**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 14 (1941-1942)

**Artikel:** Einseitige Polyeder nach Boy.
**Autor:** Merz, K. / Humbert, Pierre
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-14300

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 12.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# Einseitige Polyeder nach Boy

I. TEIL

## Einseitiges Hexadekaeder

Von K. Merz, Chur

Als Modell einer abstrakten Fläche dient ein im dreidimensionalen euklidischen Raum gelegenes Bild der Fläche, das durch eine eindeutige stetige Abbildung geliefert wird. Dabei dürfen auch Durchdringungen stattfinden, auf denen dann einem Punkte des Modells zwei Punkte der Fläche entsprechen. Das Heptaeder ist ein Modell der projektiven Ebene. Es besitzt an den durch den dreifachen Punkt O, nach Abb. 1, gehenden

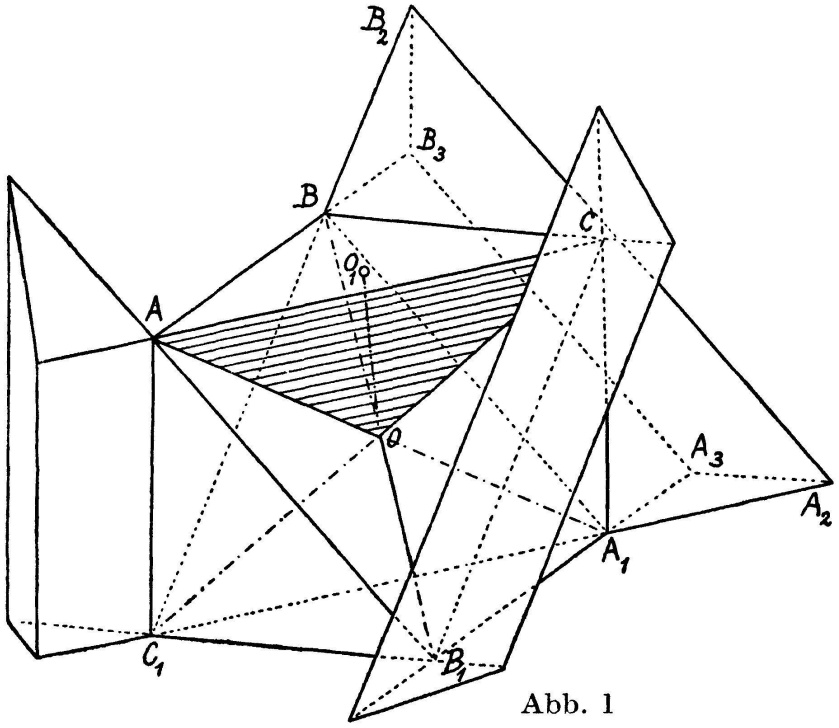


Abb. 1

Doppelstrecken $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ sechs Endpunkte. Im folgenden wird das Heptaeder so abgeändert, daß ein Modell der projektiven Ebene entsteht, in welchem keine freien Endpunkte von Doppelstrecken auftreten.

Um diese Endpunkte zu vermeiden, hat man sie zu je zweien miteinander zu verbinden, so daß drei Dreiecke entstehen $OAC_1$, $OCB_1$, $OBA_1$, welche den drei Schleifen der Doppelkurve der Boyschen Fläche[1]) entsprechen. Damit müssen an dem gesuchten Polyeder sechs Doppelstrecken bestehen, nämlich die drei Achsen des ursprünglichen Oktaeders und noch drei zueinander windschiefe Kanten. Die beiden an diesen Kanten $AC_1$, $BA_1$, $CB_1$ je zusammenstoßenden Flächen des Heptaeders

[1]) *Boy W.*, Gött. Nachr. Math. phys. Kl. 1901, Heft 1, S. 20. Math. Ann. 57, 1903, S. 151.
*Hilbert D.*, Anschauliche Geometrie, S. 280. Berlin 1932.

sind zu verlängern, wie $C_1A_1B$ bis $A_2B_2$ und $ABA_1B_1$ bis $A_3B_3$, und es sind damit drei neue Scheitelzellen am Heptaeder anzufügen. Dazu sind zu verwenden die drei an eine Lücke in $A_1B_1C_1$ anstoßenden Dreiecke des Heptaeders und die drei Quadrate seiner Achsenschnitte. Mit diesen drei Paar verlängerten Flächen sind die drei Zellen gebildet, die hier prismatisch angenommen sind, wie $A_1A_2A_3\,BB_2B_3$, wozu je drei neue Flächen verwendet werden, ein Trapez und zwei Dreiecke. Zu den 7 Flächen des Heptaeders treten also 9 neue Flächen, so daß ein 16Flach

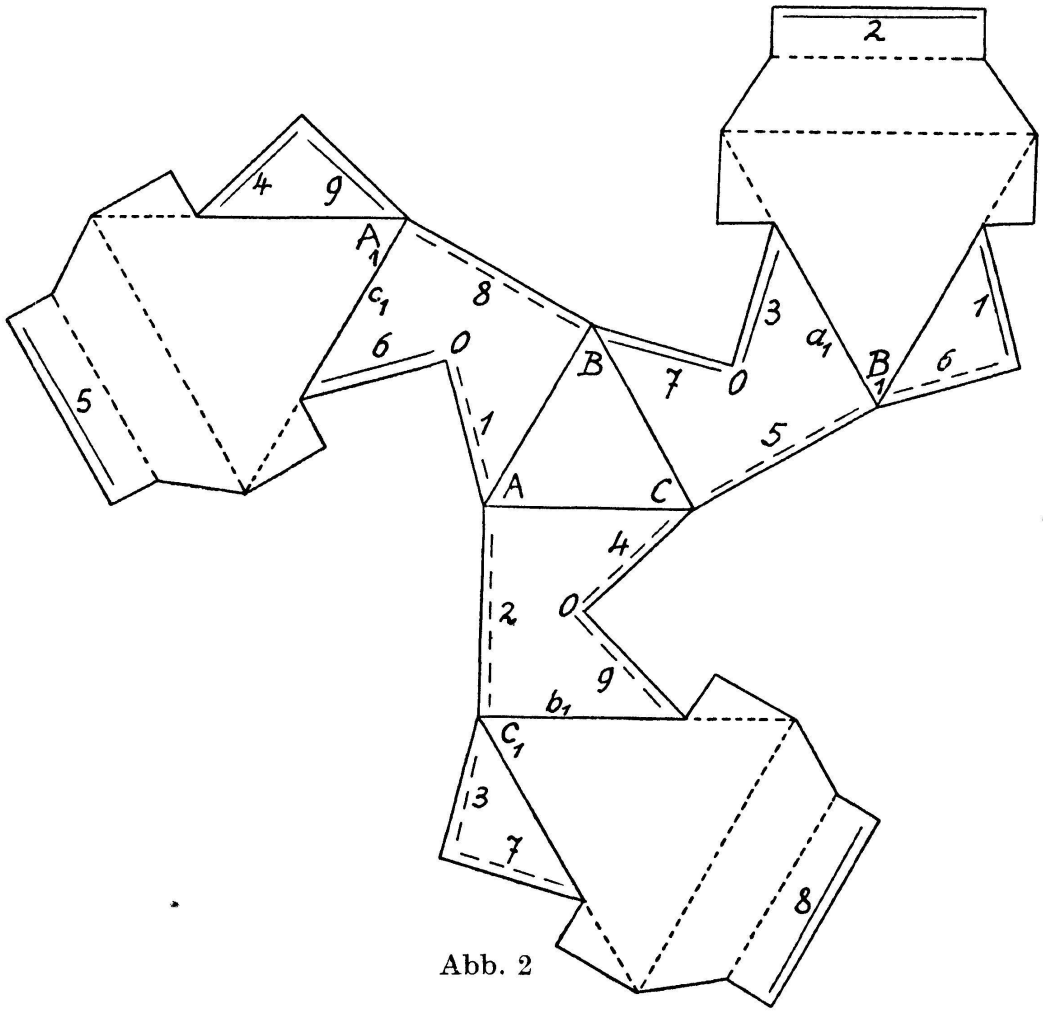


Abb. 2

entsteht: $f = 16$, $e = 18$, $k = 33$, also $c = 1$ oder $h = 2$, als eindeutige stetige Abbildung der projektiven Ebene.

Das Netz Abb. 2 dieses 16Flachs wird erhalten durch Erweiterung des Netzes[2]) mit den sechs halben Doppelstrecken des Heptaeders. An die in Abb. 1 oberste Fläche $ABC$ sind die Quadrate der Achsenschnitte mit einem Viertelausschnitt angesetzt und daran weiter die drei verlängerten

[2]) Commentarii Mathematici Helvetici v. 13, p. 53, Abb. 7, 1940.
*Karl Merz*, Vielflache aus Scheitelzellen und Hohlzellen, S. 91, Chur 1939. Das Heptaeder wurde zuerst von *C. Reinhard* 1885 in den Leipziger Berichten S. 108 beschrieben, im Anschluß an einseitige Polyeder von *Möbius*.

Dreiecke mit den Trapezen und den Rechtecken, als Verlängerungen der Quadrate. An diesen Rechtecken liegen die Wendestrecken 2, 5, 8, welche in die neuen Doppelstrecken fallen. Die Dreiviertelsquadrate sind nach unten zu klappen, bis die drei $O$ zusammenfallen, und die anstoßenden Flächen ebenso weiter, worauf dann um die punktierten Kanten zurückzuklappen ist. Die Wendestrecken 1 bis 9 schließen sich je aneinander mit Oberseite $o$ des Netzes an dessen Unterseite $u$, in dem Schleifenzug $OAC_1OCB_1OBA_1O$.

Die entstehenden drei angesetzten Prismenzellen zeigen $u$ wie auch die in 2, 5, 8 an sie anstoßenden Dreiecke als Quadratviertel, die zu den Ausschnitten in Scheitellage sind. Die Oberseite $o$ des Netzes zeigt sich an den vier Dreiecken des Heptaeders und an neun Quadratvierteln. In Abb. 1 liegt das 16flach auf dem Kantendreiecke $A_1B_1C_1$, von dem aus nach $O$ eine Lücke eindringt. Die Grundflächen der Prismen wie $A_1A_2A_3$ liegen in der Ebene von $A_1B_1C_1$. Außer der Grundlücke bestehen

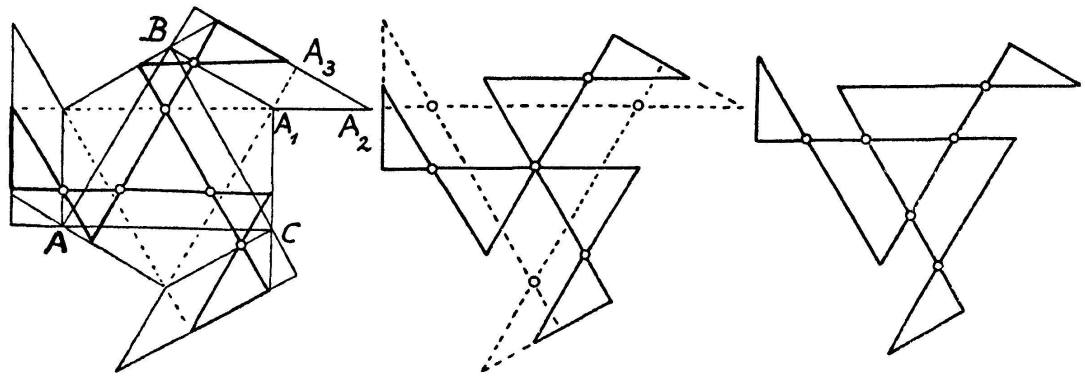


Abb. 3 Abb. 4 Abb. 5

noch die drei seitlichen Lücken, in die hinein von den Doppelstrecken als Prismenkanten aus die Dreiecke $OCB_1$, $OBA_1$, $OAC_1$ sich ausdehnen, die $u$ zeigen wie die Prismen. Das 16Flach hat eine dreifache Symmetrieachse in $OO_1$. Das hier verwendete Netz hat die besondere Eigenschaft, daß alle Wendestrecken 1 bis 9 nach der Aufklappung zu den sechs Doppelstrecken des 16Flachs werden, so daß keine Kanten entstehen, an denen $o$ und $u$ zusammenstoßen. Werden die Verlängerungen der sechs Paar Flächen des Heptaeders groß genommen, so werden die drei Prismen zum Hauptteil des 16Flachs und das zwischen ihnen liegende Heptaeder wird zur Durchdringung von sechs verlängerten Seitenflächen der Prismen, zu denen noch die Deckfläche des Heptaeders einzufügen ist als oberer Abschluß.

In den folgenden Abbildungen sind geschlossene Streckenzüge gezeichnet, welche durch horizontale Ebenen aus dem 16Flach geschnitten werden. Abb. 3 zeigt den Schnitt im obern Viertel als Neuneck mit 6 Doppel-

punkten. Im Mittelschnitt Abb. 4 vereinigen sich die innern drei Doppelpunkte zum dreifachen Punkt. Der Schnitt Abb. 5 im untern Viertel zeigt wieder 6 Doppelpunkte. Der unterste Schnitt ist punktiert in Abb. 4, er hat nur noch drei Doppelpunkte, in denen je ein innerer und äußerer Doppelpunkt sich vereinigt haben. Diese Schnittkurven zeigen, daß sie und damit auch die Fläche dem 6. Grad entsprechen. Die obersten Schnitte arten in drei getrennte Dreiecke aus und schließlich in drei Punkte.

(Eingegangen den 10. Januar 1941.)

## II. TEIL

# Polyèdre sans singularités topologiques homéomorphe au plan projectif dans l'espace à 3 dimensions

Par Pierre Humbert, Zurich

Un problème posé par Hilbert consiste à trouver une surface sans singularités topologiques homéomorphe au plan projectif. Comme il est manifestement impossible, en vertu du fait que le plan projectif n'a qu'un seul côté, d'obtenir une telle surface sans recoupements, il faudra entendre la notion de singularité topologique dans un sens un peu plus large que le sens ordinaire. On dira qu'une surface fermée abstraite $\mathfrak{A}$ topologiquement régulière, est représentée sur une surface $\mathfrak{L}$ de l'espace $R_3$ *sans singularités*, s'il existe une correspondance bicontinue entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{L}$ univoque dans le sens de $\mathfrak{A}$ vers $\mathfrak{L}$ mais non, nécessairement, dans l'autre sens, vérifiant la condition suivante:

„Si $A$ est un point de $\mathfrak{A}$, $B$ le point correspondant sur $\mathfrak{L}$, il existe un voisinage $V(A)$ de $A$ représenté d'une façon bicontinue et biunivoque sur un voisinage de $B$."

Ainsi il pourra y avoir sur $\mathfrak{L}$ des recoupements, mais les feuillets qui se coupent doivent toujours être *séparés*. Pour parler d'une façon plus intuitive mais moins précise, on dira que $\mathfrak{L}$ représente $\mathfrak{A}$ dans $R_3$ sans singularités topologiques s'il existe entre ces 2 surfaces une correspondance qui est biunivoque en petit et bicontinue en grand. Dans ces conditions il est possible de résoudre le problème de Hilbert. Une première solution a été donnée par Boy dans sa thèse publiée en 1901 dont on trouvera un résumé dans les Math. Annalen 57 (1903)[1]. Sa solution

[1]) Cf. aussi *Hilbert und Cohn-Vossen*, Anschauliche Geometrie (Berlin 1932), p. 280—283.

consiste à employer la formule de géométrie différentielle (formule de Kronecker-Dyck)

$$m - n = e$$

où $m$, $n$ représentent le nombre des points à plans tangents horizontaux, $m$ étant le nombre des points où la surface présente soit un maximum soit un minimum (points elliptiques), $n$ étant le nombre de ceux où la surface est en forme de selle (points hyperboliques), et où $e$ est la caractéristique d'Euler de la surface. Boy conçoit sa surface coupée par des plans horizontaux et se demande comment les courbes d'intersections varient quand on passe par un point elliptique ou un point selle. Il réalisa ainsi 2 modèles de surfaces, l'un pour lequel $m = 2$, $n = 1$, l'autre pour lequel $m = 4$, $n = 3$. Nous n'entrerons pas dans plus de détails sur la méthode de Boy; nous remarquerons que la solution pour laquelle $m = 4$, $n = 3$ admet un axe de symétrie d'ordre 3.

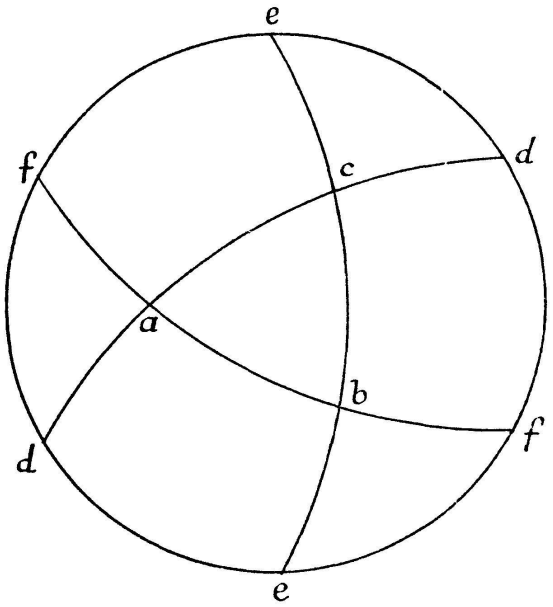

Fig. 1

On peut aborder le problème autrement. Considérons un octaèdre régulier et faisons lui subir les transformations suivantes: menons les trois plans diagonaux passant par le centre, qui sont trois carrés, et supprimons la moitié des 8 faces triangulaires de sorte que chacune des arêtes de l'octaèdre ne limite qu'une des deux faces triangulaires qu'il limitait précédemment. On obtient de cette façon un nouveau polyèdre fermé, non convexe et qui n'a qu'un seul côté, comme on peut le vérifier aisément. Ce polyèdre a 1 face de moins que l'octaèdre régulier, c'est un heptaèdre[2]). Il a le même nombre de sommets et d'arêtes que l'octaèdre.

[2]) L'Heptaèdre apparaît comme transformation du second ordre de la surface de *Steiner* dans un travail de M. *Merz*, Parallelflächen und Centralfläche ... (Chur 1914). Cf. aussi Hilbert et Cohn-Vossen, l. c., p. 266—268.

Sa caractéristique d'Euler est 1, il est donc homéomorphe au plan projectif. Mais il a 6 points topologiquement *singuliers*, ainsi que cela ressort de plus haut: ce sont ses 6 sommets. Pour le voir, on peut utiliser la représentation suivante du plan projectif: un cercle dans lequel on identifie 2 points diamétralement opposés sur la circonférence. Divisons la circonférence en 6 parties que nous joignons par des arcs de cercles régulièrement ainsi que le montre la figure 1. On peut considérer cette figure comme topologiquement équivalente au plan projectif divisé en 7 domaines dont 3 carrés et 4 triangles par 4 droites formant un quadrilatère complet. C'est en réunissant les parties équivalentes de la circonférence sur la figure 1 que l'on obtient l'heptaèdre. Cela ne peut pas se faire sans qu'il y ait des pénétrations de faces les unes dans les autres; ce sont, comme dans l'heptaèdre où les 3 carrés diagonaux se coupent, les faces quadrangulaires qui se croisent suivant leurs diagonales. Ces diagonales sont des lieux de points où la représentation du plan projectif sur le

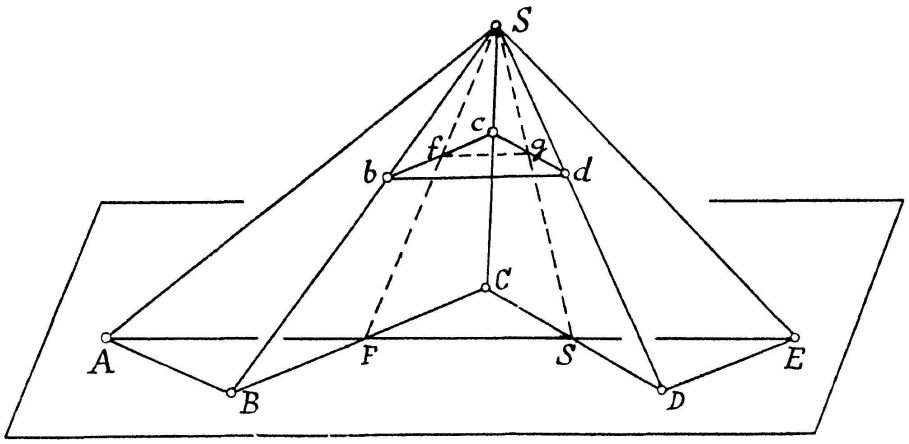


Fig. 2

polyèdre n'est pas biunivoque; mais les points de ces diagonales sont tous topologiquement réguliers sauf les sommets, comme on peut s'en assurer. Le problème se pose alors de transformer le polyèdre de façon à ce que tous les points *sans exception* soient réguliers.

On fait d'abord la transformation suivante proposée par M. Merz[3]): on prend 3 arêtes de l'octaèdre dont les extrémités constituent les 6 sommets de l'octaèdre, par exemple les arêtes qui correspondent aux arcs *ad*, *bf*, *ce*, dans la figure 1; chacune de ces arêtes limite un triangle et un quadrilatère, que l'on prolonge à travers cette arête; on prend un point sur le prolongement du triangle et un point sur le prolongement du quadrilatère; ces deux points déterminent, avec les 2 extrémités de

[3]) Cette construction nous a été communiquée par M. *Merz*. Elle fournit une petite simplification de la construction d'un polyèdre à 16 faces que M. *Merz* a publiée dans la première partie de ce travail.

l'arête un tétraèdre extérieurement à l'octaèdre, ayant l'arête considérée comme arête. Cette arête, dans le polyèdre ainsi obtenu, ne compte plus comme telle, mais comme nouvelle ligne de croisement de 2 faces. Ce polyèdre a 13 faces, 12 sommets et 24 arêtes.

Ce nouveau modèle du plan projectif admet de nouveau les 6 sommets de l'octaèdre primitif comme points singuliers. Examinons de plus près ces sommets; ils sont tous semblables, il suffit d'en considérer un seul. En un de ces sommets $S$, l'angle polyèdre qui limite le polyèdre a la forme représentée dans la figure 2. La base est un pentagone $ABCDEA$ à 2 points de croisements $F$, $G$ et $SF$, $SG$ sont deux arêtes de croisements. Pour rendre le polyèdre topologiquement régulier, on peut procéder en chacun des 6 sommets $S$ de la façon suivante: Prenons sur $SC$ un point $c$ que nous joignons à 2 points $b$ et $d$ pris sur $SB$ et $SD$ respectivement (fig. 2). Les droites $cb$ et $cd$ coupent les arêtes de croisement $SF$ et $SG$ en $f$ et $g$. Supprimons les triangles $Sbc$ et $Scd$ et remplaçons-les par les triangles $cbd$ et $bdS$. On obtient ainsi, cette opération étant faite pour chacun des 6 sommets, un nouveau polyèdre ayant 25 faces, 30 sommets et 54 arêtes, qui est homéomorphe au plan projectif et dont les singularités topologiques ont disparu. En effet la ligne de croisement des faces ne passe plus par $S$; à chacun des points $P$ de cette ligne $FfgG$ correspond sur le plan projectif un point tel qu'un de ses voisinages soit en correspondance bicontinue et biunivoque avec un voisinage de $P$.

En simplifiant encore quelque peu cette surface on peut faire en sorte qu'elle n'ait que 16 faces, 24 sommets et 39 arêtes. On obtient ainsi une surface qui présente une symétrie d'ordre 3 autour d'un axe et que l'on peut considérer comme une représentation polyédrale de la 2e surface de Boy.

(Reçu le 20 septembre 1941)