

<b>Zeitschrift:</b>	Commentarii Mathematici Helvetici
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	15 (1942-1943)
<b>Artikel:</b>	Maximale Toroide und singuläre Elemente in geschlossenen Lieschen Gruppen.
<b>Autor:</b>	Hopf, Heinz
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-14880">https://doi.org/10.5169/seals-14880</a>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Maximale Toroide und singuläre Elemente in geschlossenen Lieschen Gruppen

Von HEINZ HOPF, Zürich

Die nachstehenden Ausführungen haben den Zweck, zu den in Nr. 6 formulierten Sätzen, die nicht neu sind, auf einem Wege zu gelangen, der unter Vermeidung der infinitesimalen Theorie der halb-einfachen Gruppen ganz in dem Bereich elementarer geometrisch-algebraischer Begriffe verläuft, dem die Sätze selbst angehören. Auf einem solchen Wege ist vor kurzem *E. Stiefel* in demjenigen Teil (§ 2) seiner interessanten Abhandlung [1] über die Beziehungen zwischen geschlossenen Lieschen Gruppen und diskontinuierlichen Bewegungsgruppen vorgegangen, in welchem einer gegebenen Lieschen Gruppe  $G$  eine diskontinuierliche Raumgruppe  $\Gamma$  zugeordnet wird; an einer Stelle macht er aber einen Abstecher in die infinitesimale Theorie ([1], § 2, Nr. 7); der Wunsch, diesen Abstecher zu vermeiden, wird durch die vorliegende Note erfüllt. Die gewünschte Darstellung gelingt, ohne daß etwas wesentlich Neues bewiesen würde, durch geeignete Anordnung bekannter Tatsachen, wobei es aber wichtig ist, daß man eine Arbeit von H. Samelson [2] heranzieht (Nr. 2); dabei ergeben sich auch noch einige andere Abänderungen des Gedankenganges von Stiefel, die mir vorteilhaft erscheinen. Außer aus den genannten Arbeiten [1], [2] werden noch aus zwei anderen Arbeiten [3], [4] kleine Teile benutzt. Einiges aus den Arbeiten [1]—[4] habe ich im folgenden noch einmal ausführlich vorgebracht, teils um kleiner Abänderungen in der Formulierung willen, die für unseren Zweck nötig waren, teils auch darum, um eine einigermaßen in sich geschlossene Darstellung zu erhalten, deren Lektüre nicht zu unbequem ist. Eine Grundlage für die erwähnten Arbeiten wie für die vorliegende ist der Satz, daß jede kompakte und zusammenhängende, Abelsche, Liesche Gruppe ein Toroid ist, d. h. das direkte Produkt von endlich vielen Kreisdrehungsgruppen. Außer diesem Satz werden nur einige Hauptsätze von prinzipiellem Charakter aus der Theorie der Lieschen Gruppen benötigt, wie z. B.: die Existenz kanonischer Koordinaten in der Umgebung des Eins-Elementes; der Satz, daß jede abgeschlossene Untergruppe einer geschlossenen Lieschen Gruppe selbst aus einer Lieschen Gruppe und allenfalls endlich vielen Nebengruppen derselben besteht; der Satz von Weyl, daß jede kompakte Gruppe linearer Transformationen bei Einführung geeigneter Koordinaten eine orthogonale Gruppe ist.

Die erwähnten Arbeiten, aus denen wir Teile benutzen werden, sind die folgenden:

[1] E. Stiefel, Über eine Beziehung zwischen geschlossenen Lieschen Gruppen und diskontinuierlichen Bewegungsgruppen euklidischer Räume und ihre Anwendung auf die Aufzählung der einfachen Lieschen Gruppen, Comment. Math. Helvet. **14** (1942), 350—380.

[2] H. Samelson, Über die Sphären, die als Gruppenräume auftreten, ibidem **13** (1941), 144—155.

[3] H. Hopf, Über den Rang geschlossener Liescher Gruppen, ibidem **13** (1941), 119—143.

[4] H. Hopf und H. Samelson, Ein Satz über die Wirkungsräume geschlossener Liescher Gruppen, ibidem **13** (1941), 240—251.

Der Inhalt einer in denselben Rahmen gehörigen Note von A. Weil, Démonstration topologique d'un théorème fondamental de Cartan, C. R. **200** (1935), 518—520, ist in [4] enthalten.

**1. Maximale Toroide ; die Gruppe  $\Phi$ .** Es sei immer  $G$  eine geschlossene Liesche Gruppe,  $n$  ihre Dimension. In  $G$  gibt es Toroide, nämlich die abgeschlossenen Hüllen der einparametrischen Untergruppen; ein Toroid, das in keinem höherdimensionalen Toroid von  $G$  enthalten ist, heißt maximal. Es sei immer  $T$  ein festes maximales Toroid in  $G$ ,  $l$  seine Dimension.

**1.1.** Ist  $T'$  ein (beliebiges) Toroid in  $G$  und  $a$  ein Element von  $G$ , das mit allen Elementen von  $T'$  vertauschbar ist, so gibt es in  $G$  ein Toroid, das sowohl  $T'$  als auch  $a$  enthält.

Beweis: [3], Nr. 23. — Aus 1.1 folgt (l. c.):

**1.1'.** Ein maximales Toroid  $T$  ist zugleich maximale Abelsche Untergruppe von  $G$ , d. h. es ist nicht echte Untergruppe einer Abelschen Untergruppe von  $G$ .

Für die Dimensionen  $n$  und  $l$  von  $G$  und  $T$  gilt ([3], Nr. 27):

**1.2.**  $n \equiv l \pmod{2}$ .

Der Hilfssatz 2 in [4], Nr. 4 besagt:

**1.3.** Der Normalisator  $N_T$  von  $T$  — also die Gruppe derjenigen  $a \in G$ , für welche  $a^{-1}Ta = T$  ist — hat die Dimension  $l$ ; daher besitzt  $N_T$  eine endliche Restklassenzerlegung mod.  $T$ :

$$N_T = T + a_1T + \cdots + a_{s-1}T.$$

**1.4. Definition:**  $\Phi$  sei die Gruppe derjenigen Automorphismen von  $T$ , welche durch innere Automorphismen von  $G$  bewirkt werden.

Die Automorphismen aus  $\Phi$  werden durch diejenigen Automorphismen  $x \rightarrow a^{-1}xa$  von  $G$  bewirkt, für welche  $a \in N_T$  ist; jedem  $a \in N_T$  ist also ein  $h(a) \in \Phi$  zugeordnet, und  $h$  ist offenbar ein Homomorphismus von  $N_T$  auf  $\Phi$ ; ist  $a \in T$ , so ist  $h(a)$  das Einselement von  $\Phi$ ; ist umgekehrt  $h(a)$  das Einselement, so ist  $a^{-1}xa = x$  für alle  $x \in T$ , also ist die von  $T$  und  $a$  erzeugte Gruppe Abelsch, also ist nach 1.1'  $a \in T$ . Damit ist gezeigt:

**1.5.** Die Gruppe  $\Phi$  ist isomorph mit der Faktorgruppe  $N_T/T$ ; sie ist also endlich (1.3), und zwar ist ihre Ordnung gleich der Anzahl der Komponenten von  $N_T$ .<sup>1)</sup>

Es sei jetzt  $h$  eine homomorphe Abbildung von  $G$  auf eine Liesche Gruppe  $G_1$ , und der Kern<sup>2)</sup>  $H$  von  $h$  sei in  $T$  enthalten; dann gelten die folgenden beiden Sätze:

**1.6.**  $T_1 = h(T)$  ist maximales Toroid in  $G_1$ .

**1.7.** Die Gruppe  $\Phi_1$ , die für  $G_1$  und  $T_1$  dieselbe Bedeutung hat wie  $\Phi$  für  $G$  und  $T$ , ist mit  $\Phi$  isomorph.

Beweis: Aus  $H \subset T$  folgt leicht:  $T = h^{-1}(T_1)$ ,  $N_T = h^{-1}(N_{T_1})$ . Ferner ist klar, daß  $T_1$  kompakt, zusammenhängend und Abelsch, also ein Toroid ist. Um zu zeigen, daß  $T_1$  maximal ist, nehmen wir eine Umgebung  $V$  von  $T$ , die außer den Elementen von  $T$  kein Element von  $N_T$  enthält; nach 1.3 gibt es solche  $V$ . Aus  $H \subset T$  folgt, daß  $h(V)$  eine Umgebung der Eins von  $G_1$  ist.  $a_1$  sei ein beliebiges Element in  $h(V)$ , das mit  $T_1$  vertauschbar ist; ist dann  $a$  ein Element von  $V$  mit  $h(a) = a_1$ , so ist  $a \in h^{-1}(N_{T_1}) = N_T$ , also  $a \in T$ ; folglich ist  $a_1 \in T_1$ ; das bedeutet, daß  $T_1$  maximal ist. Da, wie schon festgestellt,  $h^{-1}(T_1) = T$ ,  $h^{-1}(N_{T_1}) = N_T$  ist, ist  $N_{T_1}/T_1 \cong N_T/T$ , also nach 1.5  $\Phi_1 \cong \Phi$ .

**1.8.** Es gilt der Satz, daß je zwei maximale Toroide in  $G$  miteinander konjugiert sind ([4], Nr. 4, Hilfssatz 4); daraus folgt, daß die Zahl  $l$  und die Struktur der Gruppe  $\Phi$  vollständig durch  $G$  bestimmt sind;  $l$  heißt der Rang von  $G$ . Wir werden diese Tatsachen aber nicht benutzen.

<sup>1)</sup> In [4], Nr. 7, wird auf einen Zusammenhang zwischen der Gruppe  $N_T/T$  und topologischen Eigenschaften der Wirkungsräume von  $G$  hingewiesen. — Man kann auch zeigen, daß der Raum  $G/T$  einfach zusammenhängend ist; daraus folgt leicht, daß die Fundamentalgruppe des Raumes  $G/N_T$ , dessen Überlagerungsraum  $G/T$  ist, mit  $N_T/T$  und nach dem obigen Satz 1.5 daher mit  $\Phi$  isomorph ist. Aus unserer Bemerkung 1.8 ergibt sich, daß  $G/N_T$  mit dem Raum aller maximalen Toroide in  $G$  homöomorph ist. Nach [4], Nr. 7, hat  $G/N_T$  die Charakteristik +1; mit Hilfe unseres späteren Satzes 5.4 läßt sich beweisen, daß diese Mannigfaltigkeit nicht-orientierbar ist.

<sup>2)</sup> Der Kern eines Homomorphismus ist das Urbild des Einselementes der Bildgruppe.

**2. Gruppen vom Range 1.**  $G_1$  sei eine Gruppe, in der es ein maximales Toroid  $T_1$  von der Dimension 1 gibt;  $T_1$  ist also eine Kreisdrehungsgruppe und mit der Kreislinie homöomorph. Die Dimension von  $G_1$  sei  $n_1$ ; es sei  $n_1 > 1$ , also  $G_1$  nicht identisch mit  $T_1$ . Die gemäß 1.4 zu  $G_1$  und  $T_1$  gehörige Gruppe heiße  $\Phi_1$ . Wir behaupten:

**2.1.**  $\Phi_1$  hat die Ordnung 2.

**2.2.**  $n_1 = 3$ .

Die nachstehenden Beweise sind bis auf kleine Änderungen der Arbeit [2] entnommen.

*Beweis von 2.1:*  $r$  sei eine der beiden orientierten Richtungen, die im Einselement  $e$  an  $T_1$  tangential sind. Den inneren Automorphismus  $x \rightarrow axa^{-1}$  von  $G_1$  nennen wir  $A_a$ . Wenn  $a$  und  $b$  derselben Nebengruppe  $aT_1$  von  $T_1$  angehören, so ist  $A_a(t) = A_b(t)$  für alle  $t \in T_1$  und daher  $A_a(r) = A_b(r)$ ; umgekehrt: wenn  $A_a(r) = A_b(r)$  ist, so ist  $A_a(t) = A_b(t)$  für  $t \in T_1$ , also  $a^{-1}b$  mit allen  $t \in T_1$  vertauschbar und nach 1.1' daher  $a^{-1}b \in T_1$ ,  $b \in aT_1$ . Durch  $f(aT_1) = A_a(r)$  ist also eine eindeutige und natürlich stetige Abbildung  $f$  des Nebengruppenraumes<sup>3)</sup>  $G_1/T_1$  in die  $(n_1 - 1)$ -dimensionale Sphäre  $S$  der orientierten Richtungen im Punkte  $e$  erklärt. Da  $n_1 > 1$  ist, ist  $S$  zusammenhängend;  $S$  und  $G_1/T_1$  sind geschlossene Mannigfaltigkeiten der Dimension  $n_1 - 1$ ; daher folgt aus bekannten Sätzen (z. B. über den Abbildungsgrad), daß  $f$  eine Homöomorphie von  $G_1/T_1$  auf die ganze Sphäre  $S$  ist. Folglich gibt es ein solches  $a_1 \in G_1$ , daß  $A_{a_1}(r) = f(a_1T_1)$  die zu  $r$  entgegengesetzte Richtung ist; dann bewirkt  $A_{a_1}$  die Inversion von  $T_1$ , die jedes  $t$  durch  $t^{-1}$  ersetzt.  $\Phi_1$  enthält also außer der Identität die Inversion; andere Automorphismen der Kreisdrehungsgruppe  $T_1$  gibt es nicht; mithin gilt 2.1.

*Beweis von 2.2:* Dem Beweis von 2.1 entnehmen wir zwei Tatsachen:  
1.  $G_1/T_1$  ist mit der  $(n_1 - 1)$ -dimensionalen Sphäre  $S$  homöomorph;  
2. wenn ein Element  $a$  stetig von  $e$  in das oben genannte Element  $a_1$  läuft, so stellt, wenn man  $T_1$  als gerichteten geschlossenen Weg auffaßt, die Schar der Wege  $A_a(T_1)$  eine Deformation von  $T_1$  in den entgegen gesetzt gerichteten Weg, den wir  $-T_1$  nennen, dar; hierfür wollen wir kurz sagen:  $T_1$  wird „umgedreht“. Drittens stellen wir noch fest: da  $n_1$  nach 1.2 ungerade ist, ist  $n_1 \geq 3$ .

Damit ist die Behauptung 2.2 auf den folgenden topologischen Hilfsatz A zurückgeführt: „Die Mannigfaltigkeit  $G_1$ , deren Dimension  $n_1 \geq 3$

---

<sup>3)</sup> Wegen der Begriffe „Nebengruppenraum“, „Wirkungsraum“, „Faserraum“ vgl. man z. B. [4], besonders Nr. 3, und [2], Nr. 2b.

ist, ist derart gefasert<sup>3)</sup> — in die Nebengruppen von  $T_1$  —, daß (a) die Fasern einfach geschlossene Linien sind, daß (b) die Faser  $T_1$  umgedreht werden kann, und daß (c) der Faserraum  $G_1/T_1$  die  $(n_1 - 1)$ -dimensionale Sphäre  $S$  ist; dann ist  $n_1 = 3$ .“

$P$  sei die Projektion von  $G_1$  auf  $S$ , die jedem  $x \in G_1$  denjenigen Punkt  $P(x) \in S$  zuordnet, welcher der Faser entspricht, auf der  $x$  liegt. Wäre  $n_1 > 3$ , so wäre, da man die bei dem Umdrehen von  $T_1$  überstrichene Punktmenge  $M$  von  $G_1$  als zweidimensionales krummes Polyeder annehmen darf,  $P(M)$  ein echter Teil von  $S$ , also in einer  $(n_1 - 1)$ -dimensionalen (sphärischen) Vollkugel  $V$  enthalten; das Umdrehen von  $T_1$  wäre also in einem Teil  $R$  von  $G_1$  möglich, welcher derart gefasert ist, daß der Faserraum  $R/T_1$  eine Vollkugel ist. Damit ist der Hilfssatz A auf den folgenden Hilfssatz B zurückgeführt: „Ist der Raum  $R$  derart in einfach geschlossene Linien gefasert, daß der Faserraum  $R/T_1$  eine Vollkugel  $V$  ist, so kann die Faser  $T_1$  in  $R$  nicht umgedreht werden.“

Nun folgt aber aus der Voraussetzung, daß  $R/T_1 = V$  eine Vollkugel ist, nach einem wichtigen und leicht beweisbaren Satz von Feldbau<sup>4)</sup>: „ $R$  ist das topologische Produkt  $V \times F$ , wobei  $F$  mit den Fasern homöomorph ist; und zwar entsprechen den Fasern von  $R$  die Fasern  $p \times F$  von  $V \times F$ , wobei  $p$  die Punkte von  $V$  durchläuft.“ In unserem Falle ist  $F$  eine Kreislinie; dann kann in  $V \times F$  ein Weg  $p \times F$  nicht umgedreht werden, da er ein erzeugendes Element der unendlich zyklischen Fundamentalgruppe von  $V \times F$  darstellt. Folglich gilt der Hilfssatz B und mithin auch der Satz 2.2.

Der Hilfssatz B lässt sich auch folgendermaßen ohne den Satz von Feldbau beweisen: Könnte  $T_1$  in  $R$  umgedreht werden, so könnte man einen Kreisring  $K$ , der von den gleichsinnig gerichteten Kreisen  $C_1$  und  $C_2$  berandet wird, durch eine Abbildung  $f$  derart in den Raum  $R$  abbilden, daß  $f(C_1) = T_1$ ,  $f(C_2) = -T_1$  wäre.  $P$  sei wie oben die Projektion von  $R$  auf  $V$ ; dann wäre  $Pf = g$  eine Abbildung von  $K$  in  $V$  mit  $g(C_i) = O$ , wobei  $O$  der Punkt  $P(T_1)$  ist ( $i = 1, 2$ ); da  $V$  eine Vollkugel ist, ließe sich das Bild  $g(K)$  unter Festhaltung von  $O$  auf den Punkt  $O$  zusammenziehen, d. h. es gäbe eine Abbildungsschar  $g_\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$ , von  $K$  in  $V$  mit  $g_0 = g$ ,  $g_\tau(y) = O$  für  $y \in C_i$  ( $i = 1, 2$ ) und alle  $\tau$ ,  $g_1(y) = O$  für  $y \in K$ . Nach einem grundlegenden und leicht beweisbaren Lemma aus der Theorie der stetigen Abbildungen in gefaserte Räume<sup>5)</sup> gäbe es dann auch eine Abbildungsschar  $f_\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$ , von  $K$  in  $R$  mit  $Pf_\tau = g_\tau$  für alle  $\tau$  und  $f_0 = f$ ; dabei wäre, wenn  $\overline{T}_1$  die Menge der Punkte des gerichteten Weges  $T_1$  bezeichnet,

<sup>4)</sup> J. Feldbau, Sur la classification des espaces fibrés, C. R. 208 (1939), 1621 — 1623, Théorème A.

<sup>5)</sup> B. Eckmann, Zur Homotopietheorie gefaselter Räume, Comment. Math. Helvet. 14 (1941), 141—192; besonders 155—156.

$$(1) \quad f_\tau(C_i) \subset \overline{T}_1 \text{ für } i = 1, 2 \text{ und alle } \tau, \quad (2) \quad f_1(K) \subset \overline{T}_1.$$

(1) bedeutet: der Weg  $f_0(C_i) = \pm T_1$  ist auf  $\overline{T}_1$  homotop mit dem Wege  $f_1(C_i)$ ;  
 (2) bedeutet:  $f_1(C_1)$  ist auf  $\overline{T}_1$  homotop zu  $f_1(C_2)$ . Also wären  $T_1$  und  $-T_1$  einander homotop auf  $\overline{T}_1$ , der Weg  $T_1$  könnte also auf  $\overline{T}_1$  umgedreht werden. Da dies unmöglich ist, ist die Annahme,  $T_1$  könne in  $R$  umgedreht werden, falsch.

**3. Die singulären Elemente.**  $G$  sei jetzt wieder eine beliebige Gruppe wie in Nr. 1; auch  $T, n, l, \Phi$  sollen dieselben Bedeutungen haben wie dort.

**3.1. Definition:** Das Element  $t$  von  $T$  heißt regulär, wenn es auf keinem von  $T$  verschiedenen maximalen Toroid von  $G$  liegt, und singulär, wenn es außer auf  $T$  noch auf einem anderen maximalen Toroid liegt.

Nach [3], Nr. 25, ist diese Definition mit der folgenden gleichwertig:

**3.2.**  $t$  ist regulär oder singulär, jenachdem sein Normalisator die Dimension  $l$  oder größere Dimension hat.

In [1], § 2, Nr. 3, wird folgendes gezeigt:  $m$  sei die gemäß 1.2 durch  $n - l = 2m$  bestimmte ganze Zahl; jedem  $t \in T$  sind  $m$  Kreisdrehungen  $\vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t)$  zugeordnet;  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m$  sind homomorphe Abbildungen von  $T$  in die Kreisdrehungsgruppe  $D$ ; keine von ihnen ist die triviale Abbildung auf das Einselement von  $D$ ; wenn das Element  $t$  den Kernen<sup>2)</sup> von genau  $\nu$  der Homomorphismen  $\vartheta_i$  angehört, so hat sein Normalisator die Dimension  $l + 2\nu$ .<sup>6)</sup>

Aus der letzten Tatsache und aus 3.2 folgt, daß  $t$  dann und nur dann singulär ist, wenn  $t$  wenigstens einem der Kerne angehört. Die Kerne mögen  $U_1, \dots, U_m$  heißen; sie sind abgeschlossene Untergruppen von  $T$ ; da  $D$  eindimensional und kein Homomorphismus  $\vartheta_i$  trivial ist, sind die  $U_i$  ( $l - 1$ )-dimensional. Es gelten somit die folgenden beiden Sätze:

**3.3.** Die Menge der singulären Elemente von  $T$  ist die Vereinigungsmenge der Elemente von  $m$  abgeschlossenen Untergruppen  $U_1, \dots, U_m$  von  $T$ ; jede Gruppe  $U_i$  hat die Dimension  $l - 1$ ; es ist  $2m = n - l$ .

**3.4.** Wenn das Element  $t$  genau  $\nu$  der Gruppen  $U_i$  angehört ( $\nu \geq 0$ ), so hat sein Normalisator die Dimension  $l + 2\nu$ .

Zu 3.3 ist zu bemerken: es ist noch nicht bewiesen, daß die Gruppen

<sup>6)</sup> In [1], l. c., werden nicht die homomorphen Abbildungen mit  $\vartheta_i$  bezeichnet, sondern unter  $\vartheta_i(t)$  wird die durch  $2\pi$  dividierte Winkelkoordinate der Drehung verstanden, die durch den betreffenden Homomorphismus dem Element  $t$  zugeordnet ist; daß keine der Abbildungen trivial ist, bedeutet dann: kein  $\vartheta_i$  verschwindet identisch mod. 1; und der Kern des Homomorphismus ist dann die Menge derjenigen  $t$ , für welche  $\vartheta_i$  mod. 1 verschwindet.

$U_1, \dots, U_m$  sämtlich voneinander verschieden sind; dies wird erst in Nr. 5 gezeigt werden. In [1] ist der betreffende Beweis die eingangs erwähnte Stelle, an welcher die infinitesimale Theorie der halb-einfachen Gruppen herangezogen wird.

Da die Transformationen aus  $\Phi$  durch Automorphismen von  $G$  bewirkt werden, ergibt sich aus der Definition 3.1:

**3.5.** Die Menge der singulären Elemente, also die Vereinigung der Gruppen  $U_i$ , wird durch jede Transformation aus  $\Phi$  auf sich abgebildet.

In bezug auf kanonische Koordinaten, die in einer Umgebung des Einselementes  $e$  gelten, ist  $T$  eine  $l$ -dimensionale Ebene, die  $e$  enthält, und die  $U_i$  sind  $(l - 1)$ -dimensionale Ebenen in  $T$ , die  $e$  enthalten; die Ebenen  $U_i$  zerlegen  $T$  — in der Umgebung von  $e$  — in endlich viele Gebiete  $B_1, B_2, \dots$ . Die inneren Automorphismen von  $G$  sind in bezug auf die kanonischen Koordinaten affine Abbildungen, die  $e$  festhalten; diejenigen Automorphismen, welche zu  $\Phi$  gehören, transformieren  $T$  in sich; da sie nach 3.5 die Ebenen  $U_i$  permutieren, permutieren sie auch die Gebiete  $B_j$ . Es gilt nun folgender Satz ([1], § 2, Satz 11):

**3.6.** Durch eine Transformation  $\varphi \in \Phi$ , die nicht die Identität ist, wird kein Gebiet  $B_j$  auf sich abgebildet.

Beweis ([1], l. c., sowie Satz 6):  $B_j$  werde durch  $\varphi \in \Phi$  auf sich abgebildet. Als Element der endlichen Gruppe  $\Phi$  hat  $\varphi$  endliche Ordnung.  $t$  sei ein Punkt von  $B_j$ , seine Bilder bei den endlich vielen Potenzen von  $\varphi$  seien  $t_h$ , und der Schwerpunkt der  $t_h$  sei  $s$ ; alle diese Punkte liegen in  $B_j$ ; ( $t$  wird in hinreichender Nähe von  $e$  angenommen). Da das System der  $t_h$  durch  $\varphi$  auf sich abgebildet wird, ist  $s$  Fixpunkt der affinen Abbildung  $\varphi$ ; daher ist auch jeder Punkt der Strecke  $S$ , die  $e$  mit  $s$  verbindet, Fixpunkt von  $\varphi$ . Die Strecke  $S$  erzeugt eine einparametrische Untergruppe von  $G$ ; deren abgeschlossene Hülle ist ein Toroid  $T'$ . Die Abbildung  $\varphi$  werde durch den inneren Automorphismus  $x \rightarrow a^{-1}x a$  von  $G$  bewirkt; daß die Elemente von  $S$  Fixpunkte von  $\varphi$  sind, bedeutet:  $a$  ist mit jedem Element von  $S$  vertauschbar; folglich ist  $a$  auch mit jedem Element von  $T'$  vertauschbar. Nach 1.1 gibt es daher ein Toroid  $T''$ , das  $a$  und  $T'$ , also auch  $s$ , enthält. Nun ist aber das Element  $s$ , da es in  $B_j$ , und daher auf keinem  $U_i$  liegt, reguläres Element; nach 3.1 ist daher  $T'' \subset T$ , da andernfalls  $s$  sowohl auf  $T$  als auch auf einem von  $T$  verschiedenen maximalen Toroide, das  $T''$  enthält, läge. Da  $T'' \subset T$  ist, ist  $a \in T$ ; das bedeutet:  $\varphi$  ist die identische Abbildung von  $T$ .

**4. Hilfssätze.** Wir schalten hier drei einfache allgemeine Hilfssätze über Toroide ein; die Gruppe  $G$  kommt dabei nicht vor.

$T$  sei ein  $l$ -dimensionales Toroid,  $U$  eine abgeschlossene  $(l - 1)$ -dimensionale Untergruppe von  $T$ ; die Eins-Komponente von  $U$  — d. h. die Komponente, die das Einselement enthält — heiße  $U'$ ; sie ist ein  $(l - 1)$ -dimensionales Toroid; die Faktorgruppe  $U/U'$  ist infolge der Abgeschlossenheit von  $U$  endlich; ihre Ordnung, also die Anzahl der Komponenten von  $U$ , heiße  $p$ .

#### 4.1. Die Faktorgruppe $U/U'$ ist zyklisch.

Denn  $U/U'$  ist Untergruppe der Gruppe  $T/U'$ , die eindimensional, kompakt und zusammenhängend, also die Kreisdrehungsgruppe ist.

Jedes Toroid enthält nach dem Kroneckerschen Approximationssatz erzeugende Elemente, d. h. solche, deren Potenzen überall dicht in dem Toroid liegen. Es sei  $a$  ein erzeugendes Element von  $U'$ ; ferner sei die Nebengruppe  $U^*$  von  $U'$  ein (im gewöhnlichen Sinne) erzeugendes Element der nach 4.1 zyklischen endlichen Gruppe  $U/U'$  und  $b$  ein Element aus  $U^*$ . Dann ist  $a b^{-p} \in U'$ ; aus den bekannten Rechenregeln in Toroiden geht hervor, daß es in  $U'$  ein Element  $c$  mit  $c^p = a b^{-p}$  gibt (cf. [3], Nr. 19). Dann ist für jeden Exponenten  $k$ , wenn wir ihn in der Form  $k = pq + r$ ,  $0 \leq r < p$ , darstellen und wenn wir  $bc = d$  setzen:  $d^k = a^q d^r$ ; die Potenzen  $a^q$  liegen überall dicht in  $U'$ , und die  $p$  Potenzen  $d^r$  liegen in den  $p$  Nebengruppen von  $U$  mod.  $U'$ ; daher liegen die Potenzen des Elementes  $d$  überall dicht in  $U$ . Damit ist gezeigt:

#### 4.2. $U$ enthält ein erzeugendes Element, d. h. ein solches, dessen Potenzen überall dicht in $U$ liegen.

Ferner behaupten wir:

#### 4.3. Wenn es einen Automorphismus von $T$ gibt, der die Ordnung 2 hat und jedes Element von $U$ festläßt, so ist $p = 1$ oder $p = 2$ .

Beweis: Der Automorphismus  $\varphi$  erfülle die Voraussetzungen. Da jede Matrix der Ordnung 2 den Eigenwert  $-1$  hat, gibt es im Punkt  $e$ , dem Einselement von  $T$ , eine Richtung, die durch  $\varphi$  in die ihr entgegengesetzte Richtung transformiert wird; die einparametrische Gruppe  $C$ , die diese Tangentialrichtung hat, erleidet daher bei  $\varphi$  die Inversion, d. h. es ist  $\varphi(c) = c^{-1}$  für  $c \in C$ . Da  $\varphi$  die Elemente von  $U'$  festhält, ist  $C$  nicht in  $U'$  enthalten; folglich ist die von  $U'$  und  $C$  erzeugte Gruppe  $l$ -dimensional, also mit  $T$  identisch; insbesondere läßt sich daher jedes Element  $u \in U$  in der Form  $u = u_0 c$ ,  $u_0 \in U'$ ,  $c \in C$ , darstellen; aus  $c = uu_0^{-1} \in U$  folgt

$\varphi(c) = c$ ; da andererseits  $\varphi(c) = c^{-1}$  ist, ist  $c^2 = e$ ; daher ist  $u^2 = u_0^2$ , also  $u^2 \in U'$  für jedes  $u \in U$ . Dies bedeutet: die (zyklische) Faktorgruppe  $U/U'$  hat die Ordnung 1 oder die Ordnung 2, w.z.b.w.

**5. Fortsetzung der Untersuchung der Menge der singulären Elemente und der Gruppe  $\Phi$ .** Es sei wieder  $T$  ein maximales,  $l$ -dimensionales Toroid in  $G$ ; seine Untergruppen  $U_i$  sind wie in Nr. 3 erklärt; das  $(l - 1)$ -dimensionale Toroid, das die Eins-Komponente von  $U_i$  ist, heiße  $U'_i$ .

$a$  sei, bei festem  $i$ , erzeugendes Element des Toroids  $U'_i$ ; sein Normalisator sei  $N_a$ , und dessen Eins-Komponente sei  $N'_a$ ; die Dimension von  $N_a$ , die zugleich die Dimension von  $N'_a$  ist, sei  $n'$ . Nach 3.2 ist  $n' > l$ . Es ist  $T \subset N'_a$ ;  $T$  ist also auch maximales Toroid in  $N'_a$ . Das Element  $a$  und daher auch das ganze Toroid  $U'_i$  gehören zum Zentrum von  $N_a$ ; da somit  $U'_i$  Normalteiler von  $N'_a$  ist, existiert die Gruppe  $G_1 = N'_a/U'_i$ , und es liegt eine homomorphe Abbildung  $h$  von  $N'_a$  auf  $G_1$  mit dem Kern  $U'_i$  vor. Die Dimension von  $G_1$  ist  $n_1 = n' - (l - 1) > 1$ ; nach 1.6 ist  $T_1 = T/U'_i$  maximales Toroid in  $G_1$ ; seine Dimension ist  $l - (l - 1) = 1$ ; nach 2.2 ist daher  $n_1 = 3$ , also  $n' = l + 2$ . Dies bedeutet nach 3.4, daß  $a$  keinem  $U_j$  mit  $j \neq i$  angehört. Damit ist gezeigt:

**5.1.** Für  $j \neq i$  ist  $U_j \neq U_i$  und  $U'_j \neq U'_i$ .

Die Tangentialebenen von  $U_j$  und  $U_i$  im Punkte  $e$  sind  $(l - 1)$ -dimensional und nach 5.1 voneinander verschieden; ihr Durchschnitt ist daher  $(l - 2)$ -dimensional; mithin gilt folgende Verschärfung von 5.1:

**5.1'.** Für  $j \neq i$  ist der Durchschnitt von  $U_j$  und  $U_i$  eine  $(l - 2)$ -dimensionale Gruppe.

Die gemäß 1.4 zu der Gruppe  $G_1$  und ihrem maximalen Toroid  $T_1$  gehörige Gruppe  $\Phi_1$  hat nach 2.1 die Ordnung 2; nach 1.7 hat daher auch die Gruppe  $\Phi'$ , die in analoger Weise zu der Gruppe  $N'_a$  und ihrem maximalen Toroid  $T$  gehört, die Ordnung 2; es sei  $\varphi_i$  das Element der Ordnung 2 in  $\Phi'$ .

Wir behaupten:  $\varphi_i$  läßt jedes Element von  $U_i$  fest. Da  $\varphi_i$  durch einen inneren Automorphismus  $x \rightarrow b^{-1}xb$  mit  $b \in N'_a$  bewirkt wird, ist dies bewiesen, sobald gezeigt ist:  $U_i$  gehört zum Zentrum von  $N'_a$ . Es sei  $c$  erzeugendes Element von  $U_i$ , wie es nach 4.2 existiert, und  $N'_c$  die Eins-Komponente des Normalisators  $N_c$  von  $c$ ; nach 3.4 ist die Dimension von  $N_c$  und  $N'_c$  mindestens  $l + 2$ ; da Potenzen von  $c$  in  $U'_i$  überall dicht liegen, ist jedes mit  $c$  vertauschbare Element auch mit  $a$  vertauschbar, und daher ist  $N_c \subset N_a$  und  $N'_c \subset N'_a$ ; da  $N'_a$  die Dimension  $l + 2$  hat,

ist mithin  $N'_c = N'_a$ . Nun gehören  $c$  und daher auch die von  $c$  erzeugte Gruppe  $U_i$  zum Zentrum von  $N_c$ ; ferner ist  $U_i \subset T \subset N'_c$ ; folglich gehört  $U_i$  zum Zentrum von  $N'_c = N'_a$ .

Aus  $T \subset N'_a \subset G$  und der Definition 1.4 folgt unmittelbar, daß  $\Phi'$  Untergruppe von  $\Phi$  ist; es ist also  $\varphi_i \in \Phi$ . Damit ist folgendes bewiesen:

**5.2.** Die Gruppe  $\Phi$  enthält  $m$  solche Involutionen  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ , daß  $\varphi_i$  alle Elemente von  $U_i$  festläßt ( $i = 1, \dots, m$ ).

Aus 5.2 und 4.3 folgt:

**5.3.** Jede Gruppe  $U_i$  besteht aus höchstens zwei Komponenten.

Wir betrachten jetzt — in engem Anschluß an [1], § 2 — die Transformationen aus der Gruppe  $\Phi$  noch näher. Zu diesem Zwecke führen wir wie bei der Behandlung von 3.6 in der Umgebung des Punktes  $e$  kanonische Koordinaten ein; diese können wir nach einem bekannten Satz von Weyl so wählen, daß in bezug auf sie die inneren Automorphismen von  $G$  nicht nur affin, sondern sogar orthogonal, also eigentliche oder uneigentliche Bewegungen sind; ein solches Koordinatensystem soll im folgenden kurz ein orthogonales kanonisches System heißen. Daraus, daß  $\varphi_i$  die Ebene  $T$  auf sich abbildet, alle Punkte von  $U_i$  festläßt, aber nicht die Identität ist, folgt:

**5.4.** In bezug auf ein orthogonales kanonisches Koordinatensystem in der Umgebung von  $e$  sind die Involutionen  $\varphi_i$  die Spiegelungen der  $l$ -dimensionalen Ebene  $T$  an den in  $T$  gelegenen  $(l - 1)$ -dimensionalen Ebenen  $U_i$ .

Weiter betrachten wir wie bei 3.6 die Gebiete  $B_j$ , in welche der  $l$ -dimensionale Raum  $T$  durch die Ebenen  $U_i$  zerlegt wird (in der Umgebung von  $e$ ); sind  $B, B'$  zwei dieser Gebiete, so kann man in ihnen Punkte  $t$  bzw.  $t'$  so wählen, daß deren Verbindungsstrecke keinen der  $(l - 2)$ -dimensionalen Durchschnitte irgend zweier Ebenen  $U_h$  und  $U_i$  trifft; bei Durchlaufung dieser Strecke von  $t$  bis  $t'$  mögen der Reihe nach die Ebenen  $U_1, U_2, \dots, U_r$  durchschriften werden; nimmt man der Reihe nach die Spiegelungen  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$  vor, so entsteht eine Transformation  $\varphi'$  aus  $\Phi$  mit  $\varphi'(B) = B'$ . Es sei nun  $\varphi$  eine beliebige Transformation aus  $\Phi$  und  $B$  eines der Gebiete  $B_j$ ; wir setzen  $\varphi(B) = B'$ ; wie wir eben gesehen haben, gibt es ein Produkt  $\varphi'$  von Spiegelungen  $\varphi_i$ , so daß  $\varphi'(B) = B'$  ist; durch  $\varphi' \varphi^{-1}$  wird  $B$  also auf sich abgebildet; nach 3.6 ist daher  $\varphi' \varphi^{-1}$  die Identität, also  $\varphi = \varphi'$ . Damit haben wir (wie in [1], § 2, Nr. 10) folgendes bewiesen:

**5.5.** Die Gruppe  $\Phi$  wird von den Involutionen  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  erzeugt.

**6. Zusammenfassung der Ergebnisse.** Es seien wie bisher:  $G$  eine geschlossene Liesche Gruppe;  $T$  ein maximales Toroid in  $G$ ;  $n$  die Dimension von  $G$ ,  $l$  die Dimension von  $T$ ,  $m$  die durch  $n - l = 2m$  bestimmte ganze Zahl (cf. 1.2). Die singulären Elemente sind wie in 3.1, die Gruppe  $\Phi$  ist wie in 1.4 definiert.

**Satz I.** Die Menge der singulären Elemente von  $T$  ist die Vereinigungsmenge der Elemente von  $m$  abgeschlossenen Untergruppen  $U_1, \dots, U_m$  von  $T$ . Jede Gruppe  $U_i$  ist  $(l - 1)$ -dimensional; sie ist entweder ein Toroid  $U'_i$  oder sie besteht aus einem Toroid  $U'_i$  und noch einer Nebengruppe von  $U'_i$ . Für  $j \neq i$  ist  $U_j \neq U_i$ , und der Durchschnitt von  $U_j$  und  $U_i$  ist eine  $(l - 2)$ -dimensionale Gruppe.

**Satz II.** Die Gruppe  $\Phi$  ist endlich. Sie transformiert die Vereinigungsmenge der Gruppen  $U_i$  in sich. Sie wird von  $m$  Involutionen  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  erzeugt.  $\varphi_i$  lässt jedes Element von  $U_i$  fest; in bezug auf orthogonale kanonische Koordinaten in der Umgebung des Einselementes  $e$  ist  $\varphi_i$  die Spiegelung von  $T$  an der Ebene  $U_i$ .

Zu dem Satz I sei noch ein Zusatz gemacht. Aus 1.1 folgt, daß das Zentrum  $Z$  von  $G$  in  $T$  enthalten ist. Ein Element  $t \in G$  gehört dann und nur dann zu  $Z$ , wenn sein Normalisator  $N_t$  die ganze Gruppe  $G$  oder, was dasselbe ist, wenn  $N_t$   $n$ -dimensional ist; nach 3.4 bedeutet das, daß  $t$  allen  $m$  Gruppen  $U_i$  angehört. Somit gilt folgender

**Zusatz zu Satz I.** Der Durchschnitt der Gruppen  $U_1, \dots, U_m$  ist das Zentrum  $Z$  von  $G$ . Daß die Gruppe  $G$  halb-einfach, d. h. daß  $Z$  diskret ist, ist also gleichbedeutend damit, daß der Durchschnitt der  $U_i$  nur aus endlich vielen Punkten besteht.

Von diesen Ergebnissen gelangt man zu denen des § 2 in [1], indem man die universelle Überlagerungsgruppe  $R$  von  $T$  heranzieht; sie ist der  $l$ -dimensionale euklidische Raum  $R$  mit der Vektoraddition als Gruppenoperation; die euklidische Metrik in  $R$  ist durch die orthogonalen kanonischen Koordinaten gegeben, die wir auf  $T$  nur in der Umgebung von  $e$  verwenden konnten, die sich aber über ganz  $R$  erstrecken lassen. Die Überlagerungsgruppen der  $U_i$  werden in  $R$  durch  $(l - 1)$ -dimensionale Ebenen dargestellt; das System dieser Ebenen ist das Stiefelsche „Diagramm“ von  $G$ . Die Spiegelungen an den Ebenen des Diagramms erzeugen eine Gruppe  $\Gamma$ , welche bei der natürlichen homomorphen Abbildung

von  $R$  auf  $T$  in die Gruppe  $\Phi$  übergeht; dies ist die diskontinuierliche Bewegungsgruppe, die Stiefel der Gruppe  $G$  zuordnet. Die Eigenschaften des Diagramms und der Gruppe  $\Gamma$ , die in [1], § 2, festgestellt werden, lassen sich leicht aus unseren Sätzen I und II ableiten.

Umgekehrt sind unsere Sätze in den Ergebnissen der Arbeit von Stiefel enthalten.

Ein weiterer Satz aus der Arbeit von Stiefel ([1], Satz 18) besagt, daß eine einfach zusammenhängende geschlossene Gruppe  $G$  durch ihre Gruppe  $\Phi$  — diese nicht als abstrakte Gruppe, sondern als Automorphismengruppen eines Toroids aufgefaßt — vollständig bestimmt ist. Die Aufgabe, auch diesen Satz sowie ähnliche Sätze, die in [1], § 4, formuliert sind, unter möglichster Vermeidung der infinitesimalen Theorie durch globale geometrische Betrachtungen zu beweisen oder wenigstens die jetzt bekannten Beweise durch derartige Betrachtungen zu vereinfachen, ist noch offen.

(Eingegangen den 6. April 1942.)