Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 15 (1942-1943)

Artikel: Sulle forme cubiche dello spazio a cinque dimensioni contenenti rigate razionali del 4º ordine.

Autor: Fano, Gino di

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14881

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sulle forme cubiche dello spazio a cinque dimensioni contenenti rigate razionali del 4° ordine

Di GINO FANO, Lausanne

1. Mentre una forma cubica dello spazio a quattro dimensioni è — probabilmente — razionale soltanto se ha un punto doppio, è noto che una forma cubica dello spazio a cinque dimensioni (V_4^3 di S_5) può essere razionale anche senza avere punti doppi. È razionale p. es. ogni V_4^3 di S_5 contenente due piani indipendenti, potendosi essa riferire birazionalmente al sistema delle rette incidenti a entrambi questi piani; sistema ∞^4 del 1° ordine, perciò razionale. Però una V_4^3 di S_5 generale non contiene piani; poichè il dover contenere un piano assegnato equivale per essa a 10 condizioni, mentre i piani dello spazio S_5 sono soltanto ∞^9.

È anzi a ritenere che la V_4^3 generale di S_5 contenga soltanto superficie (varietà a due dimensioni) algebriche di ordine multiplo di 3. Ciò può dimostrarsi infatti molto semplicemente per la V_4^3 *generale avente un* (*solo*) *punto doppio* D (caso limite della precedente); dando all'espressione „V_4^3 *generale* con un punto doppio" il significato preciso, che il cono Γ_3^6 di rette uscente dal punto doppio D abbia come sezione iperpiana non passante pel vertice una superficie (dipendente da 19 moduli) contenente soltanto curve sue intersezioni complete con forme (o ipersuperficie); perciò di ordini 6 e multipli di 6. La proprietà enunciata sussiste ovviamente per tutte le superficie, anche coni, contenute in Γ_3^6. D'altra parte la V_4^3 si proietta univocamente dal punto doppio D su uno spazio S_4; e ogni sua superficie φ non contenuta nel cono Γ_3^6 si proietta in una superficie φ' di S_4, ed è perciò intersezione totale o parziale di V_4^3 col cono che da D proietta φ'. La proprietà in parola è pertanto ancora ovvia se φ è intersezione totale di V_4^3 con quest'ultimo cono; mentre se è intersezione parziale, la parte residua può essere soltanto un cono a due dimensioni contenuto in Γ_3^6, perciò ancora di ordine 6 o multiplo di 6.

2. È pertanto almeno presumibile che una V_4^3 generale di S_5 non contenga superficie del 4° ordine.

Le rigate razionali normali R^4 dello spazio S_5 [1]) formano un sistema

[1]) Con R^4, ρ^4 indicheremo rigate razionali normali del 4° ordine; con R^n rigate di ordine n; con F^n, φ^n, ... superficie di ordine n; con M^n varietà a tre dimensioni di ordine n; con C_p^n, γ_p^n, ... curve di ordine n e genere p.

algebrico continuo di dimensione 29 [2]). Poichè per ognuna di esse passano ∞^{27} forme cubiche, mentre tali forme in S_5 sono in tutto ∞^{55}, si sarebbe indotti a pensare, in base alla pura enumerazione delle costanti, che una V_4^3 generale debba contenere ∞^1 rigate R^4. Vedremo invece che una V_4^3 contenente una R^4 ne contiene di conseguenza ∞^2; e perciò una V_4^3 generale di S_5 non contiene alcuna R^4 [3]).

Analogamente, le superficie φ^5 di S_5 a sezioni ellittiche (superficie di Del Pezzo [4])) formano un sistema ∞^{35}, due generiche fra esse essendo omografiche in un numero finito di modi [5]). E benchè per ciascuna di queste superficie passino ∞^{24} forme cubiche, e l'enumerazione delle costanti dia $35 + 24 - 55 = 4$, vedremo che una V_4^3 generale non contiene alcuna φ^5, e se ne contiene una ne contiene ∞^5.

Le due questioni sono fra loro connesse. Ogni R^4 è infatti direttrice di ∞^3 varietà M^3, ∞^1 razionali normali di piani, generabili mediante una proiettività fra la R^4, come ∞^1 razionale di rette, e una sua corda (punteggiata) arbitraria, colla condizione che i due estremi di questa corda corrispondano alle generatrici di R^4 passanti risp. per essi [6]). E una forma cubica passante per R^4 incontra ulteriormente ciascuna di queste ∞^3 varietà M^3 in una superficie φ^5. Viceversa, una φ^5 generica (cioè senza punti doppi) contiene 5 fasci di coniche, i cui piani formano altrettante M^3 incontranti ulteriormente ogni V_4^3 passante per φ^5 secondo una rigata R^4. Le V_4^3 contenenti rigate R^4 contengono perciò anche superficie φ^5, e viceversa. Considerando come omologhe, o „complementari", su una V_4^3 una R^4 e una φ^5 che ne costituiscano insieme l'intersezione completa con

---

[2]) La R^4 più generale ha ∞^1 coniche direttrici irriducibili, e può generarsi con due coniche omografiche in piani non incidenti, dipendenti perciò ciascuna da $9 + 5 = 14$ parametri; l'omografia tra le due coniche dipende da 3 parametri, ma ciascuna R^4 ammette ∞^2 generazioni così fatte; e $14.2 + 3 - 2 = 29$. *V.* anche *Morin*, Rend. Semin. Matem. Padova, anno XI (1940), p. 108. Fra le ∞^{29} R^4 di un S_5 sono comprese ∞^{28} con direttrice rettilinea (unica).

[3]) Poichè in S_5 le corde di una R^4 formano anche un sistema di rette del 1° ordine, è pure razionale ogni V_4^3 di S_5 contenente una R^4. Ma poichè una V_4^3 generale di S_5, come è detto sopra, non contiene alcuna R^4, rimane ancora dubbia la razionalità della V_4^3 generale di S_5 (*Morin*, l. c.). Fra le ∞^{29} R^4 di un S_5 ve ne sono anche ∞^{28} spezzate in due quadriche di spazi S_3 (distinti) con una generatrice comune; ma nel presente lavoro non s'incontrano R^4 così spezzate, perchè una V_4^3 contenente una coppia di quadriche di questo tipo contiene anche, nei loro S_3, due piani, e quindi ∞^2 coppie di quadriche, cioè R^4 riducibili, tutte del medesimo tipo.

[4]) Rend. Circolo Matem. Palermo, vol. 1° (1884—87), p. 241.

[5]) Possono infatti riferirsi omograficamente in un numero finito di modi due qualunque delle 5 reti di cubiche sghembe in esse contenute.

[6]) Si hanno così in tutto ∞^5 generazioni, ma solo ∞^3 distinte M^3, la corda di R^4 potendo essere su M^3 una qualunque delle sue ∞^2 direttrici rettilinee. Fra queste ∞^3 M^3 vi sono gli ∞^2 coni cubici che proiettano R^4 dai suoi singoli punti.

una delle dette M^3, vediamo che a ogni R^4 corrispondono ∞^3 superficie φ^5, a ogni φ^5 un numero finito di R^4. Pertanto se la V_4^3 contiene ∞^k rigate R^4, conterrà pure ∞^{k+3} superficie φ^5, e viceversa. E vedremo che è in generale $k = 2$.

Una R^4 e una φ^5 complementari s'incontrano secondo una curva C_2^7, che su R^4 è l'intersezione con una quadrica passante per una sua generatrice, e su φ^5 l'intersezione con una quadrica passante per una sua cubica sghemba (ed è equivalente altresì alla somma delle sezioni iperpiane e di uno tra i fasci di coniche). Nella consueta rappresentazione piana della φ^5 mediante le cubiche passanti per 4 punti fissi, le cinque C_2^7 segate su essa dalle R^4 complementari contenute in una stessa V_4^3 hanno per immagini quartiche piane con uno (variabile) di quei 4 punti come doppio e passanti semplicemente per gli altri tre, e una quintica avente tutti 4 questi punti come doppi. *Le C_2^7 intersezioni di una φ^5 colle sue R^4 complementari hanno pertanto tutte a due a due 10 punti comuni; e questi costituiscono perciò anche un gruppo di punti comune a due R^4 complementari di una stessa φ^5* (anzi, come vedremo, il gruppo totale dei punti comuni a due qualunque delle $\infty^2 R^4$ che costruiremo nella V_4^3).

Analogamente, dalla rappresentazione piana di una R^4 si rileva che su di essa due C_2^7 (in questo caso appartenenti al medesimo sistema lineare) hanno 12 intersezioni. Pertanto *due φ^5 complementari di una stessa R^4 hanno a comune 12 punti appartenenti a quest'ultima;* ma hanno pure a comune un punto ulteriore fuori della R^4. Invero le due M^3 contenenti R^4 e rispett. le due φ^5 stanno su una stessa quadrica, e precisamente su un S_1-cono quadrico, la cui retta asse è corda di R^4: la terza intersezione di questa retta colla V_4^3 è l'ulteriore punto comune alle due φ^5 [7]).

3. Una V_4^3 contenente una rigata R^4 è incontrata da una quadrica passante per questa in una M^6 contenente pure la R^4, e che nel caso più generale è quella da me incontrata recentemente in altro lavoro [8]). Essa è proiezione della M^{12} di S_8 a curve-sezioni canoniche di genere $p = 7$ con-

---

[7]) Per una rigata R^4 passano ∞^5 quadriche, fra le quali ∞^4 coni. Nel sistema delle prime, considerato come uno spazio S_5, la varietà μ_4^6 dei coni è composta di una quadrica doppia Ω e di una quadrica semplice Σ. La prima è costituita dagli S_1-coni quadrici che proiettano R^4 dalle sue corde; i due sistemi ∞^3 di piani su Ω sono dati dai coni passanti per le singole M^3 aventi R^4 come direttrice, e da quelli le cui rette assi sono corde di una stessa cubica di R^4. La quadrica Σ è a sua volta un S_2-cono quadrico, il cui S_2-asse è costituito dalle quadriche passanti per la M^3 dei piani delle coniche direttrici di R^4 (se R^4 ha direttrice rettilinea, la M^3 dei piani di questa direttrice e delle singole generatrici). L'intersezione $\Omega\Sigma$ è composta dei coni che proiettano R^4 dalle sue ∞^3 tangenti, incluse le generatrici.

[8]) Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni..., Comm. Math. Helv., vol. 14 (1941—1942), p. 202.

tenente sole superficie intersezioni complete, da una sua conica γ; M^{12} rappresentante il sistema lineare somma, su M^6, delle sezioni iperpiane e della R^4. La stessa M^6 contiene, oltre R^4, altre tre rigate, degli ordini 18, 70, 88 [9]), in generale irriducibili, e perciò nessuna ulteriore R^4; e ha 14 punti doppi, appartenenti a R^4.

Anche l'intersezione di una V_4^3 contenente R^4 col S_1-cono quadrico che proietta questa da una sua corda generica è una M^6, più particolare, ma non contenente ulteriori R^4. Anche questa M^6 è proiezione di una (particolare) M^{12} di S_8: i due sistemi ∞^1 di spazi S_3 del S_1-cono quadrico proiettano rispett. le generatrici e un fascio di cubiche di R^4, e incontrano M^6 secondo due fasci di superficie cubiche, proiezioni a loro volta di un fascio di F^4 a sezioni ellittiche su M^{12}, e di un fascio di F^8 a sezioni di genere 3 [10]), queste ultime passanti per la conica γ. Sulla M^{12}, il sistema completo residuo delle F^4 rispetto alle sezioni iperpiane è un sistema ∞^3 omaloidico di F^8, che conduce a rappresentare M^{12} sullo spazio S_3 mediante le superficie del 4° ordine passanti per una C_7^8 [11]), e la M^6 mediante le stesse superficie passanti in più per una corda k di quest'ultima curva. Questa M^6 ha 15 punti doppi (uno in più della precedente, più generale), dei quali ancora 14 su R^4, e due di questi più il rimanente sulla retta asse del S_1-cono quadrico; ai suoi due fasci di superficie cubiche corrispondono in S_3 i piani passanti per k, e le superficie cubiche per la C_7^8. Le rigate contenute nella M^6 si determinano facilmente in base alla rappresentazione su S_3; e all'infuori della R^4 iniziale, corrispondente alla retta k, nessuna di esse è del 4° ordine [12]).

Fra le ∞^4 corde di una R^4 contenuta in una V_4^3, ∞^2 stanno pur esse su quest'ultima varietà. La rigata delle corde di R^4 appoggiate a una retta generica g di V_4^3, avendo g stessa come direttrice semplice e 3 generatrici in ogni S_4 per g (poichè la proiezione di R^4 da g ha una cubica doppia), è anche del 4° ordine; e la sua intersezione con V_4^3, all'infuori di g e della sestica che si proietta nella cubica doppia, si compone di 5 generatrici. Le ∞^2 corde di R^4 contenute in V_4^3 hanno dunque per luogo una $M^{5\cdot 3}$; e per ogni punto P di R^4 passano 3 di queste corde. Esse stanno infatti sul cono cubico che proietta R^4 da P, e quindi sulla (particolare) φ^5 con P doppio, ulteriore intersezione di questo cono con V_4^3; e queste rette, per P

[9]) V. la nota [24]) del mio lavoro cit.

[10]) Rappresentabili sul piano mediante le curve di 4° ordine passanti per 8 punti fissi.

[11]) Cfr. anche la nota [6]) del mio lavoro cit.

[12]) Alla curva C_7^8, alla rigata delle sue trisecanti, e a quella delle sue corde appoggiate a k corrispondono rigate di ordini 18, 52, 54; altre due rigate di ordini 34, 18 corrispondono alle superficie di S_3 luoghi delle coniche 6-secanti la C_7^8 e appoggiate a k, e 5-secanti la C_7^8 e bisecanti k. La somma degli ordini di tutte le rigate della M^6 è sempre 180 (nota [24]) del mio lavoro cit.).

sulla φ^5, sono appunto 3. La $M^{5\cdot 3}$ ha dunque R^4 come superficie tripla; le generatrici di R^4 costituiscono su di essa un sistema ∞^1 di rette (direttrici), non contenuto nel sistema ∞^2 delle corde di R^4 appartenenti a V_4^3.

La M^6 intersezione di una V_4^3 contenente una R^4 col S_1-cono quadrico che proietta questa da una sua corda r appartenente alla V_4^3 contiene una seconda rigata del 4° ordine ϱ^4; e si ottengono così su V_4^3 altre ∞^2 rigate razionali del 4° ordine. In questo caso la retta r appartiene alla M^6, e ne è anzi retta doppia; e appartiene pure, come retta semplice, ai due fasci di superficie cubiche contenuti in M^6: superficie che indicheremo rispett. con F^3 e φ^3, secondo che hanno a comune con R^4 cubiche sghembe o generatrici di questa. Su ciascuna F^3, essendo ora razionalmente note la retta r e la cubica intersezione con R^4 (di cui r è corda), sarà pure razionalmente nota l'unica retta s non incidente nè a r nè a questa cubica (cioè l'unica retta di F^3 sghemba con r, e compresa nella sestupla che colle 6 corde della detta cubica forma una bisestupla). Le ∞^1 rette s così ottenute formano una nuova rigata, contenuta in V_4^3 e proiettata da r secondo lo stesso S_1-cono quadrico, la quale è appunto una ϱ^4, incontrante le φ^3 secondo cubiche sghembe, e tale che essa e R^4 hanno rispetto ai due fasci di F^3 e φ^3 proprietà invertite. Per accertarlo, non potendo invocare a priori la completa simmetria tra i due fasci di F^3 e φ^3 sulla V_4^3, basterà la considerazione seguente. Sommando su M^6 la R^4 e il fascio delle F^3, si ha un sistema $|F^7|$, ∞^3 e omaloidico, proiezione del sistema $|F^8|$ considerato in precedenza su M^{12} [13]). Nel caso precedente le F^7 segavano sulle φ^3 sistemi lineari anche ∞^3 di C_1^4, e il loro sistema non conteneva parzialmente il fascio $|\varphi^3|$. Ora questo sistema di C_1^4 contiene la retta r come parte fissa; e la parte residua, somma di coniche bisecanti la r e di una retta unisecante queste coniche, è una rete, dunque soltanto ∞^2, di cubiche sghembe: perciò il sistema $|F^7|$ contiene parzialmente anche il fascio $|\varphi^3|$, che ha come residua la rigata ϱ^4. Poichè sono ∞^2 le corde di R^4 contenute nella V_4^3, troviamo ∞^2 rigate ϱ^4, ovviamente distinte.

Sulla attuale M^6 il sistema $|F^7|$ ha come residuo rispetto alle intersezioni con quadriche un fascio di φ^5. Facendo spezzare le F^7 in $F^3 + R^4$ oppure in $\varphi^3 + \varrho^4$, si vede che *queste ∞^1 superficie φ^5 sono complementari di entrambe le rigate R^4 e ϱ^4*; e queste ultime hanno perciò almeno 10 punti comuni: anzi precisamente 10, perchè se no per esse dovrebbero passare ∞^1 quadriche. Viceversa, due rigate R^4 e ϱ^4 contenute in una V_4^3 e complementari di una stessa φ^5 stanno con questa su un S_1-cono quadrico, il cui asse appartiene a V_4^3.

---

[13]) Su M^{12} le F^8 generiche incontrano la conica γ in un punto; le loro proiezioni da γ sono perciò del 7° ordine.

Il sistema omaloidico $|F^7|$ conduce a rappresentare questa M^6 sullo spazio S_3 in modo che alle sue sezioni iperpiane corrispondono le F^4 passanti per una C_6^7 (intersezione parziale di una quadrica e di una superficie di 4° ordine) e per due sue corde a, b, immagini delle due rigate R^4 e ϱ^4. In altri termini, la C_7^8 del caso precedente è spezzata ulteriormente nella C_6^7 e una sua corda. I punti della retta r, doppia per M^6, corrispondono alle generatrici della quadrica di S_3 4-secanti di C_6^7. Fuori di r, la M^6 ha ancora 10 punti doppi, che sono i soli punti comuni alle rigate R^4 e ϱ^4, e hanno per immagini le 10 corde di C_6^7 appoggiate in pari tempo ad a, b [14]).

Sulla V_4^3 la rigata iniziale R^4 appartiene pur essa al sistema continuo ∞^2 delle ϱ^4. Invero fra le corde di R^4 contenute nella V_4^3 ve ne sono ∞^1 giacenti nei piani delle coniche direttrici di R^4 (se R^4 ha direttrice rettilinea, nei piani di questa e delle singole generatrici), costituenti una rigata razionale R^5; e il cono proiettante R^4 da una qualsiasi di queste corde è un S_2-cono, avente per asse il piano della conica direttrice considerata (o della direttrice rettilinea e generatrice). Per questo cono coincidono i due sistemi di spazi generatori S_3, e quindi le due rigate R^4 e ϱ^4. Il sistema ∞^2 delle ϱ^4 contenute in V_4^3 è in corrispondenza birazionale col sistema delle corde della R^4 iniziale pure giacenti su V_4^3; e entro quest'ultimo sistema la R^5 è una ∞^1 eccezionale.

La stessa costruzione che dalla R^4 iniziale su V_4^3 ci ha condotti alle altre ∞^2 può applicarsi a ciascuna di queste ultime; ma così facendo si ritrova sempre lo stesso sistema ∞^2: cambia soltanto, colla R^4 iniziale, il sistema ∞^2 delle sue corde contenute in V_4^3. Invero se dalle R^4 già ottenute nascessero sistemi ∞^2 anche solo in parte distinti, questi costituirebbero tuttavia un sistema complessivo anche continuo; come pure continuo sarebbe il sistema complessivo delle φ^5 loro complementari. Ora ogni R^4 incontra ciascuna delle ∞^2 altre rigate da essa ottenute in 10 punti, e d'altra parte incontra una generica M^3 (∞^1 di piani) passante per una di queste ultime in $4 \cdot 3 = 12$ punti; incontra perciò le φ^5 complementari di queste ultime, e non tali per essa, in 2 punti. Possiamo dunque dire che una R^4 e una φ^5 generiche entro V_4^3 (dato ch'esse variano entro sistemi continui) s'incontrano anche in due punti; e, invertendo il ragionamento,che due R^4 della V_4^3 hanno sempre 10 punti comuni. Queste

---

[14]) Le due rigate R^4 e ϱ^4 hanno direttrice rettilinea quando le tangenti alla C_6^7 negli estremi della corda corrispondente stanno in un piano. Infatti allora, e solo allora, una F^4 del sistema rappresentativo della M^6 può avere lungo questa intera retta lo stesso piano tangente, e su questa retta 3 punti doppi arbitrari; e la sezione iperpiana corrispondente di M^6 contiene allora 3 generatrici della rigata R^4 o ϱ^4.

due R^4 stanno perciò sempre su una stessa quadrica; e tutte le R^4 si potranno ottenere da una arbitraria fra esse nel modo indicato [15]).

Le φ^5 contenute nella V_4^3 sono ∞^5; ogni R^4 ne ha ∞^3 complementari; due R^4 ne hanno ∞^1 complementari comuni. Due φ^5 hanno sempre (come già detto al n° prec.) 13 punti comuni. — Concludendo, una V_4^3 contenente rigate R^4 e superficie φ^5 contiene di conseguenza ∞^2 R^4 e ∞^5 φ^5; e pertanto la V_4^3 generale non contiene superficie di nessuno di questi tipi.

4. Per avere una miglior visione complessiva dei due sistemi delle R^4 e delle φ^5 esistenti sulla V_4^3 considerata, possiamo ricorrere alle due rappresentazioni di questa V_4^3 mediante i sistemi lineari di M^6 segati su essa dalle quadriche passanti per una arbitraria delle sue R^4 o φ^5.

Le ∞^5 quadriche passanti per una R^4 incontrano una V_4^3 contenente pure questa R^4 in varietà M^6, generalmente con 14 punti doppi appartenenti a R^4. Queste M^6 s'incontrano ulteriormente a coppie [16]) secondo superficie F^8 a sezioni di genere 4, che segnano su R^4 curve canoniche C_6^{10} pei 14 punti suddetti, quelle di una stessa M^6 perciò con 10 intersezioni variabili; s'incontrano a tre a tre in curve C_0^6, e a 4 a 4 in coppie di punti. La V_4^3 risulta così rappresentata su una quadrica Q di S_5; ai punti di R^4 corrispondono su Q le ∞^2 rette di un sistema Δ, ricoprente una varietà M^{10} [17]); al sistema ∞^2 Γ delle corde di R^4 contenute in V_4^3, punti di una superficie φ^{10} a sezioni di genere 7 [18]), doppia per M^{10}, e di cui le rette contenute in M^{10} sono trisecanti; alla rigata R^5 delle rette di Γ contenute nei piani delle coniche di R^4, punti di una conica γ (linea eccezionale) su φ^{10}. Ai 14 punti doppi delle singole M^6 di V_4^3, sempre appartenenti a R^4, corrispondono le 14 trisecanti delle curve C_7^{10}, sezioni di φ^{10}, le quali sono appunto rette del sistema Δ. I piani dei due sistemi della quadrica Q corrispondono rispett. alle superficie del 3° ordine intersezioni di V_4^3 cogli spazi S_3 delle cubiche di R^4 [19]), e alle φ^5 complementari di R^4; essi incontrano la superficie φ^{10} rispett. in 6 e in 4 punti.

---

[15]) Due R^4 contenute in una stessa V_4^3 possono anche avere un minor numero di punti comuni; fra altro, due R^4 con un punto comune stanno sempre su una V_4^3 (*Morin*, l. c., n° 6). In tal caso, da ciascuna di esse si potrà ricavare sulla V_4^3 un sistema ∞^2 di rigate R^4 come quello qui costruito.

[16]) Cfr. ancora il n° 4 del mio lavoro cit.

[17]) Alle generatrici, coniche, cubiche, sezioni iperpiane di R^4 corrispondono su M^{10} rigate di ordini 3, 4, 7, 10.

[18]) Queste sezioni sono le C_7^{10} del mio lavoro cit., n. 4, sulle singole quadriche di S_4, sezioni della Q; e immagini delle rigate R^{18} (l. c.), le cui generatrici sono corde di R^4.

[19]) Questi spazi S_3 s'incontrano a due a due in rette, e le superficie del 3° ordine perciò in 3 punti; ma due di questi appartengono a R^4, e sono quindi fondamentali per la rappresentazione.

Alle sezioni iperpiane di V_4^3, ciascuna contenente 16 rette del sistema Γ, corde della C^4 sezione di R^4, corrispondono su Q anche varietà M^6 con 16 punti doppi [20]), segate dalle forme cubiche passanti per φ^{10}.

Alle M^6 segate su V_4^3 dagli S_1-coni quadrici che proiettano R^4 dalle sue corde, e in particolare dalle corde contenute in V_4^3, corrispondono le sezioni di Q coi suoi S_4 tangenti, in particolare cogli spazi tangenti nei punti P di φ^{10}. *Alle ∞^2 rigate ϱ^4 di V_4^3 corrispondono pertanto superficie contenute in questi ultimi spazi*, cioè nei coni quadrici loro intersezioni con Q, *aventi il vertice P di tale cono come doppio, e incontranti i piani dei due sistemi rispett. secondo le coniche passanti per le 5 ulteriori intersezioni con φ^{10}, e secondo quartiche con P doppio e passanti semplicemenet per le 3 intersezioni ulteriori con φ^{10}: superficie perciò del 6° ordine a sezioni di genere 3* [21]). E i piani di queste quartiche sono immagini delle φ^5 complementari in pari tempo della ϱ^4 considerata e della R^4 iniziale. Quando P sta sulla conica γ, ossia quando ϱ^4 coincide colle R^4 iniziale, questa F^6 è parte di una sezione iperpiana di M^{10}, e la parte residua è costituita dalla rigata di 4° ordine immagine di una delle coniche di R^4.

Poichè la conica γ è linea eccezionale di φ^{10}, questa superficie è proiezione di una F^{14} di S_8 a sezioni canoniche di genere 8 (sezione generica della Grassmanniana delle rette di S_5) dal piano tangente in un suo punto. Essa è perciò una superficie regolare di generi 1 [22]); e tali sono anche il sistema ∞^2 (Γ) delle corde di R^4 contenute nella V_4^3, e il sistema ∞^2 delle rigate ϱ^4.

---

[20]) Proiezioni di una M^{14} di S_9 a curve-sezioni canoniche di genere 8 (sezione della Grassmanniana delle rette di S_5) dallo spazio S_3 tangente ad essa in un punto. I 16 punti doppi sono immagini delle coniche di M^{14} passanti per tale punto.

[21]) Queste F^6 devono pertanto avere a comune a due a due i 10 punti corrispondenti a quelli comuni alle coppie di rigate ϱ^4. Trattandosi di superficie contenute in spazi S_4 distinti di un S_5, i punti comuni ad esse devono stare nello spazio S_3 intersezione dei due S_4, e appartenere alle curve C_3^6 di una stessa quadrica sezioni delle due F^6. Su questa quadrica di S_3 le due C_3^6 appartengono a sistemi opposti, in quanto ogni generatrice è intersezione di piani di Q di sistemi anche opposti, e perciò è quadrisecante di una delle C_3^6 e bisecante dell'altra. Dalla rappresentazione piana della quadrica si vede allora che le due C_3^6 hanno 20 intersezioni: di queste, 10 appartengono alla superficie φ^{10}, e a ciascuna di esse corrisponde su V_4^3 un'intera retta del sistema Γ; le altre 10 corrispondono ai punti comuni alle due ϱ^4. Ciascuna F^6 contiene 10 rette del sistema Δ, immagini dei punti comuni alla ϱ^4 e alla R^4 iniziale.

[22]) Alle rette di V_4^3 non incidenti alla R^4 iniziale corrispondono su Q coniche 5-secanti la superficie φ^{10}. Fra le ∞^2 rigate ϱ^4 costruite, ve ne sono ∞^1 con direttrice rettilinea; e a queste corrispondono su Q superficie F^6 contenenti, oltre al fascio di coniche già considerato (in piani di Q), una conica ulteriore, pure 5-secante φ^{10} (ma non in un piano di Q), direttrice di questo fascio. Quando φ^{10} si consideri come proiezione di una F^{14} di S_8 da un piano tangente, i piani di queste coniche sono tracce di S_5 passanti per il piano tangente e incontranti F^{14} in altri 5 punti (spazi di gruppi di serie lineari g_9^3 su particolari sezioni iperpiane della F^{14}).

5. Anche il sistema delle corde di una φ^5 di S_5 è del 1° ordine; e una V_4^3 passante per φ^5 contiene ∞^2 di queste corde. Quest'ultimo sistema (Γ) gode delle seguenti proprietà:

1) *Per un punto P di φ^5 passano 4 rette di esso.* Queste rette stanno infatti nell' S_4 tangente in P alla V_4^3, il quale incontra la φ^5 in una C^5 con punto doppio in P; esse sono l'intersezione ulteriore della V_4^3 col cono cubico che proietta da P questa C^5 $(3 \cdot 3 - 5 = 4)$.

2) *Le ∞^2 rette del sistema Γ ricoprono una $M^{7 \cdot 3}$*, per la quale φ^5 è superficie quadrupla; ossia una retta generica g di V_4^3 è incontrata da 7 fra esse. Invero le corde di φ^5 appoggiate a g formano una rigata avente g come direttrice semplice, e 5 generatrici in ogni S_4 passante per g (poichè φ^5 si proietta da g in una superficie dello stesso ordine con quintica doppia). Questa rigata è dunque di ordine 6; e le rette cercate ne costituiscono l'intersezione con V_4^3, all'infuori di g e della C^{10} che si proietta nella detta quintica doppia $(6 \cdot 3 - 1 - 10 = 7)$.

Inoltre: *Le ∞^4 quadriche passanti per una φ^5 contenuta in una V_4^3 incontrano quest'ultima in varietà M^6 formanti un sistema omaloidico* [23]).

Siamo così condotti a rappresentare la V_4^3 sopra uno spazio S_4, ai cui spazi S_3, piani e rette corrispondono le M^6 suindicate; superficie F^7 a sezioni di genere 3, incontranti φ^5 secondo curve canoniche C_6^{10}; e C^4 razionali incontranti φ^5 in 7 punti. Su φ^5 le F^7 di una stessa M^6 segnano un sistema lineare ∞^3 di curve C_6^{10}, di grado 7, perciò passanti per 13 punti fissi, doppi per la M^6, ma variabili (su φ^5) con essa [24]). Ai punti di φ^5 e alle rette del sistema Γ corrispondono in S_4 le ∞^2 rette di un sistema Δ, ricoprenti una varietà M^7, e i punti di una superficie φ^9 [25]), doppia per M^7, e della quale le rette di Δ sono quadrisecanti; alle intersezioni di V_4^3 con spazi S_4 e S_3, varietà M^4 passanti per φ^9 e superficie φ^7 intersezioni residue di queste. Le φ^7 hanno sezioni di genere 4 (immagini

---

[23]) Nello spazio S_4 formato dalle quadriche di S_5 passanti per una φ^5 la M^6 dei coni è una M^3 doppia, a sua volta con 10 punti doppi, costituiti dagli S_1-coni che proiettano φ^5 dalle sue 10 rette (varietà cubica studiata in vecchi lavori di *C. Segre*, Atti R. Accad. di Torino, vol. 22, 1886—87; Mem. detta Accad. (2), vol. 39, 1888; e *G. Castelnuovo*, Atti R. Ist. Veneto (6), vol. 6 (1888). Invero le 5 reti di S_1-coni quadrici aventi per basi le M^3 dei piani dei fasci di coniche di φ^5 costituiscono per la M^6 suddetta altrettanti piani doppi; dal che si trae facilmente che si tratta della varietà luogo della rette incidenti a questi piani, contata due volte. D'altra parte φ^5 è proiettata da ogni suo punto P in una φ^4 di S_4, base di un fascio di quadriche; P è perciò vertice di un fascio di coni quadrici passanti per φ^5, e che, avendo il vertice su φ^5 stessa, sono tutti elementi doppi della M^6; la quale ne è esaurita.

[24]) Questi 13 punti impongono alle quadriche passanti per essi solo 12 condizioni distinte.

[25]) Di ordine 9, poichè le F^7 considerate su V_4^3 sono rappresentate sui piani corrispondenti di S_4 da sistemi di quartiche per 9 punti.

di intersezioni di superficie di 3° e 2° ordine in S_3); e la φ^9 ha pertanto sezioni di genere 8. I 13 punti doppi delle M^6 intersezioni di V_4^3 colle quadriche per φ^5 si rispecchiano nelle 13 quadrisecanti delle curve C_8^9 sezioni di φ^9 [26]); le M^4 di S_4 passanti per φ^9 hanno su questa 25 punti doppi, immagini delle corde di φ^5 contenute nella sezione corrispondente di V_4^3 [27]).

Le ∞^5 superficie φ^5 contenute in V_4^3 si ripartiscono in ∞^4 fasci entro le singole M^6 considerate, tutti contenenti la φ^5 iniziale, e residui delle F^7 rispetto a quadriche. *Ad esse corrispondono, negli spazi S_3 dell'S_4 rappresentativo, fasci di superficie del 7° ordine passanti doppiamente per la C_8^9 sezione di φ^9, e contenenti di conseguenza le 13 quadrisecanti di questa* (con che ne è esaurita la linea base). Al fascio appartiene sempre, in corrispondenza alla φ^5 iniziale, la sezione di M^7 con questo S_3.

La superficie φ^9 contiene 5 rette, immagini delle rigate R^4 complementari della φ^5 iniziale, che si riconosce facilmente essere rette eccezionali. Essa è perciò superficie regolare di generi 1, di nuovo proiezione della F^{14} di S_5 a sezioni canoniche di genere 8, da uno spazio S_4 5-secante. I due sistemi ∞^2 delle corde di una R^4 e di una φ^5 contenuti, superficie e corde, in una V_4^3 sono entrambi riferibili a una superficie di questo tipo [28]); contengono però entrambi, come enti ∞^2, qualche ∞^1 eccezionale.

(Reçu le 4 mars 1942.)

---

[26]) Queste M^6 risultano rappresentate sugli spazi S_3 corrispondenti mediante le superficie del 4° ordine passanti per la C_8^9 sezione di φ^9. Contengono 3 rigate di ordini 22, 106, 52, corrispondenti rispett. alla curva C_8^9, alla rigata delle sue trisecanti, e alla superficie luogo delle sue coniche 7-secanti.

[27]) Questa corrispondenza fra una M^4 di S_4 con 25 punti doppi e una forma cubica generale di S_4 è stata già incontrata da me in una Nota del 1930 (Rend. R. Accad. Lincei (6), vol. 11, p. 329, n. 3, 4).

[28]) La corrispondenza fra la superficie sezione della $M^{7\cdot 3}$ luogo delle corde di φ^5 contenute in V_4^3 e la F^{14} suddetta fu anch'essa incontrata nella mia Nota cit. del 1930.