$ und vom Relativgrad 1 in bezug auf k . Ferner wird wegen der vollen Verzweigung:

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{G} = \mathfrak{Z} = \mathfrak{T} = \mathfrak{V}_0 \supset \mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1 \supset \mathfrak{V}_2 \supset \mathfrak{V}_3 \supset \cdots \supset \mathfrak{V}_{h-1} \supset \mathfrak{V}_h = \mathfrak{V}_r = \mathfrak{E}, \underline{r=h} \\ n_0 = p^{h-1}(p-1) > n_1 = p^{h-1} > n_2 = p^{h-2} > n_3 = p^{h-3} > \cdots > n_{h-1} = p > n_h = 1 . \\ v_0 = -1 < v_1 = 0 < v_2 = p-1 < v_3 = p^2-1 < \cdots < v_{h-1} = p^{h-2}-1 < v_h = p^{h-1}-1 . \end{array} \right\} (8)$$

Daher ist gemäß dem 1. Satz des 4. Abschnittes $w = h$.

Da der Führer von $k\{1\}$ gleich 1 ist, folgt¹⁵⁾

$$\underline{k\{\mathfrak{p}^w\} = k\{1\}(c(p^w)) , w \geq 1 .}$$

Beim Übergang von $K\{1\}$ zu $K\{\mathfrak{p}\}$ wird also $c(p)$ adjungiert und ein nicht absolut-abelscher Körper vom Relativgrade $\frac{p+1}{e}$.

¹⁵⁾ Vergleiche z. B. Satz 64, S. 71 der in Anmerkung 13 erwähnten Vorlesungs-Autographie von Hasse.

Beim Übergang von $K\{\mathfrak{p}^w\}$ zu $K\{\mathfrak{p}^{w+1}\}$, $w \geq 1$ wird also der Körper $c(p^{w+1})$ vom Relativgrade p adjungiert und ein nicht absolut-abelscher Körper vom Relativgrade p .

Anwendung auf die Teilungsgleichungen:

Beispiel für $m = -1$: $K\{1\} = k\{1\} = k = k_0(\sqrt{-1})$; $e = 4$.

Damit p Primideal 2. Grades in k wird, muß $\left(\frac{-4}{p}\right) = -1$ sein, d. h. $p \equiv 3 \pmod{4}$.

Sei $\mathfrak{f} = \mathfrak{p} = (3)$.

Es muß $k\{\mathfrak{f}\} = K\{\mathfrak{f}\} = k\{1\} (c(3)) = k_0(\sqrt{-1}, \sqrt{-3}) = k(\sqrt{3}) = c(12)$ sein. Die Teilungsgleichung lautet bei Hagenbuch:

$$T_3 \equiv 3 \mathfrak{S}^2 - 6 \mathfrak{S} - 1 = 0.$$

Ihre Wurzeln sind

$$\mathfrak{S} = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3}.$$

Sie sind in Einklang mit der Behauptung: $K\{\mathfrak{f}\} = k(\sqrt{3})$.

Beispiel für $m = -3$: $K\{1\} = k\{1\} = k = k_0(\sqrt{-3})$; $e = 6$.

Damit p ein Primideal 2. Grades in k wird, muß $p \neq 3$ und $\left(\frac{-3}{p}\right) = -1$, also $p \equiv 2 \pmod{3}$ sein, mithin $p \equiv 5 \pmod{6}$.

Sei $\mathfrak{f} = \mathfrak{p} = (5)$.

Es muß $k\{\mathfrak{f}\} = K\{\mathfrak{f}\} = k\{1\} (c(5)) = k(c(5)) = c(15)$ sein.

Die Teilungsgleichung lautet bei Bindschedler:

$$T_5 \equiv \mathfrak{S}^4 - 25 \mathfrak{S}^3 + 15 \mathfrak{S}^2 + 95 \mathfrak{S} - 5 = 0.$$

Vermöge Adjunktion von $\sqrt{5}$ wird T_5 ein Produkt von 2 Faktoren 2. Grades:

$$T_5 \equiv \left[\mathfrak{S}^2 - \frac{25 + 9\sqrt{5}}{2} \mathfrak{S} - (20 + 9\sqrt{5}) \right] \times \left[\mathfrak{S}^2 - \frac{25 - 9\sqrt{5}}{2} \mathfrak{S} - (20 - 9\sqrt{5}) \right].$$

Der erste quadratische Faktor zerlegt sich so:

$$\left[\mathfrak{S} - \left\{ \frac{25 + 9\sqrt{5}}{4} + \frac{9 + 3\sqrt{5}}{4} \sqrt{-3} \sqrt{-\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \right\} \right] \times \\ \left[\mathfrak{S} - \left\{ \frac{25 + 9\sqrt{5}}{4} - \frac{9 + 3\sqrt{5}}{4} \sqrt{-3} \sqrt{-\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \right\} \right],$$

also der zweite so:

$$\left[\mathfrak{S} - \left\{ \frac{25 - 9\sqrt{5}}{4} + \frac{9 - 3\sqrt{5}}{4} \sqrt{-3} \sqrt{-\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} \right\} \right] \times \\ \left[\mathfrak{S} - \left\{ \frac{25 - 9\sqrt{5}}{4} - \frac{9 - 3\sqrt{5}}{4} \sqrt{-3} \sqrt{-\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} \right\} \right].$$

Ein Vergleich mit den Werten für die 5. Einheitswurzeln¹⁶⁾ zeigt den Einklang mit der Behauptung $K\{\mathfrak{f}\} = k(c(5))$.

6. In diesem Abschnitt soll p weiter eine *ungerade* Primzahl sein, für welche aber in $k = k_0(\sqrt{m})$ die Gleichung $p = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}'$ gilt, wobei $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$, $n(\mathfrak{p}) = n(\mathfrak{p}') = p$ ist. p ist also zur Diskriminanten von k wieder teilerfremd. Man beachte hier generell die Formel (7).

Gemäß Satz 3 von Abschnitt 4 ist in diesem Falle für jede natürliche Zahl w :

$$H_s(p^w) = \frac{1}{e} \varphi(\mathfrak{p}^w \mathfrak{p}'^w) = \frac{1}{e} n(\mathfrak{p}^w \mathfrak{p}'^w) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 = p^{2w-2} \cdot \frac{(p-1)^2}{e}, \quad w \geq 1.$$

Mithin wird für die Körper-Relativgrade:

$$(K\{p\} : K\{1\}) = \frac{(p-1)^2}{e} = (p-1) \cdot \frac{p-1}{e} ;$$

$$(K\{p^{w+1}\} : K\{p^w\}) = p^2, \quad w \geq 1 .$$

Beim Übergang von $K\{1\}$ zu $K\{p\}$ werden also nur relativ-zyklische Körper adjungiert, deren Relativgrade zu p teilerfremd sind, beim Übergang von $K\{p^w\}$ zu $K\{p^{w+1}\}$, $w \geq 1$, werden sukzessive zwei relativ-zyklische Körper vom Primzahlgrade p adjungiert. Ferner ist:

$$H_s(\mathfrak{p}^w) = H_s(\mathfrak{p}'^w) = \frac{1}{e} n(\mathfrak{p}^w) \left(1 - \frac{1}{p}\right) = p^{w-1} \cdot \frac{p-1}{e} ; \quad w \geq 1 ,$$

also für die Körper-Relativgrade:

$$(K\{\mathfrak{p}\} : K\{1\}) = (K\{\mathfrak{p}'\} : K\{1\}) = \frac{p-1}{e} ;$$

$$(K\{\mathfrak{p}^{w+1}\} : K\{\mathfrak{p}^w\}) = (K\{\mathfrak{p}'^{w+1}\} : K\{\mathfrak{p}'^w\}) = p ; \quad w \geq 1 .$$

¹⁶⁾ Vergleiche z. B. S. 79 in *Fueter, Rudolf, Synthetische Zahlentheorie, 1. Auflage*, Berlin und Leipzig 1917.

Wir bestimmen zunächst den Führer von $k(c(p^h))$, $h \geq 1$, in bezug auf den Grundkörper k . In $k(c(p^h))$ ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^{p^{h-1}(p-1)}$ und $\mathfrak{p}' = \mathfrak{P}'^{p^{h-1}(p-1)}$, wo \mathfrak{P} und \mathfrak{P}' Primideale von $k(c(p^h))$ sind, die den absoluten Grad 1 haben. Sowohl für \mathfrak{P} wie für \mathfrak{P}' gilt die Aufstellung (8), und daher ist der zugehörige Führer gleich $\mathfrak{p}^h \cdot \mathfrak{p}'^h = p^h$. Da der Führer von $k\{1\}$ trivialerweise gleich 1 ist, folgt analog:

$$\underline{k\{p^w\} = k\{1\} (c(p^w)) , \quad w \geq 1 .}$$

Beim Übergang von $K\{1\}$ zu $K\{p\}$ wird also $c(p)$ adjungiert und ein nicht absolut-abelscher Körper vom Relativgrad $\frac{p-1}{e}$.

Weil $K\{p\}$ das Kompositum der beiden Körper $K\{\mathfrak{p}\}$ und $K\{\mathfrak{p}'\}$ als Unterkörper enthält, wobei übrigens der Relativgrad von $K\{p\}$ in bezug auf dieses Kompositum nach dem 215. Satz, Fueter S. 236, höchstens gleich e ist, ist der letztere Körper gerade ein beliebiger der beiden relativ-konjugierten Körper $K\{\mathfrak{p}\}$ oder $K\{\mathfrak{p}'\}$, von denen ja ein jeder ein nicht absolut-abelscher Erweiterungskörper von $K\{1\}$ vom Relativgrade $\frac{p-1}{e}$ ist.

Aus dem gleichen Grunde kann man $K\{p\}$ offenbar aus $K\{1\}$ gewinnen, indem man sowohl $K\{\mathfrak{p}\}$, als auch $K\{\mathfrak{p}'\}$ adjungiert. Da die beiden Relativdifferenten dieser beiden Körper in bezug auf $K\{1\}$ zueinander teilerfremd sind, ergibt die Adjunktion dieses Kompositums einen Körper, der in bezug auf $K\{1\}$ den Relativgrad $\left(\frac{p-1}{e}\right)^2$ hat, so daß $K\{p\}$ in bezug auf dieses Kompositum auch *genau* den Grad e hat. Nach Adjunktion von $K\{\mathfrak{p}\}$, bzw. $K\{\mathfrak{p}'\}$ zu $K\{1\}$ sind dann die beiden weiteren Adjunktionen von $K\{\mathfrak{p}'\}$, bzw. $K\{\mathfrak{p}\}$, und in jedem Falle dieses weiteren Körpers vom Relativgrade e zur Gewinnung von $K\{p\}$ äquivalent der Adjunktion von $c(p)$ zu $K\{\mathfrak{p}\}$, bzw. $K\{\mathfrak{p}'\}$.

Beim Übergang von $K\{p^w\}$ zu $K\{p^{w+1}\}$, $w \geq 1$, wird jeweilen der Körper $c(p^{w+1})$ vom Relativgrade p in bezug auf $K\{p^w\}$ adjungiert und ein nicht absolut-abelscher Körper, der in bezug auf $K\{p^w\}$ den Relativgrad p hat. Dieser Körper ist gerade wieder einer der beiden relativ-konjugierten Körper $K\{p^{w+1}\}$ oder $K\{p'^{w+1}\}$, von denen jeder in bezug auf $K\{p^w\}$ den Relativgrad p hat. Insbesondere ist also:

$$K\{p^w\} = K\{\mathfrak{p}^w\} (c(p^w)) = K\{\mathfrak{p}'^w\} (c(p^w)) , \quad w \geq 1 . \quad (9)$$

Anwendung auf die Teilungsgleichungen:

Beispiel für $m = -1$: $K\{1\} = k\{1\} = k = k_0(\sqrt{-1})$; $e = 4$.

Damit p sich in zwei verschiedene Primideale zerlegt, muß $\left(\frac{-4}{p}\right) = +1$ sein, d. h. $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Sei $\mathfrak{f} = p = (5) = (2+i)(2-i)$.

Es muß $k\{\mathfrak{f}\} = K\{\mathfrak{f}\} = k\{1\} (c(5)) = k(c(5)) = c(20)$ sein. Die Teilungsgleichung lautet bei Hagenbuch:

$$T_5 \equiv \mathfrak{S}^4 - 12 \mathfrak{S}^3 - 26 \mathfrak{S}^2 + 52 \mathfrak{S} + 1 = 0.$$

Vermöge Adjunktion von $\sqrt{5}$ wird T_5 ein Produkt von zwei Faktoren 2. Grades:

$$T_5 \equiv [\mathfrak{S}^2 - (6 - 4\sqrt{5}) \mathfrak{S} + (9 - 4\sqrt{5})] [\mathfrak{S}^2 - (6 + 4\sqrt{5}) \mathfrak{S} + (9 + 4\sqrt{5})].$$

Der erste quadratische Faktor zerlegt sich so:

$$\left[\mathfrak{S} - 2 \left\{ \frac{3 - 2\sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} \right\} \right] \times \\ \left[\mathfrak{S} - 2 \left\{ \frac{3 - 2\sqrt{5}}{2} - \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} \right\} \right],$$

der zweite quadratische Faktor so:

$$\left[\mathfrak{S} - 2 \left\{ \frac{3 + 2\sqrt{5}}{2} + \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} + \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} \right\} \right] \times \\ \left[\mathfrak{S} - 2 \left\{ \frac{3 + 2\sqrt{5}}{2} - \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} \right\} \right],$$

wie schon von Hagenbuch in Tabelle II angegeben. Ein Vergleich mit den Werten für die 5. Einheitswurzeln (siehe Anmerkung ¹⁶)) zeigt den Einklang mit der Behauptung $K\{\mathfrak{f}\} = c(20)$, denn $i = \sqrt{-1}$ liegt ja in k .

Beispiel für $m = -3$: $K\{1\} = k\{1\} = k = k_0(\sqrt{-3})$; $e = 6$.

Damit p sich in zwei verschiedene Primideale zerlegt, muß $\left(\frac{-3}{p}\right) = 1$,

d. h. $p \equiv 1 \pmod{3}$, also $p \equiv 1 \pmod{6}$ sein. Es sei immer $\varrho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Sei $\mathfrak{f} = p = (7) = (7, \varrho - 2)(7, \varrho^2 - 2)$.

Es muß $k\{\mathfrak{f}\} = K\{\mathfrak{f}\} = k\{1\} (c(7)) = k(c(7)) = c(21)$ sein. Die Teilungsgleichung lautet bei Bindschedler:

$$T_7 \equiv \mathfrak{S}^8 + 48 \mathfrak{S}^5 - 741 \mathfrak{S}^4 + 1924 \mathfrak{S}^3 - 363 \mathfrak{S}^2 - 141 \mathfrak{S} + 1 = 0.$$

Vermöge Adjunktion von $\sqrt{21}$ wird T_7 ein Produkt von zwei Faktoren 3. Grades. Der erste Faktor ist:

$$\mathfrak{S}^3 + (24 + 6\sqrt{21}) \mathfrak{S}^2 - \frac{561 + 123\sqrt{21}}{2} \mathfrak{S} - (55 + 12\sqrt{21}),$$

der zweite Faktor ist:

$$\mathfrak{S}^3 + (24 - 6\sqrt{21}) \mathfrak{S}^2 - \frac{561 - 123\sqrt{21}}{2} \mathfrak{S} - (55 - 12\sqrt{21}).$$

Ist $Z = e^{\frac{2\pi i}{7}}$, und bezeichnet man die beiden dreigliedrigen Perioden des Körpers der 7. Einheitswurzeln mit

$$\begin{aligned}\eta &= Z + Z^2 + Z^4, \\ \eta' &= Z^3 + Z^6 + Z^5,\end{aligned}$$

so wird wegen

$$\begin{aligned}\sqrt{-3} &= |\sqrt{3}|i = 2\varrho + 1, \\ \sqrt{-7} &= |\sqrt{7}|i = 2\eta + 1:\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{21} &= -(2\varrho + 1)(2\eta + 1) = (2\varrho + 1)(2\eta' + 1) = \\ &= (2\varrho^2 + 1)(2\eta + 1) = -(2\varrho^2 + 1)(2\eta' + 1).\end{aligned}$$

Der erste kubische Faktor von T_7 hat die drei Wurzeln:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_1 &= \frac{1}{2} \{ -1 + 9[2(Z + Z^6) + 3(Z^2 + Z^5)] + \\ &\quad + 3(2\varrho + 1)[3(Z - Z^6) + 3(Z^4 - Z^3) - 2(Z^2 - Z^5)] \},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_2 &= \frac{1}{2} \{ -1 + 9[2(Z^2 + Z^5) + 3(Z^4 + Z^3)] + \\ &\quad + 3(2\varrho + 1)[3(Z^2 - Z^5) + 3(Z - Z^6) - 2(Z^4 - Z^3)] \},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_3 &= \frac{1}{2} \{ -1 + 9[2(Z^4 + Z^3) + 3(Z + Z^6)] + \\ &\quad + 3(2\varrho + 1)[3(Z^4 - Z^3) + 3(Z^2 - Z^5) - 2(Z - Z^6)] \};\end{aligned}$$

folglich hat der zweite kubische Faktor von T_7 die drei Wurzeln:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_4 &= \frac{1}{2} \{ -1 + 9[2(Z + Z^6) + 3(Z^2 + Z^5)] + \\ &\quad + 3(2\varrho^2 + 1)[3(Z - Z^6) + 3(Z^4 - Z^3) - 2(Z^2 - Z^5)] \},\end{aligned}$$

$$\mathfrak{S}_5 = \frac{1}{2} \{ -1 + 9 [2(Z^2 + Z^5) + 3(Z^4 + Z^3)] + \\ + 3(2\varrho^2 + 1) [3(Z^2 - Z^5) + 3(Z - Z^6) - 2(Z^4 - Z^3)] \} ,$$

$$\mathfrak{S}_6 = \frac{1}{2} \{ -1 + 9 [2(Z^4 + Z^3) + 3(Z + Z^6)] + \\ + 3(2\varrho^2 + 1) [3(Z^4 - Z^3) + 3(Z^2 - Z^5) - 2(Z - Z^6)] \} ,$$

und damit ist T_p in der Tat in $c(21)$ in Linearfaktoren zerlegt.

Bemerkung: Die Formel (9) ist von größter Bedeutung bei der Berechnung konkreter numerischer Beispiele, denn sie gestattet (die Kenntnis von $K\{1\}$ natürlich vorausgesetzt), die Berechnung von $K\{p^w\}$, falls nur die Teilungsgleichung $T_{p^w} = 0$ in Linearfaktoren zerlegt werden kann, d. h. also auch, wenn $T_{p^w} = 0$ nicht bekannt ist oder wegen rechnerischen Schwierigkeiten nicht in Linearfaktoren zerlegt werden kann. Denn man beachte, daß der Grad von $T_{p^w} = 0$ das $p^{w-1}(p-1)$ -fache des Grades von $T_p = 0$ beträgt. Ferner zerfällt $T_{p^w} = 0$, $w \geq 2$, in $K\{p^{w-1}\}$ in $p^{w-2} \cdot \frac{p-1}{e}$ Faktoren vom Grade p .

Wir geben für den Fall $w = 1$ je ein Beispiel für $k = k_0(\sqrt{-1})$ und $k = k_0(\sqrt{-3})$. Dabei ist also

$$K\{p\} = K\{\mathfrak{p}\} (c(p)) = K\{\mathfrak{p}'\} (c(p)) , \quad (10)$$

und der Grad von $T_p = 0$ das $(p-1)$ -fache des Grades von $T_{\mathfrak{p}} = 0$.

Beispiele für die Benutzung der Formel (10):

Beispiel für $m = -1$: $K\{1\} = k\{1\} = k = k_0(\sqrt{-1})$; $e = 4$.

Sei $p = 13$, $\mathfrak{p} = (3 + 2i)$, $\mathfrak{p}' = (3 - 2i)$.

Die Teilungsgleichung für den Führer \mathfrak{p} lautet bei Hagenbuch:

$$T_{3+2i} \equiv (3+2i)\mathfrak{S}^3 + (3+2i)(1-2i)\mathfrak{S}^2 - (3+2i)(1-4i)\mathfrak{S} + 1 = 0 .$$

Ihre Wurzeln sind:

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{1}{3} \left(-1 + 2i + 4 \sqrt[3]{\frac{2+5i+3\sqrt{3}}{2(3+2i)}} + 4 \sqrt[3]{\frac{2+5i-3\sqrt{3}}{2(3+2i)}} \right) ,$$

$$\mathfrak{S}_2 = \frac{1}{3} \left(-1 + 2i + 4\varrho \sqrt[3]{\frac{2+5i+3\sqrt{3}}{2(3+2i)}} + 4\varrho^2 \sqrt[3]{\frac{2+5i-3\sqrt{3}}{2(3+2i)}} \right) ,$$

$$\mathfrak{S}_3 = \frac{1}{3} \left(-1 + 2i + 4\varrho^2 \sqrt[3]{\frac{2+5i+3\sqrt{3}}{2(3+2i)}} + 4\varrho \sqrt[3]{\frac{2+5i-3\sqrt{3}}{2(3+2i)}} \right) ,$$

dabei soll $\varrho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ sein, und die Determination der Kubikwurzeln ist so zu nehmen, daß ihr Produkt

$$\sqrt[3]{\frac{2 + 5i + 3\sqrt{3}}{2(3 + 2i)}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2 + 5i - 3\sqrt{3}}{2(3 + 2i)}} = -i .$$

Mithin wird, falls \mathfrak{S} eine beliebige der drei Wurzeln bezeichnet

$$K\{p\} = k(\mathfrak{S}, e^{\frac{2\pi i}{13}}) = k_0(e^{\frac{2\pi i}{52}}, \mathfrak{S}) ,$$

d. h.

$$K\{p\} = k_0\left(e^{\frac{2\pi i}{52}}, \sqrt[3]{\frac{2 + 5i + 3\sqrt{3}}{2(3 + 2i)}} + \sqrt[3]{\frac{2 + 5i - 3\sqrt{3}}{2(3 + 2i)}}\right) ,$$

womit dieser Körper vom Grade 72 festgelegt ist, obwohl wir $T_{13} = 0$ nicht kennen, welche Gleichung vom Grade 36 ist.

Beispiel für $m = -3$: $K\{1\} = k\{1\} = k = k_0(\sqrt{-3})$; $e = 6$, $\varrho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Sei $p = 13$, $\mathfrak{p} = (4 + \varrho) = (3\varrho - 1)$, $\mathfrak{p}' = (4 + \varrho^2) = (3\varrho^2 - 1)$.

Die Teilungsgleichung für den Führer \mathfrak{p} lautet bei Bindschedler:

$$T_{3\varrho-1} \equiv \mathfrak{S}^2 + (3\varrho - 1)(3\varrho + 2)\mathfrak{S} - (3\varrho - 1) = 0 .$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$\mathfrak{S} = \frac{-(3\varrho - 1)(3\varrho + 2) \pm 3(\varrho + 2)\sqrt{4 + \varrho}}{2} .$$

Es ist daher

$$K\{\mathfrak{p}\} = k(\sqrt{4 + \varrho}) = k_0(\sqrt{-3}, \sqrt{4 + \varrho}) .$$

Weil $4 + \varrho$ quadratischer Nichtrest mod. \mathfrak{p}' ist, hat die Primzahl 13 in $K\{\mathfrak{p}\}$ die Primidealzerlegung:

$$13 = \mathfrak{P}^2 \cdot \mathfrak{P}' ; \quad N(\mathfrak{P}) = 13 ; \quad N(\mathfrak{P}') = 13^2 .$$

Da in einem absolut-galois'schen Körper alle Primidealteiler einer rationalen Primzahl gleichen Grad und gleiche Ordnung haben, gilt dies a fortiori in einem absolut-abelschen Körper. Mithin ist $K\{\mathfrak{p}\}$ nur relativ abelsch über $K\{1\} = k$.

$T_{3\varrho^2-1}$ entsteht aus $T_{3\varrho-1}$ durch den Automorphismus $\varrho \rightarrow \varrho^2$, und daher wird $K\{\mathfrak{p}'\} = k(\sqrt{4 + \varrho^2}) = k_0(\sqrt{-3}, \sqrt{4 + \varrho^2})$.

Nun ist

$$\sqrt{4 + \varrho} \cdot \sqrt{4 + \varrho^2} = \sqrt{13} ,$$

folglich erhält man für das Kompositum:

$$\begin{aligned} K\{\mathfrak{p}\} (K\{\mathfrak{p}'\}) &= k_0 (\sqrt{-3}, \sqrt{4 + \varrho}, \sqrt{4 + \varrho^2}) \\ &= K\{1\} (\sqrt{4 + \varrho}, \sqrt{4 + \varrho^2}) \\ &= K\{1\} (\sqrt{4 + \varrho}, \sqrt{13}) \\ &= K\{1\} (\sqrt{4 + \varrho^2}, \sqrt{13}) . \end{aligned}$$

$k_0(\sqrt{13})$ ist aber der Unterkörper von $c(13)$ vom absoluten Grade 2, wie es die Theorie verlangt.

Die Teilungsgleichung für $p = 13$ ist bei Bindschedler nicht ausgerechnet, aber wir können sofort schließen:

$$\begin{aligned} K\{13\} &= k (\sqrt{4 + \varrho}, e^{\frac{2\pi i}{13}}) = k_0 (\sqrt{-3}, \sqrt{4 + \varrho}, e^{\frac{2\pi i}{13}}) = \\ &= k_0 (e^{\frac{2\pi i}{39}}, \sqrt{4 + \varrho}) = k_0 (e^{\frac{2\pi i}{39}}, \sqrt{4 + \varrho^2}) = \\ &= c(39) (\sqrt{4 + \varrho}) = c(39) (\sqrt{4 + \varrho^2}) . \end{aligned}$$

Damit ist eine einfache Festlegung für diesen Körper vom absoluten Grade 48 geliefert.

7. In diesem Abschnitt sei die Primzahl p weiter *ungerade*, aber Teiler der Diskriminanten von k : $p = \mathfrak{p}^2$, $n(\mathfrak{p}) = p$. Gemäß Satz 3 von Abschnitt 4 ist jetzt:

$$H_s(\mathfrak{p}^w) = \frac{1}{e} \varphi(\mathfrak{p}^w) = \frac{1}{e} n(\mathfrak{p}^w) \left(1 - \frac{1}{p}\right) = p^{w-1} \frac{p-1}{e} , \quad w \geq 1 ,$$

außer im Falle $m = -3$, $p = 3$, $w = 1$, wofür

$$H_s(\mathfrak{p}) = \frac{1}{2} \varphi(\mathfrak{p}) = \frac{1}{2} n(\mathfrak{p}) \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{p-1}{2} = 1 .$$

Der Fall $m = -3$ sei daher im folgenden zunächst ausgeschlossen.

Es wird für die Körper-Relativgrade:

$$\begin{aligned} (K\{\mathfrak{p}\} : K\{1\}) &= \frac{p-1}{e} , \\ (K\{\mathfrak{p}^{w+1}\} : K\{\mathfrak{p}^w\}) &= p, \quad w \geq 1 . \end{aligned}$$

Beim Übergang von $K\{1\}$ zu $K\{\mathfrak{p}\}$ werden also nur relativ-zyklische Körper adjungiert, deren Relativgrade zu p teilerfremd sind, beim Übergang von $K\{\mathfrak{p}^w\}$ zu $K\{\mathfrak{p}^{w+1}\}$, $w \geq 1$, nur ein relativ-zyklischer Körper vom Primzahlgrade p adjungiert.

Wir bestimmen zunächst wieder den Führer von $k(c(p^h))$, $h \geq 1$, in bezug auf den Grundkörper k . Es sind zwei Hauptfälle zu unterscheiden:

1. Hauptfall.

Es sei $p \equiv 3 \pmod{4}$ und $m = -p = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p$. Dann ist $k = k_0(\sqrt{m}) = k_0\left(\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}\right)$, ferner $k(c(p^h)) = c(p^h)$ und gemäß Abschnitt 2 ist $k = k\{1\}$. In $k(c(p^h))$ wird

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^{p^{\frac{h-1}{2}} \cdot \frac{p-1}{2}}.$$

Wegen der vollen Verzweigung wird

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{Z} = \mathfrak{T} = \mathfrak{V}_0 \supset \mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1 \supset \mathfrak{V}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{V}_{h-1} \supset \mathfrak{V}_h = \mathfrak{V}_r = \mathfrak{E};$$

$r = h$.

$$n_0 = p^{h-1} \cdot \frac{p-1}{2} > n_1 = p^{h-1} > n_2 = p^{h-2} > n_3 = p^{h-3} > \dots > n_{h-1} = p > n_h = 1$$

$$v_0 = -1 < v_1 = 0 < v_2 = p-1 < v_3 = p^2-1 < \dots < v_{h-1} = p^{h-2}-1 < v_h = p^{h-1}-1.$$

Nach dem 1. Satz von Abschnitt 4 ergibt sich: $w = 2h - 1$.

2. Hauptfall.

Es sei *nicht* gleichzeitig $p \equiv 3 \pmod{4}$ und $m = -p = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p$.

Dann hat gemäß Abschnitt 2 der Körper $k\left(\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}\right)$, der vom Relativgrade 2 in bezug auf k ist, die Relativdifferente 1 in bezug auf k .

Da \mathfrak{p} in $k\left(\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}\right)$ unverzweigt ist, gibt es zwei Unterfälle:

1. Unterfall.

\mathfrak{p} wird in $k\left(\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}\right)$ ein Primideal vom 2. Relativgrad. Dann ist in $k(c(p^h))$:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^{p^{\frac{h-1}{2}} \frac{p-1}{2}},$$

wo \mathfrak{P} ein Primideal von $k(c(p^h))$ ist, das in bezug auf k den Relativgrad 2 hat. Mithin ergibt sich für die Adjunktion von $c(p^h)$ zu k und das Primideal \mathfrak{P} :

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{Z} \supset \mathfrak{T} = \mathfrak{V}_0 \supset \mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1 \supset \mathfrak{V}_2 \supset \mathfrak{V}_3 \supset \cdots \supset \mathfrak{V}_{h-1} \supset \mathfrak{V}_h = \mathfrak{V}_r = \mathfrak{E} ; \underline{r = h} .$$

Hier ist die Ordnung n von \mathfrak{G} gleich $n = p^{h-1}(p - 1)$, aber die Werte für die n_j und v_j ; $j = 0, 1, 2, \dots, h = r$, sind die gleichen wie im 1. Hauptfall, und daher ergibt sich wieder $w = 2h - 1$.

2. Unterfall.

\mathfrak{p} zerlegt sich in $k\left(\sqrt[p]{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}\right)$ in zwei voneinander verschiedene Primideale vom 1. Relativgrad. Dann ist in $k(c(p^h))$:

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{P}')^p \cdot \frac{p-1}{2} ,$$

wo \mathfrak{P} und \mathfrak{P}' zwei voneinander verschiedene Primideale von $k(c(p^h))$ sind, die in bezug auf k den Relativgrad 1 haben. Mithin ergibt sich für die Adjunktion von $c(p^h)$ zu k und jedes der beiden Primideale \mathfrak{P} und \mathfrak{P}' :

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{Z} = \mathfrak{T} = \mathfrak{V}_0 \supset \mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1 \supset \mathfrak{V}_2 \supset \mathfrak{V}_3 \supset \cdots \supset \mathfrak{V}_{h-1} \supset \mathfrak{V}_h = \mathfrak{V}_r = \mathfrak{E}, \underline{r = h} .$$

Hier ist die Ordnung n von \mathfrak{G} gleich $n = p^{h-1}(p - 1)$, aber die Werte für die n_j und v_j ; $j = 0, 1, 2, \dots, h = r$, sind nochmals die gleichen wie im 1. Hauptfalle, und folglich ergibt sich wiederum $w = 2h - 1$.

Durch Induktionsschluß nach h ergibt sich in jedem Falle:

$$\underline{k\{\mathfrak{p}^w\} = k\{1\} \left(c(p^{\left[\frac{w+1}{2}\right]}) \right), \quad w \geq 1 .}$$

Beim Übergang von $K\{1\}$ zu $K\{\mathfrak{p}\}$ wird also der Körper $c(p)$ adjungiert, der in bezug auf $K\{1\}$ den Relativgrad $\frac{p-1}{2}$ hat. Denn da $m \neq -1$ ist, und ebenso $m = -3$ ausgeschlossen wurde, ist $e = 2$.

Beim Übergang von $K\{\mathfrak{p}^{2w-1}\}$ zu $K\{\mathfrak{p}^{2w}\}$, $w \geq 1$, wird je ein nicht absolut-zyklischer Körper vom Relativgrade p adjungiert; beim Übergang von $K\{\mathfrak{p}^{2w}\}$ zu $K\{\mathfrak{p}^{2w+1}\}$, $w \geq 1$, der Körper $c(p^{w+1})$, der in bezug auf $K\{\mathfrak{p}^{2w}\}$ den Relativgrad p hat.

Im Falle $m = -3$, $p = 3$, wird für $w \geq 2$:

$$H_s(p^w) = 3^{w-2}, \quad w \geq 2,$$

und daher wegen $H_s(p) = 1$:

$$K\{p^2\} = K\{p\} = K\{1\} = k = k_0(\sqrt{-3}).$$

Für $w \geq 3$ bleibt die Formel

$$(K\{p^{w+1}\} : K\{p^w\}) = p = 3; \quad w \geq 3,$$

erhalten.

Für $h \geq 2$ wird bei der Adjunktion von $c(3^h)$ zu k :

$$p = \mathfrak{P}^{p^{h-1}},$$

wo \mathfrak{P} ein Primideal 1. Grades von $c(3^h)$ ist. Wegen der vollen Verzweigung wird:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} = \mathfrak{Z} = \mathfrak{T} = \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \supset \mathfrak{B}_1 & \supset \mathfrak{B}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{B}_{h-2} \supset \mathfrak{B}_{h-1} = \mathfrak{B}_r = \mathfrak{G}; \\ n_0 = p^{h-1} > n_1 = p^{h-2} > n_2 = p^{h-3} > \cdots > n_{h-2} = p & > n_{h-1} = 1, \\ v_0 = -1 < v_1 = p-1 < v_2 = p^2-1 < \cdots < v_{h-2} = p^{h-2}-1 < v_{h-1} = p^{h-1}-1 & , \end{aligned}$$

und wie früher wird $w = 2h - 1$. Mithin ist zunächst für $w \geq 3$:

$$k\{p^w\} = k\{1\} \left(c(p^{\left[\frac{w+1}{2}\right]}) \right).$$

Wie man sofort sieht, bleibt diese Formel trivialerweise auch richtig für $w = 1$ und $w = 2$, so daß diese Formel für jeden in diesem Abschnitt 7 betrachteten Fall richtig bleibt.

Beim Übergang von $K\{p^{2w}\}$ zu $K\{p^{2w+1}\}$, $w \geq 1$, wird mithin der Körper $c(3^{w+1})$ adjungiert, der in bezug auf $K\{p^{2w}\}$ den Relativgrad $p = 3$ hat. Beim Übergang von $K\{p^{2w+1}\}$ zu $K\{p^{2w+2}\}$, $w \geq 1$, wird ein nicht absolut-zyklischer Körper vom Relativgrade 3 adjungiert.

Anwendung auf die Teilungsgleichungen:

Sei $\varrho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $Z = e^{\frac{2\pi i}{9}}$. Bindschedler gibt folgende Teilungsgleichungen an:

$$\underline{\mathfrak{f} = \mathfrak{p}^3 = (2\varrho + 1)^3}.$$

$$T_{(2\varrho+1)^3} \equiv \mathfrak{S}^3 - 3\mathfrak{S}^2 - 24\mathfrak{S} - 1 = 0.$$

Sie ist das Produkt der 3 Linearfaktoren:

$$T_{(2\varrho+1)^3} \equiv [\mathfrak{S} - \{1 - 3(Z + Z^{-1})\}] [\mathfrak{S} - \{1 - 3(Z^2 + Z^{-2})\}] [\mathfrak{S} - \{1 - 3(Z^4 + Z^{-4})\}] ,$$

und

$$k(Z^j + Z^{-j}) = k_0(\varrho, Z^j + Z^{-j}) = k_0(Z) = c(9); \quad j = 1, 2, 4 .$$

$$\underline{\mathfrak{f} = \mathfrak{p}^4 = (2\varrho + 1)^4} .$$

$$T_{(2\varrho+1)^4} \equiv \mathfrak{S}^9 - 9\mathfrak{S}^8 + 684\mathfrak{S}^7 - 3972\mathfrak{S}^6 + \\ + 12033\mathfrak{S}^5 - 19647\mathfrak{S}^4 - 3318\mathfrak{S}^3 - 6111\mathfrak{S}^2 + 657\mathfrak{S} - 1 = 0 .$$

In $k_0(Z^j + Z^{-j})$ zerfällt $T_{(2\varrho+1)^4}$ in das Produkt von 3 Faktoren 3. Grades:

$$T_{(2\varrho+1)^4} \equiv [\mathfrak{S}^3 - 3\mathfrak{S}^2 - 3\{-73 + 27(Z^1 + Z^{-1}) + 81(Z^2 + Z^{-2})\}\mathfrak{S} - 1] \times \\ [\mathfrak{S}^3 - 3\mathfrak{S}^2 - 3\{-73 + 27(Z^2 + Z^{-2}) + 81(Z^4 + Z^{-4})\}\mathfrak{S} - 1] \times \\ [\mathfrak{S}^3 - 3\mathfrak{S}^2 - 3\{-73 + 27(Z^4 + Z^{-4}) + 81(Z^1 + Z^{-1})\}\mathfrak{S} - 1] ,$$

und jede Wurzel legt den gleichen relativ-zyklischen Körper vom Relativgrad 3 in bezug auf $c(9)$ fest, der *nicht* absolut-abelsch ist.

8. In diesem Abschnitt sei $\underline{p = 2}$ und $\underline{m \equiv 3 \pmod{4}}$. Weil 2 in der Diskriminanten von $k = k_0(\sqrt{m})$ aufgeht, ist $2 = \mathfrak{p}^2$, $n(\mathfrak{p}) = 2$. Nach Satz 3 von Abschnitt 4 wird, falls $m \neq -1$ ist:

$$H_s(\mathfrak{p}) = 1, \quad H_s(\mathfrak{p}^2) = 2, \quad H_s(\mathfrak{p}^w) = 2^{w-2}, \quad w \geq 3 .$$

Folglich ist:

$$\begin{aligned} K\{\mathfrak{p}\} &= K\{1\} ; \\ (K\{\mathfrak{p}^2\} : K\{\mathfrak{p}\}) &= 2 ; \\ K\{\mathfrak{p}^3\} &= K\{\mathfrak{p}^2\} ; \\ (K\{\mathfrak{p}^{w+1}\} : K\{\mathfrak{p}^w\}) &= 2, \quad w \geq 3 . \end{aligned}$$

Beim Übergang von $K\{\mathfrak{p}^w\}$ zu $K\{\mathfrak{p}^{w+1}\}$, $w = 1$ und $w \geq 3$, wird also je ein relativ-quadratischer Körper adjungiert.

Für $m = -1$ ist $\mathfrak{p} = (1 + i)$ und

$$H_s(\mathfrak{p}) = H_s(\mathfrak{p}^2) = H_s(\mathfrak{p}^3) = 1, \quad H_s(\mathfrak{p}^w) = 2^{w-3}, \quad w \geq 4 .$$

Mithin ist

$$K\{\mathfrak{p}^3\} = K\{\mathfrak{p}^2\} = K\{\mathfrak{p}\} = K\{1\} = k = k_0(\sqrt{-1}) ,$$

und

$$(K\{\mathfrak{p}^{w+1}\} : K\{\mathfrak{p}^w\}) = 2, \quad w \geq 3 .$$

Erst von $w = 3$ an wird also beim Übergang von $K\{\mathfrak{p}^w\}$ zu $K\{\mathfrak{p}^{w+1}\}$ jeweilen ein relativ-quadratischer Körper adjungiert.

Da $k\{1\}$ den Körper $k_0(\sqrt{-1})$ enthält, anderseits jeder Unterkörper eines Körpers $c(2^{h_0})$, $h_0 \geq 3$, der den Körper $k_0(\sqrt{-1}) = c(4)$ enthält, ein Körper $c(2^{h'_0})$, $2 \leq h'_0 \leq h_0$ ist, genügt es, den Führer von $k(c(2^{h_0}))$, wo hier und im ganzen Abschnitt $h_0 \geq 3$ sei, in bezug auf den Grundkörper k zu bestimmen.

Es sind 2 Hauptfälle zu unterscheiden:

1. *Hauptfall*: $m \neq -1$.

Dann hat gemäß Abschnitt 2 der Körper $k(\sqrt{-1})$, der vom Relativgrad 2 in bezug auf k ist, die Relativdifferente 1 in bezug auf k . Da \mathfrak{p} in $k(\sqrt{-1})$ also unverzweigt ist, gibt es 2 Unterfälle:

1. *Unterfall*: $m \equiv 3 \pmod{8}$.

\mathfrak{p} wird in $k(\sqrt{-1})$ ein Primideal vom 2. Relativgrad. Dann ist in $k(c(2^{h_0}))$:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^{2^{h_0-2}},$$

wo \mathfrak{P} ein Primideal von $k(c(2^{h_0}))$ ist, das in bezug auf k den Relativgrad 2 hat. Mithin ergibt sich für die Adjunktion von $c(2^{h_0})$ zu k und das Primideal \mathfrak{P} :

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} &\equiv \mathfrak{Z} \supset \mathfrak{T} \equiv \mathfrak{V} \equiv \mathfrak{V}_0 \supset \mathfrak{V}_1 & \supset \mathfrak{V}_2 & \supset \cdots \supset \mathfrak{V}_{h_0-3} & \supset \mathfrak{V}_{h_0-2} \equiv \mathfrak{E} ; \\ &&&& \underline{r = h_0 - 2} . \\ n &= 2^{h_0-1} > n_0 = 2^{h_0-2} > n_1 = 2^{h_0-3} > n_2 = 2^{h_0-4} > \cdots > n_{h_0-3} = 2 & > n_{h_0-2} = 1 . \\ v_0 &= -1 < v_1 = 2^2 - 1 < v_2 = 2^3 - 1 < \cdots < v_{h_0-3} = 2^{h_0-2} - 1 < v_{h_0-2} = 2^{h_0-1} - 1 . \end{aligned}$$

Nach dem 1. Satz von Abschnitt 4 ergibt sich $w = 2(h_0 - 1)$.

2. *Unterfall*: $m \equiv 7 \pmod{8}$; $((m \neq -1))$.

\mathfrak{p} zerlegt sich in $k(\sqrt{-1})$ in zwei voneinander verschiedene Primideale vom 1. Relativgrad. Dann ist in $k(c(2^{h_0}))$:

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{P} \ \mathfrak{P}')^{2^{h_0-2}},$$

wo \mathfrak{P} und \mathfrak{P}' zwei voneinander verschiedene Primideale von $k(c(2^{h_0}))$ sind, die in bezug auf k den Relativgrad 1 haben. Folglich ergibt sich für die Adjunktion von $c(2^{h_0})$ zu k und jedes der beiden Primideale \mathfrak{P} und \mathfrak{P}' :

$$\mathfrak{G} \supset \mathfrak{Z} \equiv \mathfrak{T} \equiv \mathfrak{V} \equiv \mathfrak{V}_0 \supset \mathfrak{V}_1 \quad \supset \mathfrak{V}_2 \quad \supset \cdots \supset \mathfrak{V}_{h_0-3} \quad \supset \mathfrak{V}_{h_0-2} \equiv \mathfrak{E} ;$$

$$\underline{r = h_0 - 2} .$$

$$n = 2^{h_0-1} > n_0 = 2^{h_0-2} \quad > n_1 = 2^{h_0-3} > n_2 = 2^{h_0-4} > \cdots > n_{h_0-3} = 2 \quad > n_{h_0-2} = 1 .$$

$$v_0 = -1 < v_1 = 2^2 - 1 < v_2 = 2^3 - 1 < \cdots < v_{h_0-3} = 2^{h_0-2} - 1 < v_{h_0-2} = 2^{h_0-1} - 1 .$$

Da die Werte für die n_j und v_j , $j = 0, 1, 2, \dots, h_0 - 2 = r$, die gleichen sind wie im 1. Unterfall, ergibt sich wieder $w = 2(h_0 - 1)$.

2. *Hauptfall*: $m = -1$.

Es ist $k = k_0(\sqrt{-1})$, ferner $k(c(2^{h_0})) = c(2^{h_0})$. In $c(2^{h_0})$ wird:

$$\mathfrak{p} = (1 + i) = \mathfrak{P}^{2^{h_0-2}} ,$$

wo \mathfrak{P} ein Primideal von $c(2^{h_0})$ vom absoluten Grade 1 ist. Wegen der vollen Verzweigung wird:

$$\mathfrak{G} \equiv \mathfrak{Z} \equiv \mathfrak{T} \equiv \mathfrak{V} \equiv \mathfrak{V}_0 \supset \mathfrak{V}_1 \quad \supset \mathfrak{V}_2 \quad \supset \cdots \supset \mathfrak{V}_{h_0-3} \quad \supset \mathfrak{V}_{h_0-2} \equiv \mathfrak{E} ;$$

$$\underline{r = h_0 - 2} .$$

$$n = n_0 = 2^{h_0-2} > n_1 = 2^{h_0-3} > n_2 = 2^{h_0-4} > \cdots > n_{h_0-3} = 2 \quad > n_{h_0-2} = 1 .$$

$$v_0 = -1 < v_1 = 2^2 - 1 < v_2 = 2^3 - 1 < \cdots < v_{h_0-3} = 2^{h_0-2} - 1 < v_{h_0-2} = 2^{h_0-1} - 1 .$$

Aus dem gleichen Grunde wie eben wird wieder $w = 2(h_0 - 1)$.

Folglich wird *in jedem Falle*:

$$\underline{k\{\mathfrak{p}^w\} = k\{1\} \left(c(2^{\lceil \frac{w+2}{2} \rceil}) \right) , \quad w \geq 1 .}$$

Denn zunächst ist diese Formel bewiesen für $w \geq 4$, da aber $c(4)$ in $k\{1\}$ steckt, gilt sie trivialerweise auch für $w = 1, 2$ und 3 .

Ist daher $m \neq -1$, so wird beim Übergang von $K\{\mathfrak{p}\}$ zu $K\{\mathfrak{p}^2\}$ ein relativ-quadratischer Körper adjungiert, der *nicht* absolut-abelsch ist.

Für beliebiges $m \equiv 3 \pmod{4}$, also inklusive $m = -1$ wird beim Übergang von $K\{\mathfrak{p}^{2w-1}\}$ zu $K\{\mathfrak{p}^{2w}\}$, $w \geq 2$, der Körper $c(2^{w+1})$ adjungiert, der in bezug auf $K\{\mathfrak{p}^{2w-1}\}$ relativ-quadratisch ist, beim Übergang von $K\{\mathfrak{p}^{2w}\}$ zu $K\{\mathfrak{p}^{2w+1}\}$, $w \geq 2$, ein relativ-quadratischer Körper, der *nicht* absolut-abelsch ist.

Anwendung auf die Teilungsgleichungen:

Beispiele für $m = -1$. Nach Hagenbuch wird:

$$\underline{\underline{f = p^4 = (1+i)^4.}}$$

$$T_{(1+i)^4} \equiv \mathfrak{S}^2 - 6\mathfrak{S} + 1 = 0.$$

Diese Gleichung hat die Wurzeln $3 \pm 2\sqrt{2}$, womit $K\{p^4\} = c(8)$ bestätigt wird.

$$\underline{\underline{f = p^5 = (1+i)^5.}}$$

$$T_{(1+i)^5} \equiv \mathfrak{S}^4 + 20\mathfrak{S}^3 - 26\mathfrak{S}^2 + 20\mathfrak{S} + 1 = 0.$$

Diese Gleichung hat die Wurzeln:

$$\mathfrak{S}_{1,2} = -5 - 4\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})\sqrt{1 + \sqrt{2}}$$

und

$$\mathfrak{S}_{3,4} = -5 + 4\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}(1 - \sqrt{2})\sqrt{1 - \sqrt{2}},$$

so daß

$$K\{p^5\} = c(8)(\sqrt{1 + \sqrt{2}}).$$

$$\underline{\underline{f = p^6 = (1+i)^6.}}$$

$$T_{(1+i)^6} \equiv \mathfrak{S}^8 - 88\mathfrak{S}^7 + 92\mathfrak{S}^6 - 872\mathfrak{S}^5 + \\ + 1990\mathfrak{S}^4 - 872\mathfrak{S}^3 + 92\mathfrak{S}^2 - 88\mathfrak{S} + 1 = 0.$$

Diese Gleichung hat die Wurzeln:

$$\mathfrak{S}_{1,2} = 11 + 8\sqrt{2} + (8 + 4\sqrt{2})\sqrt{1 + \sqrt{2}} \pm 2[(3 + 2\sqrt{2}) + (1 + 2\sqrt{2})\sqrt{1 + \sqrt{2}}]\sqrt{2 + \sqrt{2}},$$

$$\mathfrak{S}_{3,4} = 11 + 8\sqrt{2} - (8 + 4\sqrt{2})\sqrt{1 + \sqrt{2}} \pm 2[(3 + 2\sqrt{2}) - (1 + 2\sqrt{2})\sqrt{1 + \sqrt{2}}]\sqrt{2 + \sqrt{2}},$$

$$\mathfrak{S}_{5,6} = 11 - 8\sqrt{2} + (8 - 4\sqrt{2})\sqrt{1 - \sqrt{2}} \pm 2[(3 - 2\sqrt{2}) + (1 - 2\sqrt{2})\sqrt{1 - \sqrt{2}}]\sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

$$\mathfrak{S}_{7,8} = 11 - 8\sqrt{2} - (8 - 4\sqrt{2})\sqrt{1 - \sqrt{2}} \pm 2[(3 - 2\sqrt{2}) - (1 - 2\sqrt{2})\sqrt{1 - \sqrt{2}}]\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Wegen $k_0(i, \sqrt{2 + \sqrt{2}}) = c(16)$ wird also $K\{p^6\} = c(16)(\sqrt{1 + \sqrt{2}})$.

Weitere Beispiele für die Führer $f = (2) = p^2$ und $f = (4) = p^4$ findet man in Fueter, S. 352/353 für $m = -5$ und $m = -13$.

9. In diesem Abschnitt sei weiter $p = 2$, aber $m \equiv \pm 2 \pmod{8}$. Da wieder $2 = p^2$, $n(p) = 2$ ist, gelten die gleichen Werte für $H_s(p^w)$, $w \geq 1$, wie im letzten Abschnitt für $m \equiv 3 \pmod{4}$, $m \not\equiv -1$, und mithin auch für die Relativgrade $(K\{p^w\} : K\{p^{w-1}\})$.

Weil $\sqrt{-1}$ nicht in $k\{1\}$ enthalten ist, gilt im relativ-quadratischen Erweiterungskörper $k(\sqrt{-1})$ die Primidealzerlegung

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{*2},$$

und da die ganze Zahl $\frac{\sqrt{m}}{1+i}$ die Relativdifferente $-i\sqrt{m}$ in bezug auf k hat, ist die Relativdifferente von $k(\sqrt{-1})$ in bezug auf k gleich \mathfrak{p}^* oder \mathfrak{p}^{*2} , also die Relativdiskriminante gleich \mathfrak{p} oder \mathfrak{p}^2 . Nach Satz 2 von Abschnitt 4 wird der Führer für die Untergruppe vom Index 2 im Grundkörper k resp. gleich \mathfrak{p} oder \mathfrak{p}^2 . Nach wiederholt angewandtem Schlusse ist daher entweder $k\{\mathfrak{p}\} = k\{1\}(\sqrt{-1})$ oder $k\{\mathfrak{p}^2\} = k\{1\}(\sqrt{-1})$. Das erstere ist aber auszuschließen, da $K\{\mathfrak{p}\} = K\{1\}$, also auch $k\{\mathfrak{p}\} = k\{1\}$ ist, und folglich $\sqrt{-1}$ in $k\{1\}$ wäre, was nicht der Fall ist. Da $\sqrt{\pm 2}$ ebenfalls in $k\{1\}$ liegt, kann man schreiben:

$$k\{\mathfrak{p}^2\} = k\{1\}(c(2^2)) = k\{1\}(c(2^3)).$$

Nach einer schon gemachten Bemerkung genügt es daher, für die Erweiterung $k(c(2^{h_0}))$, $h_0 \geq 4$, den zugehörigen Führer im Grundkörper zu bestimmen.

Es sind wieder zwei Hauptfälle zu unterscheiden:

1. *Hauptfall*: $m \neq -2$.

Der Körper $k(\sqrt{\pm 2}) = k(\sqrt{\mu})$, wo $\mu = \frac{m}{\pm 2}$, hat die Relativdifferente 1 in bezug auf k und man sieht sofort¹⁷⁾, daß zwei Unterfälle zu unterscheiden sind:

1. *Unterfall*: $m \equiv 8 \pm 2 \pmod{16}$.

In diesem Falle erhöht \mathfrak{p} in $k(\sqrt{\pm 2})$ seinen Grad von 1 auf 2. Ist daher \mathfrak{P} der Primidealteiler von (2) in $k(c(2^{h_0}))$, $h_0 \geq 4$, so wird

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^{2^{h_0-2}},$$

und für dieses \mathfrak{P} in bezug auf k :

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{Z} \supset \mathfrak{T} \supset \mathfrak{V} \supset \mathfrak{V}_0 \supset \mathfrak{V}_1 \supset \mathfrak{V}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{V}_{h_0-3} \supset \mathfrak{V}_{h_0-2} \supset \mathfrak{E};$$

$$r = h_0 - 2.$$

$$n = 2^{h_0-1} > n_0 = 2^{h_0-2} > n_1 = 2^{h_0-3} > n_2 = 2^{h_0-4} > \cdots > n_{h_0-3} = 2 > n_{h_0-2} = 1.$$

$$v_0 = -1 < v_1 = 2 - 1 < v_2 = 2^3 - 1 < \cdots < v_{h_0-3} = 2^{h_0-2} - 1 < v_{h_0-2} = 2^{h_0-1} - 1.$$

Gemäß Satz 1 von Abschnitt 4 wird $w = 2h_0 - 3$.

¹⁷⁾ z. B. nach Satz 8, S. 377/378 in *Hilbert, David, Über die Theorie des relativ-quadratischen Zahlkörpers, Gesammelte Abhandlungen, 1. Band, Berlin 1932*, S. 370/482.

2. Unterfall: $m \equiv \pm 2 \pmod{16}$. $((m \neq -2))$.

In diesem Falle zerfällt \mathfrak{p} in $k(\sqrt{\pm 2}) = k(\sqrt{\mu})$ in zwei voneinander verschiedene Primideale vom 1. Relativgrad. In $k(c(2^{h_0}))$, $h_0 \geq 4$, wird

$$\mathfrak{p} = (\mathfrak{P} \mathfrak{P}')^{2^{h_0-2}}$$

und für das Primideal \mathfrak{P} in bezug auf k :

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} \supset \mathfrak{Z} \equiv \mathfrak{T} \equiv \mathfrak{V} \equiv \mathfrak{V}_0 \supset \mathfrak{V}_1 & \quad \supset \mathfrak{V}_2 \quad \supset \cdots \supset \mathfrak{V}_{h_0-3} \quad \supset \mathfrak{V}_{h_0-2} \equiv \mathfrak{E}; \\ n = 2^{h_0-1} > n_0 = 2^{h_0-2} > n_1 = 2^{h_0-3} > n_2 = 2^{h_0-4} > \cdots > n_{h_0-3} = 2 & \quad > n_{h_0-2} = 1. \\ v_0 = -1 < v_1 = 2 - 1 < v_2 = 2^3 - 1 < \cdots < v_{h_0-3} = 2^{h_0-2} - 1 < v_{h_0-2} = 2^{h_0-1} - 1. & \end{aligned}$$

Da die Werte für die n_j und v_j , $j = 0, 1, 2, \dots, h_0 - 2 = r$, die gleichen sind wie im 1. Unterfalle, wird wieder $w = 2h_0 - 3$.

2. Hauptfall: $m = -2$.

Es ist $K\{1\} = k\{1\} = k = k_0(\sqrt{-2})$, also $k(c(2^{h_0})) = c(2^{h_0})$, $h_0 \geq 4$. In $k(c(2^{h_0}))$ wird

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^{2^{h_0-2}},$$

wo \mathfrak{P} vom Relativgrad 1 in bezug auf k ist. Wegen der vollen Verzweigung wird:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} \equiv \mathfrak{Z} \equiv \mathfrak{T} \equiv \mathfrak{V} \equiv \mathfrak{V}_0 \supset \mathfrak{V}_1 & \quad \supset \mathfrak{V}_2 \quad \supset \cdots \supset \mathfrak{V}_{h_0-3} \quad \supset \mathfrak{V}_{h_0-2} \equiv \mathfrak{E}; \\ n = n_0 = 2^{h_0-2} > n_1 = 2^{h_0-3} > n_2 = 2^{h_0-4} > \cdots > n_{h_0-3} = 2 & \quad > n_{h_0-2} = 1. \\ v_0 = -1 < v_1 = 2 - 1 < v_2 = 2^3 - 1 < \cdots < v_{h_0-3} = 2^{h_0-2} - 1 < v_{h_0-2} = 2^{h_0-1} - 1. & \end{aligned}$$

Da die Werte für die n_j und die v_j , $j = 0, 1, 2, \dots, h_0 - 2 = r$, dieselben sind wie im 1. Hauptfall, folgt wieder $w = 2h_0 - 3$.

Nach oft angewandtem Schlusse wird mithin:

$$\underline{k\{\mathfrak{p}^w\} = k\{1\} \left(c(2^{\left[\frac{w+3}{2}\right]}) \right), \quad w \geq 2.}$$

Nach unserer Herleitung gilt diese Formel zunächst nur für $w \geq 5$, wegen $k\{\mathfrak{p}^2\} = k\{1\}(\sqrt{-1})$ ist sie aber auch für $w \geq 2$ richtig, dagegen *nicht* für $w = 1$.

Wir fassen zusammen: $K\{\mathfrak{p}\} = K\{1\}$; $K\{\mathfrak{p}^2\} = K\{\mathfrak{p}^3\} = K\{1\}(\sqrt{-1})$,

für $w \geq 2$ entsteht $K\{\mathfrak{p}^{2w}\}$ aus $K\{\mathfrak{p}^{2w-1}\}$ durch Adjunktion eines relativ-quadratischen Körpers, der *nicht* absolut-abelsch ist, $K\{\mathfrak{p}^{2w+1}\}$ aus $K\{\mathfrak{p}^{2w}\}$ durch Adjunktion von $c(2^{w+2})$, welcher Körper relativ-quadratisch in bezug auf $K\{\mathfrak{p}^{2w}\}$ ist.

Anwendung auf die Teilungsgleichungen:

Beispiele für die Führer $\mathfrak{f} = (2) = \mathfrak{p}^2$ und $\mathfrak{f} = (4) = \mathfrak{p}^4$ findet man in Fueter, S. 352/353 für $m = -2, -6$ und -10 .

10. In diesem Abschnitt sei weiter $p = 2$, aber $m \equiv 5 \pmod{8}$. In k ist $2 = \mathfrak{p}$, $n(\mathfrak{p}) = 2^2$. Nach Satz 3 von Abschnitt 4 wird, falls $m \neq -3$ ist:

$$H_s(\mathfrak{p}) = 3, \quad H_s(\mathfrak{p}^w) = 3 \cdot 2^{2w-3}, \quad w \geq 2.$$

Beim Übergang von $K\{1\}$ zu $K\{\mathfrak{p}\}$ wird also ein relativ-zyklischer kubischer Körper adjungiert, der gewiß nicht absolut-abelsch ist, da die Galois'sche Gruppe von $c(2^{h_0})$, $h_0 \geq 2$, die Ordnung 2^{h_0-1} hat, beim Übergang von $K\{\mathfrak{p}^{w-1}\}$ zu $K\{\mathfrak{p}^w\}$, $w \geq 2$, je ein relativ-quadratischer Körper.

Für $m = -3$ ist:

$$H_s(\mathfrak{p}) = 1, \quad H_s(\mathfrak{p}^w) = 2^{2w-3}, \quad w \geq 2.$$

Es ist folglich

$$K\{\mathfrak{p}\} = K\{1\} = k = k_0(\sqrt{-3}),$$

dagegen wird beim Übergang von $K\{\mathfrak{p}^{w-1}\}$ zu $K\{\mathfrak{p}^w\}$, $w \geq 2$, je ein relativ-quadratischer Körper adjungiert wie im allgemeinen Falle $m \equiv 5 \pmod{8}$.

In jedem Falle ($m \neq -3, m = -3$) gilt weiter:

Da die 2-Differente von k gleich 1 ist, anderseits die absolute Differente von $k_0(\sqrt{-1})$ gleich (2) ist, ist die Relativdifferente von $k(\sqrt{-1})$ in bezug auf k gleich (2), also die Relativdiskriminante gleich $(4) = \mathfrak{p}^2$. Nach dem 2. Satz von Abschnitt 4 ist folglich

$$k\{\mathfrak{p}^2\} = k\{1\}(\sqrt{-1}) = k\{1\}(c(4)) = k\{1\}(c(2^2)).$$

Wie wir schon zweimal benutzt haben, genügt es daher, für die Erweiterung $k(c(2^{h_0}))$, $h_0 \geq 3$, den zugehörigen Führer im Grundkörper zu bestimmen. Für diese Erweiterung von k wird:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^{2^{h_0-1}},$$

wo \mathfrak{P} ein Primideal von $k(c(2^{h_0}))$ ist, das in bezug auf k den Relativgrad 1 hat. Für \mathfrak{P} wird in bezug auf k :

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{G} = \mathfrak{Z} = \mathfrak{T} = \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \supset \mathfrak{B}_1 \supset \mathfrak{B}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{B}_{h_0-2} \supset \mathfrak{B}_{h_0-1} \equiv \mathfrak{E} ; \\ n = n_0 = 2^{h_0-1} > n_1 = 2^{h_0-2} > n_2 = 2^{h_0-3} > \cdots > n_{h_0-2} = 2 > n_{h_0-1} = 1 . \\ v_0 = -1 < v_1 = 2 - 1 < v_2 = 2^2 - 1 < \cdots < v_{h_0-2} = 2^{h_0-2} - 1 < v_{h_0-1} = 2^{h_0-1} - 1 . \end{array} \right\} (11)$$

Gemäß Satz 1 von Abschnitt 4 wird $w = h_0$ und

$$\underline{k\{\mathfrak{p}^w\} = k\{1\}(c(2^w))}, \quad w \geq 1 .$$

Zunächst gilt diese Formel nur, falls $w \geq 3$ ist, nach den schon oben gemachten Bemerkungen ist sie aber auch für $w = 1$ und $w = 2$ richtig.

Wir fassen zusammen: Für $m = -3$ ist $K\{\mathfrak{p}\} = K\{1\}$, im allgemeinen Fall dagegen entsteht $K\{\mathfrak{p}\}$ aus $K\{1\}$ durch Adjunktion eines relativzyklischen kubischen Körpers, der nicht absolut-abelsch ist. In jedem Falle entsteht dann $K\{\mathfrak{p}^2\}$ aus $K\{\mathfrak{p}\}$ durch Adjunktion von $\sqrt{-1}$, und für $w \geq 3$ der Körper $K\{\mathfrak{p}^w\}$ aus $K\{\mathfrak{p}^{w-1}\}$ durch Adjunktion von $c(2^w)$, welcher Körper in bezug auf $K\{\mathfrak{p}^{w-1}\}$ relativ-quadratisch ist, und Adjunktion eines weiteren relativ-quadratischen Körpers, der *nicht* absolut-abelsch ist.

Anwendung auf die Teilungsgleichungen.

Beispiele für $m = -3$. Nach Bindschedler wird:

$$\underline{\mathfrak{f} = \mathfrak{p}^2 = (4)} .$$

$$T_4 \equiv \mathfrak{S}^2 + 10 \mathfrak{S} - 2 = 0 .$$

Die Wurzeln sind $\mathfrak{S} = -5 \pm 3\sqrt{3}$, womit $K\{\mathfrak{p}^2\} = K\{4\} = k(\sqrt{-1}) = k_0(\sqrt{-3}, \sqrt{-1}) = k_0(\sqrt{-3}, \sqrt{3}) = c(12)$ bestätigt wird.

$$\underline{\mathfrak{f} = \mathfrak{p}^3 = (8)} .$$

$$\begin{aligned} T_8 \equiv & \mathfrak{S}^8 - 104 \mathfrak{S}^7 + 952 \mathfrak{S}^6 - 4124 \mathfrak{S}^5 + 3430 \mathfrak{S}^4 - 1544 \mathfrak{S}^3 + \\ & + 7336 \mathfrak{S}^2 + 616 \mathfrak{S} - 2 = 0 . \end{aligned}$$

Durch Adjunktion von $\sqrt{3}$ zerfällt diese Gleichung in die beiden Polynome 4. Grades:

$$\left[\mathfrak{S}^4 - 4(13 - 6\sqrt{3}) \mathfrak{S}^3 - 12(1 - 3\sqrt{3}) \mathfrak{S}^2 - 2(47 - 9\sqrt{3}) \mathfrak{S} - (5 - 3\sqrt{3}) \right] \times \\ \left[\mathfrak{S}^4 - 4(13 + 6\sqrt{3}) \mathfrak{S}^3 - 12(1 + 3\sqrt{3}) \mathfrak{S}^2 - 2(47 + 9\sqrt{3}) \mathfrak{S} - (5 + 3\sqrt{3}) \right].$$

Der zweite dieser beiden Faktoren 4. Grades zerlegt sich durch Adjunktion von $\sqrt{2}$ in die beiden Polynome 2. Grades:

$$\left\{ \mathfrak{S}^2 - \left[(26 + 12\sqrt{3}) - (18 + 9\sqrt{3})\sqrt{2} \right] \mathfrak{S} + \left[(7 - 6\sqrt{3}) + 9 \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} \right] \right\} \times \\ \left\{ \mathfrak{S}^2 - \left[(26 + 12\sqrt{3}) + (18 + 9\sqrt{3})\sqrt{2} \right] \mathfrak{S} + \left[(7 - 6\sqrt{3}) - 9 \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} \right] \right\}.$$

Der zweite dieser beiden quadratischen Faktoren hat die beiden Wurzeln:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2} \{ (26 + 12\sqrt{3}) + \\ + (18 + 9\sqrt{3})\sqrt{2} \pm (9 + 6\sqrt{3})\sqrt{2} \cdot \sqrt{(4\sqrt{3} - 1) + (3\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}} \}.$$

Es ist mithin

$$K\{8\} = c(24) \sqrt{(4\sqrt{3} - 1) + (3\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}}.$$

Beispiele für die Führer $\mathfrak{f} = (2) = \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{f} = (4) = \mathfrak{p}^2$ findet man in Fueter, S. 352/354 für $m = -11, -19, -35, -43, -51$.

11. In diesem Abschnitt sei weiter $p = 2$, aber $m \equiv 1 \pmod{8}$. In k ist $2 = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$, $n(\mathfrak{p}) = n(\mathfrak{p}') = 2$. Man beachte hier generell die Formel (7).

Nach Satz 3 von Abschnitt 4 wird:

$$H_s(p) = 1, \quad H_s(p^w) = 2^{2w-3}, \quad w \geq 2.$$

Es ist folglich:

$$\begin{aligned} K\{p\} &= K\{1\}, \\ (K\{p^2\} : K\{p\}) &= 2, \end{aligned}$$

und für $w \geq 2$: $(K\{p^{w+1}\} : K\{p^w\}) = 4$.

Ferner ist für jeden der beiden Primteiler $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$ von (2) :

$$H_s(\mathfrak{p}) = 1, \quad H_s(\mathfrak{p}^w) = 2^{w-2}, \quad w \geq 2,$$

folglich:

$$\begin{aligned} K\{\mathfrak{p}\} &= K\{\mathfrak{p}^2\} = K\{1\}, \\ (K\{\mathfrak{p}^{w+1}\} : K\{\mathfrak{p}^w\}) &= 2, \quad w \geq 2. \end{aligned}$$

Weil die 2-Differente von k gleich 1 ist, anderseits die absolute Differente von $k_0(\sqrt{-1})$ gleich (2) ist, ist die Relativdifferente von $k(\sqrt{-1})$ in bezug auf k gleich (2), also die Relativdiskriminante gleich (4) = $p^2 \cdot p'^2$. Nach dem 2. Satz von Abschnitt 4 ist mithin:

$$k\{p^2\} = k\{p^2 \cdot p'^2\} = k\{1\}(\sqrt{-1}) = k\{1\}(c(2^2)) .$$

Es genügt also wieder, für die Erweiterung $k(c(2^{h_0}))$, $h_0 \geq 3$, den zugehörigen Führer im Grundkörper zu bestimmen. Für diese Erweiterung von k wird:

$$p = \mathfrak{P}^{2^{h_0-1}} , \quad p' = \mathfrak{P}'^{2^{h_0-1}} ,$$

wo \mathfrak{P} und \mathfrak{P}' den absoluten Grad 1 haben. Sowohl für \mathfrak{P} wie für \mathfrak{P}' gilt die Aufstellung (11) des letzten Abschnittes, und daher wird $w = h_0$ und:

$$k\{p^w\} = k\{p^w \cdot p'^w\} = k\{1\}(c(2^w)) , \quad w \geq 1 .$$

Wir fassen zusammen: Es ist $K\{p\} = K\{1\}$; $K\{p^2\} = K\{1\}(\sqrt{-1})$. Für $w \geq 2$ entsteht $K\{p^{w+1}\}$ aus $K\{p^w\}$ durch Adjunktion von $c(2^{w+1})$, welcher Körper in bezug auf $K\{p^w\}$ relativ-quadratisch ist, und Adjunktion eines relativ-quadratischen Zahlkörpers, der *nicht* absolut-abelsch ist.

Anwendung auf die Teilungsgleichungen:

Für $m = -7$ und die beiden Führer $\mathfrak{f} = (2)$ und $\mathfrak{f} = (4)$ findet sich dieses Resultat bestätigt in Fueter, S. 352.

12. Wir bestimmen in diesem Abschnitt $k\{\mathfrak{f}\}$ für den Fall, daß \mathfrak{f} weder das Einheitsideal noch ein Stammideal ist.

Da $K\{\mathfrak{f}\}$ in bezug auf k eine nur durch die Primidealteiler von \mathfrak{f} teilbare Relativdiskriminante hat, enthält die Relativdiskriminante von $k\{\mathfrak{f}\}$ in bezug auf k natürlich auch nur Primideale, die in \mathfrak{f} aufgehen.

Sind \mathfrak{f}_1 und \mathfrak{f}_2 zunächst irgend zwei teilerfremde Ideale, und $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_2$, so enthält $K\{\mathfrak{f}\}$ das Kompositum $K\{\mathfrak{f}_1\}(K\{\mathfrak{f}_2\})$ ¹⁸⁾, also a fortiori das Kompositum $k\{\mathfrak{f}_1\}(k\{\mathfrak{f}_2\})$, folglich enthält $k\{\mathfrak{f}\}$ gemäß seiner Definition $k\{\mathfrak{f}_1\}(k\{\mathfrak{f}_2\})$.

Bemerkung: Bedeutet k^* den größten absolut-abelschen Unterkörper von $K\{\mathfrak{f}_1\}(K\{\mathfrak{f}_2\})$, so umfaßt k^* nach seiner Definition das Kompositum $k\{\mathfrak{f}_1\}(k\{\mathfrak{f}_2\})$. Es ist aber wohl zu beachten, daß k^* nicht gleich $k\{\mathfrak{f}_1\}(k\{\mathfrak{f}_2\})$ zu sein braucht, noch daß k^* einen Relativgrad in bezug auf $k\{\mathfrak{f}_1\}(k\{\mathfrak{f}_2\})$

¹⁸⁾ Fueter, Satz 215, S. 236.

zu haben braucht, der ein Teiler von e ist¹⁹⁾). Ist z. B. $p = p \cdot p'$, $p \neq p'$, und p ungerade, ferner $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{p}^w$, $\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{p}'^w$, $w \geq 1$, so ist

$$k\{\mathfrak{f}_1\}(k\{\mathfrak{f}_2\}) = k\{1\}(k\{1\}) = k\{1\},$$

dagegen k^* nach unseren Ausführungen in Abschnitt 4 und 6 ein Körper, der dadurch entsteht, daß man zu $k\{1\}$ einen bestimmten Unterkörper von $c(p^w)$ vom absoluten Grade $p^{w-1} \cdot \frac{p-1}{e}$ adjungiert. Da dieser Körper auch in bezug auf $k\{1\}$ diesen Grad hat, wird:

$$(k^*: k\{\mathfrak{f}_1\}(k\{\mathfrak{f}_2\})) = p^{w-1} \cdot \frac{p-1}{e}.$$

Da $c(p^w)$ in $K\{\mathfrak{f}\}$ ist, ergibt sich überdies, daß $K\{\mathfrak{f}\}$ in diesem Falle aus $K\{\mathfrak{f}_1\}(K\{\mathfrak{f}_2\})$ durch Adjunktion von $c(p^w)$ entsteht, welcher Körper in bezug auf $K\{\mathfrak{f}_1\}(K\{\mathfrak{f}_2\})$ genau den Relativgrad e und überdies eine von 1 verschiedene p -Relativdifferente hat.

Um die Betrachtungen weiter unten nicht unterbrechen zu müssen, schalten wir hier noch eine zweite Bemerkung ein.

Ist p eine ungerade Primzahl und w eine beliebige natürliche Zahl oder $p = 2$ und dann $w \geq 2$, so bedeute $c^*(p^{w+1})$ den Körper $c(p^{w+1})$ oder irgend einen verschränkten Kreiskörper, der $c(p^w)$ enthält und in dessen Hülle $c(p^{w+1})$, aber nicht $c(p^{w+2})$ steckt. Da die Relativdifferente von $c(p^{w+1})$ in bezug auf $c(p^w)$ gleich p ist, ist in jedem Falle die p -Relativdifferente von $c^*(p^{w+1})$ in bezug auf $c(p^w)$ gleich p .

Im folgenden sei \mathfrak{f}_2 ein Stammideal, \mathfrak{f}_1 ein von (1) verschiedenes Ideal, für welches die *Normen* von \mathfrak{f}_1 und \mathfrak{f}_2 zueinander teilerfremd sind, und $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2$.

Es sei zunächst \mathfrak{f}_2 ungerade

Wir wollen im weiteren voraussetzen, daß $k\{\mathfrak{f}_1\}$ ein Ausgangskreiskörper ist. Falls \mathfrak{f}_1 auch ein Stammideal ist, ist diese Voraussetzung gemäß den Ausführungen im 5. bis 11. Abschnitt gewiß erfüllt. Da das Kompositum von zwei Ausgangskreiskörpern wieder ein Ausgangskreiskörper ist, ist dann $k\{\mathfrak{f}_1\}(k\{\mathfrak{f}_2\})$ ein Ausgangskreiskörper.

Für das Stammideal \mathfrak{f}_2 gibt es folgende Möglichkeiten:

a) $\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{p}^w$, $w \geq 1$, wo $p = \mathfrak{p}$ ist. Dann ist gemäß dem 5. Abschnitt $k\{\mathfrak{f}_2\} = k\{1\}(c(p^w))$, also der Körper $c(p^w)$ in $k\{\mathfrak{f}_1\}(k\{\mathfrak{f}_2\})$. Wir wollen annehmen, daß

$$k\{\mathfrak{f}\} \supset k\{\mathfrak{f}_1\}(k\{\mathfrak{f}_2\}),$$

¹⁹⁾ Vergleiche den eben zitierten Satz 215, Fueter, S. 236.

und versuchen, von $k\{\mathfrak{f}_1\}$ ($k\{\mathfrak{f}_2\}$) zu $k\{\mathfrak{f}\}$ aufzusteigen, indem wir einen Körper $c^*(p^{w+1})$ vom Relativgrade p adjungieren. Ist \mathfrak{P}^* ein Primideal des Erweiterungskörpers, welches das Primideal \mathfrak{P} von $k\{\mathfrak{f}_1\}$ ($k\{\mathfrak{f}_2\}$) und das Primideal \mathfrak{p} von k teilt, so ist $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^{*p}$. Sind w, n_0, W, r und v_r die Werte der Formel (5) für das Primideal \mathfrak{P} und die Erweiterung von k zu $k\{\mathfrak{f}_1\}$ ($k\{\mathfrak{f}_2\}$) und w^*, n_0^*, W^*, r^* und $v_{r^*}^*$ die Werte derselben Formel für das Primideal \mathfrak{P}^* und die Erweiterung von k zu $k\{\mathfrak{f}_1\}$ ($k\{\mathfrak{f}_2\}$) ($c^*(p^{w+1})$), so ist n_0 der Exponent der Potenz, in der \mathfrak{P} in \mathfrak{p} aufgeht, und $n_0^* = pn_0$; $r^* = r + 1$, $v_{r^*}^* + 1 = v_{r+1}^* + 1 = p(v_r + 1)$, ferner gemäß der oben gemachten Bemerkung und nach dem Satz der Zusammensetzung der Relativdifferenten bei sukzessiven Körpererweiterungen: $W^* = pW + pn_0$, also:

$$w^* = \frac{W^* + (v_{r^*}^* + 1)}{n_0^*} = \frac{(pW + pn_0) + p(v_r + 1)}{pn_0} = \frac{W + (v_r + 1)}{n_0} + 1 = w + 1.$$

Mithin muß \mathfrak{f} durch \mathfrak{p}^{w+1} teilbar sein, was einen Widerspruch liefert. Die Galois'sche Gruppe der Erweiterung von $k\{\mathfrak{f}_1\}$ ($k\{\mathfrak{f}_2\}$) zu $k\{\mathfrak{f}\}$ kann also nicht dadurch reduziert werden, daß man einen Körper $c^*(p^{w+1})$ vom Relativgrade p adjungiert.

b) $\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{p}^w \cdot \mathfrak{p}'^{w'}$, $w \geq 1, w' \geq 1$, wo $p = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$ ist. Wir dürfen immer annehmen, daß wir die Bezeichnung so gewählt haben, daß $w \leq w'$ ist. Dann ist nach Abschnitt 4 und 6 der Körper $k\{\mathfrak{f}_2\} = k\{1\}(c(p^w))$ und es gilt der gleiche Schluß und dieselbe Aussage wie bei a).

c) $\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{p}^w$, $w \geq 1$, wo $p = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$ ist. Gemäß Abschnitt 4 ist $k\{\mathfrak{f}_2\} = k\{1\}$ und daher $k\{\mathfrak{f}_1\}(k\{\mathfrak{f}_2\}) = k\{\mathfrak{f}_1\}$. Versucht man, von $k\{\mathfrak{f}_1\}$ zu $k\{\mathfrak{f}\}$ aufzusteigen, indem man irgend einen Unterkörper von $c(p^2)$ vom Primzahlgrad q , wo q ein Teiler von $p(p-1)$ ist, oder einen verschränkten Kreiskörper, in dessen Hülle ein solcher Körper steckt, zu adjungieren, so ist die \mathfrak{p}' -Relativdifferente gewiß von 1 verschieden, mithin müßte \mathfrak{f} durch \mathfrak{p}' teilbar sein, was einen Widerspruch ergibt.

d) $\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{p}^w$, $w \geq 1$, wobei $p = \mathfrak{p}^2$ ist. Ist $m \neq -3$ oder $m = -3$, dann aber $w \geq 3$, so ist nach Abschnitt 7:

$$k\{\mathfrak{f}_2\} = k\{1\} \left(c(p^{\lceil \frac{w+1}{2} \rceil}) \right).$$

Eine analoge Überlegung wie unter a) zeigt, daß die Galois'sche Gruppe der Erweiterung von $k\{\mathfrak{f}_1\}$ ($k\{\mathfrak{f}_2\}$) zu $k\{\mathfrak{f}\}$ nicht dadurch reduziert werden

kann, daß man einen Körper $c^* \left(p^{\left[\frac{w+1}{2} \right] + 1} \right)$ vom Relativgrade p adjungiert. Ist $m = -3$ und $w = 1$ oder $w = 2$, so ist nach Abschnitt 7:

$$K\{\mathfrak{p}^2\} = K\{\mathfrak{p}\} = K\{1\} = k = k_0(\sqrt{-3}) .$$

Wie man mit Hilfe der Ausführungen am Ende des 7. Abschnittes erkennt, bewirkt die Adjunktion eines Körpers $c^*(3^2)$ zu $k\{\mathfrak{f}_1\} (k\{\mathfrak{f}_2\}) = k\{\mathfrak{f}_1\}$, daß \mathfrak{f} durch \mathfrak{p}^3 teilbar sein müßte gegen Annahme.

Nimmt man jetzt spezieller an, daß auch \mathfrak{f}_1 ein ungerades Stammideal ist, und vertauscht man die Rollen von \mathfrak{f}_1 und \mathfrak{f}_2 , so erkennt man, daß

$$k\{\mathfrak{f}\} = k\{\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2\} = k\{\mathfrak{f}_1\} (k\{\mathfrak{f}_2\}) .$$

Mithin ist $k\{\mathfrak{f}\}$ in diesem Falle ein Kreisaugangskörper.

Durch Iteration unserer Schlußweise sieht man ein, daß falls man ein vom Einheitsideal verschiedenes ungerades Ideal \mathfrak{f} als Produkt von Stammidealen darstellt, deren Normen paarweise zueinander teilerfremd sind:

$$\mathfrak{f} = \prod_{t=1}^T \mathfrak{f}_t , \quad (n(\mathfrak{f}_s), n(\mathfrak{f}_t)) = 1 , \quad s \neq t ,$$

$k\{\mathfrak{f}\}$ das Kompositum der Körper $k\{\mathfrak{f}_t\}$, $t = 1, 2, \dots, T$ ist. Da die Körper $k\{\mathfrak{f}_t\}$ in Abschnitt 4—7 bestimmt wurden, ist damit $k\{\mathfrak{f}\}$ für ein beliebiges ungerades Ideal bestimmt, und $k\{\mathfrak{f}\}$ ist ein Ausgangskreiskörper.

Es sei \mathfrak{f}_2 gerade

Dann ist \mathfrak{f}_1 ungerade und $k\{\mathfrak{f}_1\}$, wie wir eben sahen, ein Ausgangskreiskörper, ebenso $k\{\mathfrak{f}_2\}$ gemäß Abschnitt 8—11, mithin auch $k\{\mathfrak{f}_1\} (k\{\mathfrak{f}_2\})$. Ferner kann die Galois'sche Gruppe von $k\{\mathfrak{f}\}$ in bezug auf $k\{\mathfrak{f}_1\} (k\{\mathfrak{f}_2\})$ nach dem eben bewiesenen höchstens noch durch Unterkörper von $c(2^{h_0})$ für genügend großes h_0 reduziert werden. Wir behaupten:

$$k\{\mathfrak{f}\} = k\{\mathfrak{f}_1\} (k\{\mathfrak{f}_2\}) \tag{12}$$

Wir unterscheiden folgende Fälle:

a) $m \equiv 3 \pmod{4}$, $2 = \mathfrak{p}^2$, $\mathfrak{f} = \mathfrak{p}^w$, $w \geq 1$. Gemäß Abschnitt 2 ist $\sqrt{-1}$ in $k\{1\}$ und gemäß Abschnitt 8:

$$k\{\mathfrak{f}_2\} = k\{1\} \left(c(2^{\left[\frac{w+2}{2} \right]}) \right) .$$

Es sei zunächst $w \geq 2$. Dann erkennt man mit Hilfe der Ausführungen in Abschnitt 8 sofort, daß die Galois'sche Gruppe von $k\{\mathfrak{f}\}$ in bezug auf

$k\{\mathfrak{f}_1\}$ ($k\{\mathfrak{f}_2\}$) nicht dadurch reduziert werden kann, daß man $c\left(2^{\left[\frac{w+2}{2}\right]+1}\right)$ adjungiert, denn sonst wäre, falls w ungerade ist, \mathfrak{f} genau durch \mathfrak{p}^{w+1} , falls w gerade ist, \mathfrak{f} genau durch \mathfrak{p}^{w+2} teilbar. In jedem Falle wäre \mathfrak{f} durch \mathfrak{p}^{w+1} teilbar, was einen Widerspruch ergibt. Ist $w = 1$ und adjungiert man $c(2^3)$, so würde \mathfrak{f} durch \mathfrak{p}^4 teilbar, was ebenfalls einen Widerspruch ergibt. Es gilt mithin im Falle a) die Formel (12).

b) $m \equiv \pm 2 \pmod{8}$, $2 = \mathfrak{p}^2$, $\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{p}^w$, $w \geq 1$. Gemäß den Ausführungen in Abschnitt 2 und 9 ist $\sqrt{\pm 2}$ in $k\{1\}$; $K\{\mathfrak{p}\} = K\{1\}$ und für $w \geq 2$:

$$k\{\mathfrak{f}_2\} = k\{1\} \left(c\left(2^{\left[\frac{w+3}{2}\right]}\right) \right).$$

Es sei zunächst $w \geq 3$. Dann kann man die Galois'sche Gruppe von $k\{\mathfrak{f}\}$ in bezug auf $k\{\mathfrak{f}_1\}$ ($k\{\mathfrak{f}_2\}$) nicht dadurch reduzieren, daß man $c\left(2^{\left[\frac{w+3}{2}\right]+1}\right)$ adjungiert, da sonst \mathfrak{f} mindestens durch \mathfrak{p}^{w+1} teilbar wäre. Für $w = 2$ ist $c(2^3)$ in $k\{\mathfrak{f}_2\}$ und die Adjunktion von $c(2^4)$ würde bedingen, daß \mathfrak{f} durch \mathfrak{p}^5 teilbar wäre. Sei $w = 1$. Dann ist $\sqrt{-1}$ nicht in $k\{\mathfrak{p}\}$. Die Adjunktion von $\sqrt{-1}$ oder, was auf dasselbe herauskommt, von $\sqrt{\mp 2}$, also von $c(2^3)$, würde bedingen, daß \mathfrak{f} durch \mathfrak{p}^2 teilbar wäre. Ist $m \equiv -2 \pmod{8}$, so ist (12) bewiesen. Ist $m \equiv 2 \pmod{8}$, so könnte noch einer der beiden Kreiskörper $k_0(\sqrt{\pm 2 + \sqrt{2}})$ adjungiert werden. Ist \mathfrak{P}^* ein Primideal von $k\{\mathfrak{f}_1\}$ ($k\{\mathfrak{p}\}$), $\sqrt{\pm 2 + \sqrt{2}}$, welches \mathfrak{p} teilt, so haben für das Primideal \mathfrak{P}^* und die Erweiterung von k zu $k\{\mathfrak{f}_1\}$ ($k\{\mathfrak{p}\}$), $\sqrt{\pm 2 + \sqrt{2}} = k\{\mathfrak{f}_1\}(\sqrt{\pm 2 + \sqrt{2}})$ die Größen der Formel (5) folgende Werte: $n_0^* = 2$, $W^* = 5$, $r^* = 1$, $v_{r^*}^* + 1 = 5$, denn die Relativdifferente von $k_0(\sqrt{\pm 2 + \sqrt{2}})$ in bezug auf $k_0(\sqrt{2})$ ist gleich $2\sqrt{\pm 2 + \sqrt{2}}$. Es folgt

$$w^* = \frac{W^* + (v_{r^*}^* + 1)}{n_0^*} = \frac{5 + 5}{2} = 5.$$

\mathfrak{f} müßte also durch \mathfrak{p}^5 teilbar sein. Mithin ist auch im Falle $m \equiv 2 \pmod{8}$ die Formel (12) bewiesen.

c) $m \equiv 5 \pmod{8}$. Es sei $\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{p}^w$, $w \geq 1$, wo $\mathfrak{p} = 2$, $n(\mathfrak{p}) = 2^2$ ist. Nach Abschnitt 2 ist der Durchschnitt von $k\{1\}$ und $c(2^3)$ der Körper der rationalen Zahlen und nach Abschnitt 10 ist

$$k\{\mathfrak{f}_2\} = k\{1\} (c(2^w)).$$

Versucht man, von $k\{\mathfrak{f}_1\}$ ($k\{\mathfrak{f}_2\}$) zu $k\{\mathfrak{f}\}$ aufzusteigen, indem man $c(2^{w+1})$ adjungiert, so wird \mathfrak{f} durch p^{w+1} teilbar, was einen Widerspruch ergibt. Da $k\{p^2\}$ den Körper $k_0(\sqrt{-1})$ enthält, ist nur noch der Fall zu untersuchen, daß $w = 1$ ist und einer der Körper $k_0(\sqrt{\pm 2})$ adjungiert wird. Ist \mathfrak{P}^* ein Primideal von $k\{\mathfrak{f}_1\}$ ($k\{p\}$, $\sqrt{\pm 2}$), welches p teilt, so haben für das Primideal \mathfrak{P}^* und die Erweiterung von k zu $k\{\mathfrak{f}_1\}$ ($k\{p\}$, $\sqrt{\pm 2}$) die Größen der Formel (5) folgende Werte: $n_0^* = 2$, $W^* = 3$, $r^* = 1$, $v_{r^*}^* + 1 = 3$, denn die Differente von $k_0(\sqrt{\pm 2})$ ist gleich $2\sqrt{\pm 2}$. Es folgt

$$w^* = \frac{W^* + (v_{r^*}^* + 1)}{n_0^*} = \frac{3 + 3}{2} = 3 .$$

Mithin müßte \mathfrak{f} durch p^3 teilbar sein. Es gilt daher auch im Falle c) die Gleichung (12).

d) $m \equiv 1 \pmod{8}$. In k ist $2 = p \cdot p'$, $p \neq p'$, $n(p) = n(p') = 2$, und nach Abschnitt 2 ist der Durchschnitt von $k\{1\}$ und $c(2^3)$ wie im Falle c) der Körper der rationalen Zahlen. Geht nur *einer* der beiden Primidealteiler von 2 in \mathfrak{f}_2 auf, so kann ich die Wahl der Bezeichnungen immer so treffen, daß es p ist. Sei also zunächst $\mathfrak{f}_2 = p^w$, $w \geq 1$. Gemäß Abschnitt 4 ist in diesem Unterfalle $k\{\mathfrak{f}_2\} = k\{1\}$. Die Adjunktion irgend eines Unterkörpers von $c(2^3)$ vom Grade 2 würde bedingen, daß die p' -Relativ-differente von $k\{\mathfrak{f}\}$ zu $k\{\mathfrak{f}_1\}$ ($k\{\mathfrak{f}_2\}$) von 1 verschieden wäre, mithin \mathfrak{f} durch p' teilbar wäre, was einen Widerspruch liefert. Mithin haben wir nur noch den Unterfall zu betrachten, daß $\mathfrak{f}_2 = p^w \cdot p'^{w'}$ ist, wo $w \geq 1$, $w' \geq 1$ ist. Wir dürfen annehmen, daß wir die Bezeichnungen so gewählt haben, daß $w \leq w'$ ist. Dann ist nach Abschnitt 4 und 11:

$$k\{\mathfrak{f}_2\} = k\{1\} (c(2^w)) .$$

Versucht man, von $k\{\mathfrak{f}_1\}$ ($k\{\mathfrak{f}_2\}$) zu $k\{\mathfrak{f}\}$ aufzusteigen, indem man $c(2^{w+1})$ adjungiert, so wird \mathfrak{f}_2 durch p^{w+1} teilbar, was einen Widerspruch ergibt. Da $k\{p^2 p'^{w'}\}$ den Körper $k_0(\sqrt{-1})$ enthält, ist nur noch der Fall zu untersuchen, daß $w = 1$ ist, und einer der Körper $k_0(\sqrt{\pm 2})$ adjungiert wird. Ist \mathfrak{P}^* ein Primideal von $k\{\mathfrak{f}_1\}$ ($k\{p p'^{w'}\}$, $\sqrt{\pm 2}$), welches p teilt, so haben für das Primideal \mathfrak{P}^* und die Erweiterung von k zu $k\{\mathfrak{f}_1\}$ ($k\{p p'^{w'}\}$, $\sqrt{\pm 2}$) die Größen der Formel (5), wie im Unterfall $m \equiv 5 \pmod{8}$ die Werte $n_0^* = 2$, $W^* = 3$, $r^* = 1$, $v_{r^*}^* + 1 = 3$, und \mathfrak{f} müßte durch p^3 teilbar sein. Es gilt daher auch in diesem Falle die Gleichung (12).

Zusammenfassend ergibt sich der

Hauptsatz: Ist \mathfrak{f} ein beliebiges vom Einheitsideal verschiedenes Ideal von k , so stelle man \mathfrak{f} als Produkt von Stammidealen dar, deren *Normen* zueinander teilerfremd sind:

$$\mathfrak{f} = \prod_{t=1}^T \mathfrak{f}_t, \quad (n(\mathfrak{f}_s), n(\mathfrak{f}_t)) = 1, \quad s \neq t.$$

Dann ist $k\{\mathfrak{f}\}$ ein Ausgangskreiskörper, und zwar das Kompositum der in den Abschnitten 4—11 bestimmten (Ausgangs-Kreis-) Körper $k\{\mathfrak{f}_t\}$, $t = 1, 2, \dots, T$.

Ferner ergibt sich folgende Verschärfung des Satzes 215, Fueter, Seite 236:

Sind $\mathfrak{f}_1 \neq 1$ und $\mathfrak{f}_2 \neq 1$ zwei zueinander teilerfremde Ideale von k , so ist $K\{\mathfrak{f}_1\}$ ($K\{\mathfrak{f}_2\}$) Unterkörper von $K\{\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2\}$, und der Relativgrad ist ein Teiler von $e^{20})$. Ist dieser Relativgrad größer als 1 und sind die *Normen* von \mathfrak{f}_1 und \mathfrak{f}_2 zueinander teilerfremd, so wird die Galois'sche Gruppe von $K\{\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2\}$ in bezug auf $K\{\mathfrak{f}_1\}$ ($K\{\mathfrak{f}_2\}$) durch keinen Kreiskörper reduziert, sind dagegen die Normen von \mathfrak{f}_1 und \mathfrak{f}_2 Potenzen der gleichen Primzahl $p^{21})$, so entsteht $K\{\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2\}$ aus $K\{\mathfrak{f}_1\}$ ($K\{\mathfrak{f}_2\}$) durch Adjunktion eines geeigneten Kreiskörpers, dessen Diskriminante nur durch p teilbar ist.

²⁰⁾ Dieser Relativgrad kann vermöge des 3. Satzes in Abschnitt 4 immer sofort angegeben werden.

²¹⁾ Dabei gilt p als 1. Potenz von p .

(Eingegangen den 12. Juni 1942.)