**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici

**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft

**Band:** 14 (1941-1942)

**Artikel:** Zur Homologietheorie der Abbildungen und Faserungen von Mannigfaltigkeiten.

**Autor:** Gysin, Werner

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-14298

# Zur Homologietheorie der Abbildungen und Faserungen von Mannigfaltigkeiten

Von WERNER GYSIN, Zürich

## Einleitung

Mit der vorliegenden Arbeit soll ein Beitrag geliefert werden zur Homologietheorie der Faserabbildungen von Komplexen. Unter einer solchen verstehen wir eine stetige Abbildung $f$ eines Komplexes $K$ auf einen (simplizialen) Komplex $\mathbf{k}$, welche folgende Bedingungen erfüllt:

1. Das Urbild eines jeden Punktes $\pi$ aus $\mathbf{k}$ ist einer von $\pi$ unabhängigen Punktmenge $S$ von $K$, der Faser, homöomorph.
2. Das Urbild eines jeden Simplexes $|\xi|$ von $\mathbf{k}$ ist homöomorph dem topologischen Produkte $|\xi \times S|$, und zwar so, daß hierin die Urbildmenge eines beliebigen Punktes $\pi$ aus $|\xi|$ das Produkt $|\pi \times S|$ ist.

$K$ heißt dann gefasert; $S$ ist die Faser; $\mathbf{k}$ ist der Faserraum[1]) [2]) *).

Solche Faserungen treten z. B. auf bei der Zerlegung einer Gruppenmannigfaltigkeit $G$ in die Nebengruppen nach einer Untergruppe $U$ von $G$ [3]). Die von H. Whitney behandelten Sphere-spaces[4]), neuerdings Sphere-bundles[5]) genannt, sind in Sphären gefaserte Komplexe. Ein Beispiel dieser Art ist der Raum der gerichteten Linienelemente auf einer Mannigfaltigkeit $\Lambda$.

Die in der vorliegenden Arbeit betrachteten Faserungen sind nicht so allgemein, wie die soeben definierten; wir werden ihnen zweierlei Beschränkungen auferlegen:

1. Der gefaserte Komplex $K$ und der Faserraum $\mathbf{k}$ sind geschlossene, orientierbare Mannigfaltigkeiten $L$ und $\Lambda$.
2. Die Faser $S$ ist eine (Homologie-) Sphäre.

Die erste Einschränkung ist hauptsächlich in der gewählten Darstellung begründet. Wenn auch einige der hergeleiteten Resultate auf den Mannigfaltigkeitseigenschaften von $L$ und $\Lambda$ beruhen, so lassen sich doch die für die Fasertheorie wesentlichen Sätze auch auf den Fall allgemeiner Komplexe übertragen. Während man aber in Mannigfaltigkeiten alle Homologiebeziehungen im Rahmen der klassischen Homologie- und Schnittheorie ausdrücken kann, ist man bei Zugrundelegung allgemeiner

*) Solche Vermerke weisen auf das Literaturverzeichnis am Schlusse der Arbeit.

Komplexe gezwungen, sämtliche multiplikativen Relationen durch Begriffe der neuern Cohomologie- und Produkttheorie[6]) [7]) zu beschreiben. Diese neue Produkttheorie liefert für Mannigfaltigkeiten keine neuen Resultate; auch fehlt ihr die geometrisch so einfache Bedeutung der Schnittheorie. Hingegen ist ihr formaler Apparat leichter zu handhaben, als der Prozeß der Schnittbildung. Aus diesem Grunde werden wir uns oft der neuern Theorie bedienen, um Beziehungen herzuleiten, die klassische Theorie aber heranziehen, um diesen Beziehungen direkte geometrische Bedeutung zu verleihen. Deshalb werden wir uns in unsern Untersuchungen auf gefaserte *Mannigfaltigkeiten* $L$ beschränken. Die Forderung der Orientierbarkeit von $L$ kann fallen gelassen werden, wenn man mod 2 rechnet. Zur Vereinheitlichung der Darstellung ist dieser Fall, obwohl auch er von Interesse ist, überall weggelassen worden.

Die zweite Einschränkung, „$S$ ist eine (Homologie-)Sphäre", ist sachlich bedingt. Die eigentlichen Sätze über Faserungen (Kap. III) stützen sich wesentlich auf diese Voraussetzung. Es ist unbekannt, wieweit diese Sätze auch auf allgemeinere Faserungen übertragbar sind. Die betrachteten Mannigfaltigkeiten $L$ sind also Sphere-spaces im Sinne von Whitney[4]) [5]) [14]), doch dürften sich dessen Untersuchungen kaum mit den vorliegenden berühren. Da es sich in dieser Arbeit um reine Homologiebetrachtungen handelt, muß $S$ nicht unbedingt eine Sphäre, sondern darf eine Homologiesphäre sein. Der Fall einer Faserung in 0-dimensionale Sphären, also einer zweiblätterigen Überlagerung, wird im folgenden nicht betrachtet. Doch läßt er sich leicht der allgemeinen Theorie unterordnen, wenn man mod 2 rechnet.

Die hier angewandte Methode zur Untersuchung der Faserungen läßt sich wie folgt skizzieren: Der die Faserung erzeugenden Abbildung $f$ wird die Umkehrungsabbildung $\varphi$ zur Seite gestellt, welche einem Punkte $\pi$ des Faserraumes $\Lambda$ die Faser $S^d = \varphi\pi$ aus $L$ zuordnet, welche aus allen Punkten $p$ besteht für die $fp = \pi$ gilt. $\varphi$ erhöht die Dimension um $d$. Das $\varphi$-Bild eines Zyklus $\zeta$ aus $\Lambda$ ist ein Zyklus $\varphi\zeta = z$ in $L$. $z$ berande einen Komplex $C$ in $L$. Dann bilden wir $fC = Z$. Weil der Rand von $C$, $\varphi\zeta$, bei der Abbildung $f$ degeneriert, ist $Z$ ein Zyklus. Wir nennen ihn $h\zeta$.

Die Beschreibung des Zusammenhanges zwischen $\zeta$ und $h\zeta$ bildet den Hauptinhalt dieser Arbeit. Sie gelingt im Falle von Faserungen in Sphären und liefert interessante geometrische Resultate, welche in § 15 (Kap. IV) zusammengestellt und so formuliert sind, daß ihr Inhalt ohne Kenntnis der vorangehenden Kapitel verstanden werden kann (Sätze 32—43). Dort werden wir auch einige Beispiele zu den allgemeinen Sätzen besprechen. Daran anschließend werden in § 16, als wichtige Anwendung der allgemeinen Theorie, die Homologieeigenschaften des Linienelementraumes einer Mannigfaltigkeit untersucht. Auch die dort formulierten Resultate sind ohne weitere Vorkenntnisse verständlich.

Eine systematische Untersuchung der Faserabbildungen zeigt, daß viele ihrer Eigenschaften allgemeinerer Natur sind, daß sie nämlich für beliebige stetige dimensionserniedrigende Abbildungen gelten. Vor den eigentlichen Sätzen über die Sphärenfaserungen (Kap. III) werden daher (in Kap. II) stetige dimensionserniedrigende Abbildungen einer Mannigfaltigkeit $L$ in eine solche $\Lambda$ untersucht. Hierbei werden wir in unserer Darstellung weitgehend ausnützen, daß $L$ und $\Lambda$ Mannigfaltigkeiten sind, obschon dies für die Sache selbst nicht notwendig zu sein scheint.

Auch für solche dimensionserniedrigende Abbildungen $f$ läßt sich die Umkehrungsabbildung $\varphi$ definieren[8]) [12]) [13]). Gleich wie bei Faserungen läßt sich mit $f$ und $\varphi$ die vorn skizzierte Abbildung $h$ konstruieren. Es zeigt sich, daß $h$ zum Teil dieselben Eigenschaften besitzt wie bei Sphärenfaserungen. Vor allem ergibt sich aber hier die Invarianz von $h$ in der Abbildungsklasse von $f$, welche gestattet unter Umständen Aussagen über die Wesentlichkeit, resp. Nullhomotopie von $f$ zu machen. So folgt aus der Existenz zweier Zyklen $\zeta^p$ und $\zeta^q$ in $\Lambda$, deren $\varphi$-Bilder miteinander verschlungen sind, für die also gilt $\mathfrak{v}(\varphi\zeta^p, \varphi\zeta^q) = \gamma \neq 0$: $f$ ist nicht nullhomotop. Insbesondere gilt: Ist hierin $\zeta^p$ 0-dimensional, z. B. ein Punkt aus $\Lambda$, so ist $f$ wesentlich; denn dann gilt, wie wir zeigen werden: 1. Es ist $h\zeta^q = \gamma\Lambda \neq 0$. 2. $\gamma$ ist invariant gegenüber stetiger Abänderung von $f$.

Die Theorie dieser Abbildungsinvarianten $\gamma$ und ihre Deutung als Verschlingungszahl stammt (für den Fall, daß sowohl $\zeta^p$, als auch $\zeta^q$ nulldimensional sind) von H. Hopf[9]). Mit dieser Methode hat er die Existenz wesentlicher Abbildungen der Sphäre $S^{4k-1}$ auf die Sphäre $S^{2k}$ bewiesen. Der in der vorliegenden Arbeit eingeführte $H$-Prozeß bei dimensionserniedrigenden Abbildungen von Mannigfaltigkeiten (Kap. II), auf dessen Eigenschaften alle hergeleiteten Resultate beruhen, ist eine Verallgemeinerung dieser $\gamma$-Theorie; er schließt dieselbe als Spezialfall in sich. Wir werden an geeigneter Stelle darauf hinweisen.

Zur Untersuchung der dimensionserniedrigenden Abbildungen, insbesondere zur Definition der Umkehrungsabbildung $\varphi$ und zur Herleitung von Sätzen multiplikativer Natur ist es von Nutzen, sich der neuern Produkttheorie zu bedienen. In Kap. I werden wir daher einen Bericht über dieselbe geben, in welchem alle später gebrauchten Begriffe und Relationen kurz entwickelt werden. Diesem Bericht liegt eine Arbeit von H. Whitney[7]) zugrunde, in welcher die Produkttheorie in großer Allgemeinheit zusammenfassend begründet wird. Wir werden uns aber auf den Fall simplizialer Komplexe beschränken; die Darstellung ist zum Teil auch einer Arbeit von J. W. Alexander[6]), zum Teil einer solchen von H. Freudenthal[10]) entnommen.

In dieser Arbeit werden Benennungen und Sätze aus „*Alexandroff-Hopf*, Topologie I (Berlin 1935)" als bekannt vorausgesetzt; wo dies nötig erscheint, wird darauf verwiesen; das Werk wird mit *A H* zitiert.

# KAPITEL I

## Bericht über die Produkttheorie

### § 1. Duale Homomorphismen

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{R}$ den Ring der rationalen Zahlen, mit $\mathfrak{G}$ den Ring der ganzen rationalen Zahlen und, für ganzes $m \geqslant 2$, mit $\mathfrak{G}_m$ den Ring der ganzen rationalen Zahlen mod m. Unter $\mathfrak{J}$ verstehen wir im folgenden stets einen dieser Ringe. $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ seien „Moduln über $\mathfrak{J}$" mit den endlichen Basen $x_1, x_2, \ldots, x_v$ resp. $x'_1, x'_2, \ldots, x'_w$; d. h. $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ seien die Gruppen der Linearformen $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_vx_v$ resp. $a_1x'_1 + a_2x'_2 + \cdots + a_wx'_w$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{J}$.

$f$ sei eine homomorphe Abbildung des Moduls $\mathfrak{M}$ in den Modul $\mathfrak{M}'$. Dann bestehen $v$ Gleichungen

$$fx_i = \sum_k f_{ik}\, x'_k \,, \qquad f_{ik} \subset \mathfrak{J};\ i = 1, 2, \ldots, v \,. \tag{1.1}$$

Durch $f$ wird also eine Matrix $F = (f_{ik})$ von $v$ Zeilen und $w$ Spalten definiert. Man beachte, daß $F$ von den zugrunde liegenden Basen $x_1, \ldots, x_v$ und $x'_1, \ldots, x'_w$ abhängt. Diese seien daher fest gewählt.

Liegt umgekehrt eine solche Matrix $F$ vor, so werden durch sie $v$ Gleichungen (1.1) und somit eine wohlbestimmte homomorphe Abbildung $f$ von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{M}'$ erzeugt. Die zu $F$ transponierte Matrix $F'$ gibt ebenfalls Anlaß zu einem Homomorphismus, nämlich zu einem solchen ($f'$) des Moduls $\mathfrak{M}'$ in den Modul $\mathfrak{M}$. Er wird definiert durch die Gleichungen

$$f'x'_k = \sum_i f_{ik}\, x_i \,, \qquad k = 1, 2, \ldots, w \,.$$

*Definition:* Eine homomorphe Abbildung $f$ des Moduls $\mathfrak{M}$ in den Modul $\mathfrak{M}'$ und eine solche $f'$ von $\mathfrak{M}'$ in $\mathfrak{M}$ heißen *dual*, wenn ihnen unter Zugrundelegung derselben Basen in $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ transponierte Matrizen entsprechen. Wir bezeichnen die zu einem gegebenen Homomorphismus $f$ duale Abbildung immer mit $f'$.

Nach Definition ist $f'' = f$. Sind $f$ und $g$ homomorphe Abbildungen von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{M}'$, so ist $f + g$ ebenfalls eine solche, und es gilt, wie man sofort sieht, $(f + g)' = f' + g'$. Es seien $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ Moduln mit fest gewählten Basen. Bildet $f$ die Gruppe $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{M}'$, $g$ die Gruppe $\mathfrak{M}'$ in $\mathfrak{M}''$ ab und sind $F$ und $G$ die zugehörigen Matrizen, so bildet $h = gf$ die Gruppe $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{M}''$ ab, und $F \cdot G$ ist die zugehörige Matrix. Die zu $h$ duale Abbildung $h'$ hat daher die Matrix $(F \cdot G)' = G' \cdot F'$. Dies bedeutet aber: Es ist $h' = f'g'$, d. h.

$$(gf)' = f'g' . \tag{1.2}$$

Der Begriff der dualen Abbildung spielt für uns eine wesentliche Rolle. In seinen nachfolgenden Anwendungen werden $\mathfrak{M}$ die Gruppe $\mathfrak{L}^p\big(= \mathfrak{L}^p(K)\big)$ der $p$-dimensionalen algebraischen Komplexe mit Koeffizienten aus $\mathfrak{J}$ in einem endlichen Zellenkomplex $K$, $\mathfrak{M}'$ die Gruppe $\mathfrak{L}'^q\big(= \mathfrak{L}'^q(K')\big)$ der $q$-dimensionalen algebraischen Komplexe mit Koeffizienten aus $\mathfrak{J}$ in einem endlichen Zellenkomplex $K'$ sein. Als feste Basen wählen wir in $\mathfrak{L}^p$ die beliebig, aber fest orientierten $p$-dimensionalen Zellen $x_i$ von $K$, in $\mathfrak{L}'^q$ die beliebig, aber fest orientierten $q$-dimensionalen Zellen $x'_k$ von $K'$. Diese Abmachung, die durch alle Kapitel hindurch gültig bleibt, werden wir später nicht wieder besonders erwähnen, ebensowenig die Endlichkeit aller zu betrachtenden Komplexe.

$A = \Sigma a_i x_i$ und $B = \Sigma b_i x_i$ seien zwei Komplexe aus $\mathfrak{L}^p$. Wir definieren ihr skalares Produkt durch die Formel

$$A \cdot B = (\Sigma a_i x_i) \cdot (\Sigma b_i x_i) = \Sigma a_i b_i . \tag{1.3}$$

(Gleichungen sind stets als solche im betreffenden Koeffizientenbereich $\mathfrak{J}$ aufzufassen.)

*Hilfssatz 1:* Ist $f$ eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{L}^p$ in $\mathfrak{L}'^q$, $g$ eine solche von $\mathfrak{L}'^q$ in $\mathfrak{L}^p$, so gilt dann und nur dann

$$A \cdot gB = fA \cdot B \tag{1.4}$$

für alle Komplexe $A \subset \mathfrak{L}^p$ und alle $B \subset \mathfrak{L}'^q$, wenn $f$ und $g$ dual sind. Denn es ist

$$\begin{aligned} x_i \cdot g x'_k &= x_i \cdot \Sigma g_{kj}\, x_j &&= g_{ki} \, , \\ f x_i \cdot x'_k &= \Sigma f_{ij}\, x'_j\, x'_k &&= f_{ik} \, . \end{aligned}$$

Soll nun für alle $x_i$ und alle $x'_k$ gelten:

$$x_i \cdot g x'_k = f x_i \cdot x'_k ,$$

so müssen, wegen $g_{ki} = f_{ik}$, $f$ und $g$ dual sein. Diese Bedingung ist offenbar auch hinreichend.

## § 2. Rand und Corand

Wir machen eine erste Anwendung der soeben eingeführten Begriffe: Ist $K$ ein $n$-dimensionaler Zellenkomplex, $A \subset \mathfrak{L}^p(K)$, so ist dessen *Rand* $rA$ ein (algebraischer) Komplex aus $\mathfrak{L}^{p-1}(K)$. Die Randbildung $r$ ist jene homomorphe Abbildung von $\mathfrak{L}^p$ in $\mathfrak{L}^{p-1}$, welche durch die folgenden Gleichungen definiert ist:

$$r x_i^p = \sum_k \eta_{ik}^p \, x_k^{p-1}, \qquad r x_i^0 = 0 \ .$$

Hierin bedeutet $\eta_{ik}^p$ den Inzidenzkoeffizienten von $x_i^p$ und $x_k^{p-1}$. Der zu $r$ duale Homomorphismus wird folglich definiert durch die Gleichungen

$$r' x_k^{p-1} = \sum \eta_{ik}^p \, x_i^p , \qquad r' x_k^n = 0 \, .$$

Ist $B$ ein Komplex aus $\mathfrak{L}^{p-1}$, so ist daher $r'B$ ein Komplex in $\mathfrak{L}^p$. Er heißt der *Corand* von $B$.

Es seien $A \subset \mathfrak{L}^p$, $B \subset \mathfrak{L}^{p-1}$. Auf Grund von Hilfssatz 1 erfüllt das durch Formel (1.3) erklärte Skalarprodukt die wichtige Relation

$$rA \cdot B = A \cdot r'B \, . \tag{2.1}$$

Wir erinnern an folgende Definitionen: der algebraische Komplex $A$ heißt Zyklus, wenn $rA = 0$ ist. Wir nennen zwei Zyklen $A$ und $B$ homolog, wenn $A - B$ Rand eines Komplexes $C$ ist. Wir schreiben dann $A \sim B$ oder $A - B \sim 0$. Analog definieren wir: der algebraische Komplex $A$ heißt Cozyklus, wenn $r'A = 0$ ist. Wir nennen zwei Cozyklen $A$ und $B$ cohomolog, wenn $A - B$ Corand eines Komplexes $C$ ist. Wir schreiben dann $A \backsim B$ oder $A - B \backsim 0$.

Bekanntlich gilt stets $rrA = 0$, d. h. jeder Rand ist Zyklus. Folglich ist auch der zu $rr$ duale Homomorphismus $(rr)' = r'r'$ die Nullabbildung, d. h. es gilt $r'r'A = 0$: Jeder Corand ist Cozyklus. Man kann daher nicht nur Homologiegruppen $\mathfrak{B}^p$ als Faktorgruppen der Zyklengruppen $\mathfrak{Z}^p$ nach den Rändergruppen $\mathfrak{H}^p$ definieren, sondern auch Cohomologiegruppen

$\mathfrak{B}'^p$ als Faktorgruppen der Cozyklengruppen $\mathfrak{Z}'^p$ nach den Corändergruppen $\mathfrak{H}'^p$, also

$$\mathfrak{B}^p = \mathfrak{Z}^p/\mathfrak{H}^p, \qquad \mathfrak{B}'^p = \mathfrak{Z}'^p/\mathfrak{H}'^p.$$

Die Elemente von $\mathfrak{B}^p$ und $\mathfrak{B}'^p$ sind die $p$-dimensionalen Homologie-, resp. Cohomologieklassen.

Für das Skalarprodukt von zwei $p$-dimensionalen algebraischen Komplexen $A$ und $B$ gelten folgende Sätze:

*Satz 1:* $A$ sei ein Zyklus, $B$ ein Cozyklus. Dann ist $A \cdot B = 0$, falls $A \sim 0$ oder $B \backsim 0$.

Denn ist $A = rC$, so folgt aus Formel (2.1)

$$A \cdot B = rC \cdot B = C \cdot r'B = 0.$$

Analog schließt man, falls $B \backsim 0$ ist.

*Satz 2:* Ist $A \cdot r'C^{p-1} = 0$ für alle Coränder $r'C^{p-1}$, so ist $A$ ein Zyklus. — Ist $rC^{p+1} \cdot B = 0$ für alle Ränder $rC^{p+1}$, so ist $B$ ein Cozyklus.

*Beweis:* Da nach (1.3) $C^q \cdot x^q$ der Koeffizient des Simplexes $x^q$ in $C^q$ ist, genügt es zu zeigen, daß $rA \cdot x^{p-1} = 0$ ist für alle Simplexe $x^{p-1}$ von $K$. Dies folgt aber nach (2.1) sofort aus

$$0 = A \cdot r'x^{p-1} = rA \cdot x^{p-1}.$$

Analog beweist man den zweiten Teil des Satzes.

*Satz 3:* Ist der Koeffizientenbereich $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}_m (m \geqslant 2)$ oder $= \mathfrak{R}$, und gilt $A \cdot B = 0$ für alle Cozyklen $B$, so ist $A$ ein Rand. — Ist $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}_m$ $(m \geqslant 2)$ oder $= \mathfrak{R}$, und gilt $A \cdot B = 0$ für alle Zyklen $A$, so ist $B$ ein Corand.

*Beweis:* Es sei $A \cdot B = 0$ für alle Cozyklen $B$. Es wird behauptet, daß ein Komplex $C^{p+1}$ existiert, so daß $rC^{p+1} = A = \Sigma a_i x_i$. Um dies zu zeigen, konstruieren wir einen Homomorphismus $\chi$ von $\mathfrak{L}^{p+1}$ in $\mathfrak{G}_m$, resp. $\mathfrak{R}$. Dies geschieht wie folgt: Es sei vorerst

$$\chi(r'x_i^p) = \chi(\Sigma\, \eta_{ki}^{p+1}\, x_k^{p+1}) = a_i,$$

also gleich dem Koeffizienten von $x_i^p$ in $A$, d. h. $= A \cdot x_i^p$. Für einen algebraischen Komplex $B = \Sigma b_i x_i^p$ ist demnach

$$\chi(r'B) = \Sigma b_i \chi(r' x_i^p) = \Sigma b_i a_i = A \cdot B\,,$$

also nach Voraussetzung $= 0$, falls $B$ ein Cozyklus und folglich $r'B = 0$ ist. $\chi$ ist somit ein $\mathfrak{G}_m$-, resp. $\mathfrak{R}$-Charakter der Coränderguppe $\mathfrak{H}'^{p+1}$. Er läßt sich zu einem solchen von $\mathfrak{L}^{p+1}$ erweitern; denn

1. ist $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}_m (m \geqslant 2)$, so ist $\mathfrak{L}^{p+1}$ endlich, und die Ordnung eines jeden seiner Elemente ist Teiler von $m$. Hieraus folgt unsere Behauptung nach einem bekannten Erweiterungssatz (siehe A. H., p. 592);
2. ist $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$, so ist $\mathfrak{L}^{p+1}$ direkte Summe von $\mathfrak{H}'^{p+1}$ und einer weiteren Gruppe, woraus sich ebenfalls sofort unsere Behauptung ergibt.

Im erweiterten $\mathfrak{G}_m$-, resp. $\mathfrak{R}$-Charakter sei $\chi x_k^{p+1} = c_k$. Dann wird

$$r(\sum_k c_k x_k^{p+1}) = \sum_k \sum_i c_k \eta_{ki}^{p+1} x_i^p = \sum_i (\sum_k \eta_{ki}^{p+1} \chi x_k^{p+1})\, x_i^p$$

$$= \sum_i \chi(\sum_k \eta_{ki}^{p+1} x_k^{p+1})\, x_i^p = \sum_i a_i x_i^p = \mathrm{A}\,.$$

Damit ist der erste Teil von Satz 3 bewiesen. Analog beweist man dessen zweiten Teil.

Nach Satz 1 läßt sich das skalare Produkt zwischen Homologieklassen $z$ und Cohomologieklassen $\boldsymbol{Z}$ definieren. Sein Wert wird mittels beliebiger Repräsentanten dieser Klassen, $A \subset z$ und $B \subset \boldsymbol{Z}$, berechnet. Der Satz 3 besagt hierzu, falls $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}_m (m \geqslant 2)$ ist: Zu jedem Element $z \neq 0$ aus $\mathfrak{B}^p$ gibt es ein Element $\boldsymbol{Z} \subset \mathfrak{B}'^p$, so daß $z \cdot \boldsymbol{Z} \neq 0$ ist, und zu jedem $\boldsymbol{Z} \neq 0$ aus $\mathfrak{B}'^p$ gibt es ein $z \subset \mathfrak{B}^p$, so daß $z \cdot \boldsymbol{Z} \neq 0$ ist. Beide Gruppen, $\mathfrak{B}^p$ und $\mathfrak{B}'^p$ sind überdies endlich, und die Ordnung eines jeden ihrer Elemente ist Teiler von $m$. Folglich gilt (nach A. H., p. 590) der

*Satz 4:* Es ist

$$\mathfrak{B}^p_{\mathfrak{G}_m}(\mathrm{K}) \approx \mathfrak{B}'^p_{\mathfrak{G}_m}(\mathrm{K}) \quad , \quad (m \geqslant 2)$$

*Korollar:* Hieraus folgt rein gruppentheoretisch (vgl. A. H., Kap. V, § 2—§ 4) die Isomorphie der Gruppen $\mathfrak{B}^p_{\mathfrak{R}}(K)$ und $\mathfrak{B}'^p_{\mathfrak{R}}(K)$; beide Gruppen haben somit gleichen Rang. Dies ist die $p^{\text{te}}$ Bettische Zahl des Komplexes $K$.

## § 3. Simpliziale Abbildungen und Unterteilungen

Es sei $f$ eine simpliziale Abbildung eines simplizialen Komplexes $K$ in einen Komplex $K'$. Die hierdurch erzeugte homomorphe Abbildung der Gruppe $\mathfrak{L}(K)$ in die Gruppe $\mathfrak{L}(K')$ nennen wir ebenfalls $f$. Bekanntlich erfüllt sie die Relation $rfC = frC$ für alle Komplexe $C \subset \mathfrak{L}(K)$. ($r$ bezeichnet die Randbildung in beiden Komplexen, $K$ und $K'$.) Somit gilt nach Formel (1.2) für den zu $f$ dualen Homomorphismus $f'$ die Beziehung $f'r'C' = r'f'C'$ für alle Komplexe $C' \subset \mathfrak{L}(K')$. Also erfüllen $f$ und $f'$ den *Erhaltungssatz:* $f$ erhält die Ränder, $f'$ erhält die Coränder.

Folglich bewirkt $f$ einen Homomorphismus $F$ der Homologiegruppen $\mathfrak{B}^p(K)$ in die Homologiegruppen $\mathfrak{B}^p(K')$; $f'$ erzeugt einen Homomorphismus $F'$ der Cohomologiegruppen $\mathfrak{B}'^p(K')$ in die Cohomologiegruppen $\mathfrak{B}'^p(K)$.

$K$ sei eine simpliziale Unterteilung des Simplizialkomplexes $K'$. Für einen algebraischen Komplex $C' \subset K'$ sei $C = uC'$ dessen Unterteilung in $K$. $s$ sei eine „pseudoidentische“ simpliziale Abbildung von $K$ auf $K'$; dies ist eine solche, welche Eckpunkte von $K$ nur innerhalb ihrer Trägersimplexe von $K'$ verschiebt. Es gelten dann die Gleichungen:

$$rsC = srC, \qquad C \subset K, \tag{3.1}$$

$$ruC' = urC', \qquad C' \subset K'. \tag{3.2}$$

Ferner beweist man durch Induktion nach wachsenden Dimensionen die Gleichung

$$suC' = C', \qquad C' \subset K'. \tag{3.3}$$

Daneben besteht schließlich die Relation

$$usC \sim C, \qquad \text{falls } rC = 0, C \subset K. \tag{3.4}$$

Sie ergibt sich sofort aus dem

*Hilfssatz 2:* Es gibt eine homomorphe Abbildung $t$ von $\mathfrak{L}^p(K)$ in $\mathfrak{L}^{p+1}(K)$ mit folgenden Eigenschaften: $tx^p$ liegt im Träger $x' \subset K'$ des Simplexes $x^p \subset K$, und es ist

$$usC = C - trC - rtC \qquad \text{für alle } C \subset K. \tag{3.5}$$

Zum Beweise dieses Hilfssatzes konstruiert man $tx^p$ rekursiv nach wachsendem $p$. Hat man dies, bei festem $p$, für alle $x^p \subset K$ gemacht, so ist dadurch, da $t$ homomorph ist, $tC^p$ erklärt für alle $C^p \subset \mathfrak{L}^p(K)$:

Für jeden Eckpunkt $x^0 \subset K$ sei $tx^0$ ein 1-dimensionaler Komplex $T$ im Trägersimplex $x' \subset K'$ mit $rT = x^0 - sx^0$. Dann gilt für $x^1 \subset K$:

$$r(usx^1 - x^1 + trx^1) = rusx^1 - rx^1 + (rx^1 - srx^1) = 0 .$$

$usx^1 - x^1 + trx^1$ ist also *Zyklus* im Trägersimplex $x'$ von $x^1$, somit Rand eines 2-dimensionalen Komplexes in $x'$, den wir $-tx^1$ nennen. Damit wird aber für $x^2 \subset K$:

$$r(usx^2 - x^2 + trx^2) = rusx^2 - rx^2 - (usrx^2 - rx^2 + trrx^2) = 0 .$$

$usx^2 - x^2 + trx^2$ ist also Zyklus im Trägersimplex $x'$ von $x^2$, somit Rand eines 3-dimensionalen Komplexes in $x'$, den wir $-tx^2$ nennen. So weiterfahrend konstruiert man $t$ für alle $x^p \subset K$ mit den gewünschten Eigenschaften.

Aus den Formeln (3.1) bis (3.4) folgert man

*Satz 5:* $u$ induziert eine isomorphe Abbildung $U$ von $\mathfrak{B}^p(K')$ auf $\mathfrak{B}^p(K)$, $s$ die hierzu inverse $S = U^{-1}$.

Der Beweis verläuft in vier Schritten:

1. $u$ induziert eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{B}^p(K')$ in $\mathfrak{B}^p(K)$; denn ist $\mathfrak{Z}'$ ein Zyklus in $K'$ und $\mathfrak{Z}' = rC' \sim 0$, so gilt

$$u\mathfrak{Z}' = urC' = ruC' \sim 0 \quad \text{in } K .$$

2. Diese Abbildung ist ein Isomorphismus; denn ist $u\mathfrak{Z}' = rC \sim 0$ in $K$, so wird

$$\mathfrak{Z}' = su\mathfrak{Z}' = srC = rsC \sim 0 \quad \text{in } K' .$$

3. $u$ induziert eine Abbildung von $\mathfrak{B}^p(K')$ *auf* $\mathfrak{B}^p(K)$; denn ist $\mathfrak{Z}$ ein Zyklus in $K$, so gilt mit $\mathfrak{Z}' = s\mathfrak{Z}$:

$$u\mathfrak{Z}' = us\mathfrak{Z} \sim \mathfrak{Z} .$$

4. Nach (3.3) und (3.4) bewirkt $s$ den inversen Isomorphismus.

*Anmerkung:* Bekanntlich gilt Formel (3.2) auch dann noch, wenn $u$ die Unterteilung eines Zellenkomplexes $K'$ in einen Zellenkomplex $K$ vermittelt; ebenso bleibt in diesem Falle die $u$ betreffende Aussage von Satz 5 richtig (vgl. AH., p. 248).

Durch duale Übertragung der Formeln (3.1) bis (3.5) finden wir für die zu $u$ und $s$ dualen Homomorphismen $u'$ und $s'$ die entsprechenden Relationen

$$s'r'C' = r's'C', \qquad C' \subset K', \tag{3.6}$$

$$u'r'C = r'u'C, \qquad C \subset K, \tag{3.7}$$

$$u's'C' = C', \qquad C' \subset K', \tag{3.8}$$

$$s'u'C \backsim C, \qquad \text{falls } r'C = 0,\, C \subset K. \tag{3.9}$$

Hieraus ergibt sich ähnlich wie vorn Satz 5:

*Satz 5':* $u'$ induziert eine isomorphe Abbildung $U'$ von $\mathfrak{B}'^p(K)$ auf $\mathfrak{B}'^p(K')$, $s'$ die hierzu inverse $S' = U'^{-1}$.

Damit ist die Invarianz der Homologie- und Cohomologiegruppen eines simplizialen Komplexes gegenüber simplizialen Unterteilungen bewiesen. (Auch der erste Teil von Satz 5' gilt allgemeiner; dies folgt aus Satz 4 und der Anmerkung zu Satz 5, hat für uns aber keine Bedeutung.) Man beachte, daß $u$, somit auch $u'$, $U$ und $U'$ unabhängig von $s$ definiert sind.

## § 4. Die Produkte

$K$ sei ein $n$-dimensionaler, simplizialer Komplex. Zu jedem Simplex $|x^p| \subset K$ sei für dessen Eckpunkte eine feste Reihenfolge vorgeschrieben, welche einer einzigen Bedingung zu genügen hat: Im Durchschnitt je zweier Simplexe $|x^p|$ und $|x^q|$ von $K$ müssen die in $|x^p|$ und $|x^q|$ gegebenen Eckpunktordnungen miteinander übereinstimmen. Eine solche Anordnung nennen wir eine „Eckpunktordnung im Kleinen". Eine solche erhält man z. B. dadurch, daß man alle Eckpunkte von $K$ beliebig, aber fest numeriert. Sind $e_{i_0}, e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}$ die Ecken eines Simplexes $|x^p|$ in der vorgeschriebenen Reihenfolge, so wählen wir $x^p = (e_{i_0}, e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})$ als die positive Orientierung von $|x^p|$. Für alle Simplexe $x^q = (e_{j_0}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_q})$, die uns im folgenden begegnen werden, vereinbaren wir, daß ihre Ecken stets der Vorschrift gemäß angeordnet sein sollen.

Wir definieren zwei Produkte:

1. *Das $\cup$-Produkt* (lies „Cup-Produkt"): Es sei

$$\begin{aligned} x^p \cup x^q &= (e_{i_0}, \ldots, e_{i_p}) \cup (e_{j_0}, \ldots, e_{j_q}) \\ &= (e_{i_0}, \ldots, e_{i_p}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_q}) = x^{p+q}, \end{aligned}$$

Falls $e_{i_p} = e_{j_0}$ und die Ecken $e_{i_0}, \ldots, e_{j_q}$ ein Simplex von $K$ aufspannen. In allen andern Fällen sei $x^p \cup x^q = 0$.

2. *Das* $\cap$*-Produkt* (lies „Cap-Produkt“): Es sei

$$x^q \cap x^{p+q} = (e_{j_0}, \ldots, e_{j_q}) \cap (e_{i_0}, \ldots, e_{i_p}, \ldots, e_{i_{p+q}})$$
$$= (e_{i_0}, \ldots, e_{i_p}) = x^p ,$$

falls $e_{j_k} = e_{i_{p+k}}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots, q$. In allen andern Fällen sei $x^p \cap x^r = 0$, $(r = p + q)$.

Für algebraische Komplexe $A^p = \sum a_i x_i^p$, $B^q = \sum b_j x_j^q$, $C^r = \sum c_k x_k^r$ setzen wir fest

$$A^p \cup B^q = \sum\sum a_i b_j x_i^p \cup x_j^q ,$$

$$B^q \cap C^r = \sum\sum b_j c_k x_j^q \cap x_k^r .$$

Damit sind beide Produkte distributiv erklärt. Man beachte aber, daß sie ganz wesentlich von der zugrundeliegenden Eckpunktordnung im Kleinen abhängen.

Aus den Produktdefinitionen folgt leicht eine Reihe wichtiger Eigenschaften:

$$(x^p \cup x^q) \cup x^r = x^p \cup (x^q \cup x^r),$$

$$(x^p \cup x^q) \cap x^r = x^p \cap (x^q \cap x^r);$$

ebenso ergibt sich der Zusammenhang mit dem Skalarprodukt:

$$(x^p \cup x^q) \cdot x^r = x^p \cdot (x^q \cap x^r) , \qquad \text{falls } r = p + q.$$

Hieraus folgen, wegen der Distributivität aller dieser Produkte, die entsprechenden Relationen auch für allgemeine algebraische Komplexe $A^p$, $B^q$, $C^r$ aus $K$:

$$(A^p \cup B^q) \cup C^r = A^p \cup (B^q \cup C^r), \tag{4.1}$$

d. h. das $\cup$-Produkt ist assoziativ; ferner:

$$(A^p \cup B^q) \cap C^r = A^p \cap (B^q \cap C^r), \tag{4.2}$$

$$(A^p \cup B^q) \cdot C^r = A^p \cdot (B^q \cap C^r), \tag{4.3}$$

falls $r = p + q$.

Bildet man neben dem Produkt $A^p \cup B^q$ das mittels der umgekehrten Eckpunktordnung definierte $\cup$-Produkt (wir bezeichnen es mit $\cup'$), so findet man

$$A^p \cup B^q = (-1)^{pq} B^q \cup' A^p. \tag{4.4}$$

Es sei $f$ eine simpliziale Abbildung des simplizialen Komplexes $K$ in einen Komplex $K'$. Wir setzen voraus, daß $f$ die Eckpunktordnung im Kleinen erhält, d.h. sind $e_i$ und $e_k$ Eckpunkte eines Simplexes in $K$, gilt ferner $f(e_i) = e'_j$, $f(e_k) = e'_l$, und steht in $K'$ der Eckpunkt $e'_j$ vor $e'_l$, so soll in $K$ der Eckpunkt $e_i$ vor $e_k$ kommen. (Dies kann man immer erreichen: Man ordnet nämlich zuerst die Eckpunkte $e'_1, e'_2, \ldots, e'_N$ von $K'$, dann erst die von $K$, indem man zuerst diejenigen mit $f(e_i) = e'_1$, dann diejenigen mit $f(e_i) = e'_2$, usw. ... numeriert.) Eine solche simpliziale Abbildung $f$, resp. deren duale $f'$, erfüllt die Gleichungen

$$f'(A' \cup B') = f'A' \cup f'B', \qquad A', B' \subset K'. \tag{4.5}$$

$$f(f'B' \cap C) = B' \cap fC, \qquad B' \subset K', C \subset K\,. \tag{4.6}$$

Beide Relationen verifiziert man, wie die früheren, für einzelne Simplexe und beweist sie dann allgemein durch Anwendung des distributiven Gesetzes.

## § 5. Der Homologiering

Wie die Formeln (4.5) und (4.6) lassen sich auch die folgenden zwei Relationen beweisen, welche die Beziehungen zwischen den beiden Produkten, der Rand- und der Corandbildung ausdrücken. Sie lauten, wenn $A^p$, $B^q$, $C^r$ beliebige Komplexe in $K$ sind:

$$r'(A^p \cup B^q) = r'A^p \cup B^q + (-1)^p A^p \cup r'B^q, \tag{5.1}$$

$$r(B^q \cap C^r) = (-1)^{r-q} r'B^q \cap C^r + B^q \cap rC^r. \tag{5.2}$$

Aus diesen Formeln folgt: Sind $A$ und $B$ Cozyklen, $C$ ein Zyklus, so ist $A \cup B$ ein Cozyklus, $B \cap C$ ein Zyklus. Weiter gilt unter dieser Voraussetzung: Es ist

$$A \cup B \backsim 0, \qquad \text{falls } A \backsim 0 \text{ oder } B \backsim 0,$$

$$B \cap C \sim 0, \qquad \text{falls } B \backsim 0 \text{ oder } C \sim 0\,.$$

Die beiden Produkte erzeugen daher Produkte in den Homologie- und Cohomologiegruppen. Sind nämlich $\mathfrak{Z}(A)$ und $\mathfrak{Z}(B)$ zwei Cohomologieklassen von $K$, die Cozyklen $A$ und $B$ irgendwelche Repräsentanten derselben, dann ist nach dem oben Gesagten die Cohomologieklasse $\mathfrak{Z}(A \cup B)$, welche den Cozyklus $A \cup B$ enthält, durch $\mathfrak{Z}(A)$ und $\mathfrak{Z}(B)$ eindeutig bestimmt. Wir setzen daher

$$\mathfrak{Z}(A) \cup \mathfrak{Z}(B) = \mathfrak{Z}(A \cup B) . \tag{5.3}$$

Entsprechend gilt: Sind $\mathfrak{Z}(B)$ eine Cohomologieklasse und $\mathfrak{z}(C)$ eine Homologieklasse von $K$, repräsentiert durch den Cozyklus $B$, bzw. durch den Zyklus $C$, dann ist die Homologieklasse $\mathfrak{z}(B \cap C)$, welche den Zyklus $B \cap C$ enthält, durch $\mathfrak{Z}(B)$ und $\mathfrak{z}(C)$ eindeutig bestimmt. Wir setzen daher

$$\mathfrak{Z}(B) \cap \mathfrak{z}(C) = \mathfrak{z}(B \cap C) . \tag{5.4}$$

Durch Formel (5.3) wird unter den Elementen aller Cohomologiegruppen $\mathfrak{B}'^p$ von $K$ eine Multiplikation definiert. Diese ist assoziativ und distributiv bezüglich der üblichen Addition. Daher bilden alle diese Elemente einen Ring, den *Homologiering* $\mathfrak{R}'(K)$ des Komplexes $K$. Seine additive Gruppe ist die direkte Summe $\mathfrak{B}'$ aller Cohomologiegruppen $\mathfrak{B}'^p$ von $K$. Ebenso definiert Formel (5.4) ein $\cap$-Produkt zwischen Cohomologie- und Homologieklassen.

Die durch (5.3) und (5.4) gegebenen Produktdefinitionen für Klassen sind noch mit einer Willkür behaftet: Sie basieren auf einer freigewählten Ordnung (im Kleinen) der Ecken von $K$. Daß sie aber, und damit auch $\mathfrak{R}'(K)$ tatsächlich davon unabhängig sind, wird sich weiter unten ergeben.

Wir schreiben nun $K'$ statt $K$ und bezeichnen mit $K = uK'$ eine simpliziale Unterteilung von $K'$. $s$ sei eine pseudoidentische simpliziale Abbildung von $K$ auf $K'$. Erhält sie die Eckpunktordnung im Kleinen, so gilt der

*Zusatz zu Satz 5':* Die (nach Satz 5') durch $u'$ und $s'$ induzierten Isomorphismen $U'$ von $\mathfrak{B}'(K)$ auf $\mathfrak{B}'(K')$, resp. $S' = U'^{-1}$ von $\mathfrak{B}'(K')$ auf $\mathfrak{B}'(K)$ erhalten die $\cup$-Produktrelationen zwischen den Cohomologieklassen. Mit andern Worten: Sind $A$, $B$ und $A'$, $B'$ Cozyklen in $K$, resp. $K'$, und bezeichnen $\mathfrak{Z}(A)$, $\mathfrak{Z}(B)$, $\mathfrak{Z}'(A')$, $\mathfrak{Z}'(B')$, und $\mathfrak{Z}(A \cup B)$, $\mathfrak{Z}'(A' \cup B')$ die durch sie und deren $\cup$-Produkte repräsentierten Cohomologieklassen, so gilt nach (4.5) und (5.3)

$$S'\mathfrak{Z}'(A') \cup S'\mathfrak{Z}'(B') = \mathfrak{Z}(s'A') \cup \mathfrak{Z}(s'B') = \mathfrak{Z}(s'(A' \cup B')) =$$
$$S'(\mathfrak{Z}'(A') \cup \mathfrak{Z}'(B')) ,$$

also

$$S'\mathfrak{Z}'(A') \cup S'\mathfrak{Z}'(B') = S'\big(\mathfrak{Z}'(A') \cup \mathfrak{Z}'(B')\big)\,. \tag{5.5}$$

Hieraus folgt, wegen $U' = S'^{-1}$,

$$U'\mathfrak{Z}(A) \cup U'\mathfrak{Z}(B) = U'\big(\mathfrak{Z}(A) \cup \mathfrak{Z}(B)\big)\,. \tag{5.6}$$

Mit Hilfe der Sätze 5 und 5′ schließt man ganz ähnlich aus den Formeln (4.6) und (5.4) den

*Zusatz zu den Sätzen 5 und 5′:* Die durch $u$ und $u'$, $s$ und $s'$ induzierten Isomorphismen $U$ und $U'$, resp. $S$ und $S'$ der Homologie- resp. Cohomologiegruppen erhalten die $\cap$-Produktrelationen. Mit andern Worten: Sind $B$ und $B'$ Cozyklen, $C$ und $C'$ Zyklen in $K$, resp. $K'$, und bezeichnen $\mathfrak{Z}(B)$, $\mathfrak{Z}'(B')$, $z(C)$, $z'(C')$ und $z(B \cap C)$, $z'(B' \cap C')$ die durch sie und deren $\cap$-Produkte repräsentierten Cohomologie- resp. Homologieklassen, so gelten

$$\mathfrak{Z}'(B') \cap Sz(C) = S\big(S'\mathfrak{Z}'(B') \cap z(C)\big)\,, \tag{5.7}$$

$$\mathfrak{Z}(B) \cap Uz'(C') = U\big(U'\mathfrak{Z}(B) \cap z'(C')\big)\,. \tag{5.8}$$

Es sei nun speziell $K$ die baryzentrische Unterteilung von $K'$. Die Eckpunkte von $K'$ ordnen wir beliebig, diejenigen von $K$ auf folgende „natürliche" Weise: Sind $e_i$ und $e_j$ die Schwerpunkte von Simplexen $|x'|$ und $|y'|$ von $K'$, und ist $\mathrm{Dim}\,|x'| > \mathrm{Dim}\,|y'|$, so kommt $e_i$ vor $e_j$. Im übrigen sei die Ordnung beliebig. Damit sind die Eckpunkte eines jeden einzelnen Simplexes $|x| \subset K$ in einer Weise angeordnet, die völlig unabhängig ist von der ursprünglichen Numerierung der Ecken von $K'$. Daher sind in $K$ die zwei Produkte auf eine Art definiert, der die anfängliche Willkür der Eckenordnung in $K'$ nicht mehr anhaftet.

Es sei $s$ diejenige pseudoidentische simpliziale Abbildung von $K$ auf $K'$, welche jeden Eckpunkt von $K$ in den ersten Eckpunkt seines Trägersimplexes in $K'$ verschiebt. Dann erhält $s$ die Eckpunktordnung im Kleinen. Folglich erfüllen die durch $u$ und $u'$ induzierten Isomorphismen $U$ und $U'$ die Formeln (5.6) und (5.8). Da hierin aber $U$ und $U'$, sowie die Produkte in $K$ nicht von der Eckenordnung in $K'$ abhängen, folgt dasselbe auch für die durch (5.3) und (5.4) zwischen Klassen von $K'$ definierten Produkte. Dies ist der Freudenthalsche Unabhängigkeitsbeweis[10]).

*Folgerungen:* 1. $A^p$ und $B^q$ seien Cozyklen in einem simplizialen Komplex $K$. Berechnet man ihr $\cup$-Produkt nach zwei verschiedenen Eckpunktordnungen im Kleinen, so gilt (wenn die entsprechenden Produkte mit $\cup_1$ und $\cup_2$ bezeichnet werden):

$$A^p \cup_1 B^q \backsim A^p \cup_2 B^q .$$

Insbesondere folgt hieraus nach Formel (4.4)

$$A^p \cup B^q \backsim (-1)^{pq} B^q \cup A^p . \tag{5.9}$$

2. Es sei $f$ eine simpliziale Abbildung eines Simplizialkomplexes $K$ in einen Komplex $K'$. Die hierdurch definierten Abbildungen $f$ von $\mathfrak{L}(K)$ in $\mathfrak{L}(K')$ und $f'$ von $\mathfrak{L}(K')$ in $\mathfrak{L}(K)$ erzeugen bekanntlich Homomorphismen $F$ und $F'$ von $\mathfrak{B}(K)$ in $\mathfrak{B}(K')$, resp. von $\mathfrak{B}'(K')$ in $\mathfrak{B}'(K)$. Für sie gelten nunmehr, ganz unabhängig von speziellen Eckpunktordnungen in $K$ und $K'$, wegen (4.5) und (4.6) die Relationen

$$F'(\mathfrak{Z}_1' \cup \mathfrak{Z}_2') = F'\mathfrak{Z}_1' \cup F'\mathfrak{Z}_2' , \quad \mathfrak{Z}_1', \mathfrak{Z}_2' \subset \mathfrak{R}'(K') , \tag{5.10}$$
$$F(F'\mathfrak{Z}' \cap z) = \mathfrak{Z}' \cap Fz, \quad \mathfrak{Z}' \subset \mathfrak{R}'(K'), z \subset \mathfrak{B}(K), \tag{5.11}$$

d. h. $F'$ ist ein Ringhomomorphismus; er ist mit $F$ durch Formel (5.11) verknüpft.

Schließlich beweisen wir noch den

*Hilfssatz 3:* $\mathfrak{R}'(K)$ besitzt ein Einselement $E$; dies ist die Cohomologieklasse, welche repräsentiert wird durch den nulldimensionalen Cozyklus $E^0 = \Sigma e_i$, summiert über alle Eckpunkte von $K$.

*Beweis:* 1. $E^0$ ist Cozyklus; denn nach Formel (2.1) gilt

$$r'E^0 \cdot x^1 = E^0 \cdot rx^1 = E^0 \cdot (e_i - e_k) = 0$$

für alle $x^1 \subset K$, d. h. aber: $r'E^0 = 0$.

2. Ordnet man in $K$ die Ecken beliebig und bildet dann die Produkte, so gelten für jeden Komplex $A \subset K$, wie sich sofort aus den Produktdefinitionen ergibt,

$$A \cup E^0 = E^0 \cup A = A ,$$
$$E^0 \cap A = A .$$

$E^0$ ist folglich Einselement für die beiden Multiplikationen von Komplexen, seine Cohomologieklasse $E$ somit insbesondere Einselement von $\mathfrak{R}'(K)$.

## § 6. Mannigfaltigkeiten

$M$ sei eine simpliziale geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $n$, $M'$ ihre (erste) baryzentrische Unterteilung. Man ordnet die Eckpunkte von $M$ beliebig, diejenigen von $M'$ in der vorn erklärten natürlichen Weise. Jedem orientierten Simplex $x^p \subset M$ wird eine Dualzelle $x^*$ der Dualdimension $n - p$ zugeordnet: Es sei $|X^*|$ der Teilkomplex von $M'$, welcher aus allen $(n-p)$-dimensionalen Simplexen von $M'$, die den Schwerpunkt von $|x^p|$ als letzten Eckpunkt besitzen, und aus den Seiten dieser Simplexe besteht. Dieser Komplex $|X^*|$ ist — dies wollen wir in die Definition der Mannigfaltigkeit aufnehmen — eine kombinatorische Zelle $|x^*|$. (Vgl. A. H., p. 245.) $|x^p|$ und $|x^*|$ haben nur den Schwerpunkt von $|x^p|$ gemeinsam. Eine Orientierung von $|x^*|$ und das orientierte Simplex $x^p$ bestimmen daher eine Orientierung von $M'$. Nun definieren wir: Die *Dualzelle* $x^*$ von $x^p$ sei jene Orientierung von $|x^*|$, welche mit $x^p$ eine vorgegebene Orientierung von $M'$ erzeugt. Diese Dualzellen $x^*$ bilden eine Zerspaltung von $M'$; sie wird die zu $M$ *duale Zellenzerlegung* $M^*$ genannt.

Den Übergang von einem Simplex $x$ zu seiner Dualzelle $x^*$ bezeichnen wir mit $\partial$. Es ist also $x^* = \partial x$. Definitionsgemäß ist jede Zelle $x^*$ aus $M^*$ dual zu genau einem Simplex $x \subset M$. Wir schreiben hierfür $x = \partial^{-1}x^*$ und nennen $x$ das zu $x^*$ *duale Simplex*. Ist $A = \Sigma a_i x_i$ ein algebraischer Komplex in $M$, so heiße der Zellenkomplex $A^* = \partial A = \Sigma a_i \partial x_i$ der *Dualkomplex* von $A$. Umgekehrt nennen wir $A = \partial^{-1}A^*$ den zu $A^*$ *dualen Simplizialkomplex*. $\partial$ ist somit eine isomorphe Abbildung der Gruppe $\mathfrak{L}^p(M)$ auf die Gruppe $\mathfrak{L}^{n-p}(M^*)$.

Aus der Definition von $M^*$ folgt, daß $M'$ gemeinsame baryzentrische Unterteilung von $M$ und $M^*$ ist. Die durch den Übergang von $M$ zu $M'$ und von $M^*$ zu $M'$ bewirkten Abbildungen von $\mathfrak{L}(M)$ und $\mathfrak{L}(M^*)$ in $\mathfrak{L}(M')$ nennen wir $u$ und $u^*$. $s$ sei diejenige simpliziale Abbildung von $M'$ auf $M$, welche jedem Eckpunkt von $M'$ den ersten Eckpunkt seines Trägersimplexes in $M$ zuordnet. $s$ erhält somit die Eckpunktordnung im Kleinen. Die einer festen Orientierung der Mannigfaltigkeit entsprechenden Basiszyklen von $M, M^*, M'$ bezeichnen wir ebenfalls mit $M, M^*, M'$.

Berechnet man in $M'$ die Produkte auf Grund der angegebenen Eckpunktordnung, so gilt, wie man leicht verifiziert,

$$u^* \partial x = s' x \cap M',$$

folglich für alle $A \subset \mathfrak{L}(M)$:

$$u^* \partial A = s' A \cap M'. \tag{6.1}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung können wir leicht die Beziehungen zwischen den Homomorphismen $r$ und $\partial$ angeben: Es gilt nach (3.2), (3.6) und (5.2):

$$u^* r \partial A^p = r(s' A^p \cap M') = (-1)^{n-p} s' r' A^p \cap M' = (-1)^{n-p} u^* \partial r' A^p ,$$

somit

$$r \partial A^p = (-1)^{n-p} \partial r' A^p \ . \qquad (6.2)$$

$\partial$ bildet also (bis aufs Vorzeichen) den Corand eines Komplexes in $M$ auf den Rand des Dualkomplexes in $M^*$ ab; $\partial^{-1}$ leistet das Umgekehrte. Hieraus folgt, daß $\partial$ einen Isomorphismus $D$ der Cohomologiegruppe $\mathfrak{B}'^p(M)$ auf die Homologiegruppe $\mathfrak{B}^{n-p}(M^*)$ erzeugt.

Die Abbildung $\partial$ läßt sich geometrisch gut verfolgen. Für unsere Zwecke ist aber die nachfolgend definierte Abbildung $\bar{\partial}$ bequemer. Ist $A \subset \mathfrak{L}(M)$, so ist $A^* = \partial A \subset \mathfrak{L}(M^*)$. Bilden wir nun $su^*A^*$, so erhalten wir einen Komplex $\bar{A}$ in $M$. Wir nennen ihn $\bar{\partial} A$. Es gilt also nach (6.1)

$$\bar{A} = \bar{\partial} A = su^* A^* = s(s' A \cap M') \ . \qquad (6.3)$$

Hieraus wird unter Benützung der Formeln (4.6) und (3.3), wegen $M' = uM$:

$$\bar{\partial} A = A \cap M . \qquad (6.4)$$

Wie vorn finden wir die Formel

$$r \bar{\partial} A = (-1)^{n-p} \bar{\partial} r' A \ . \qquad (6.5)$$

Diese Abbildung $\bar{\partial}$ ist deshalb für die Rechnung einfacher, weil ihr nur *eine* feste Zerlegung $M$ der Mannigfaltigkeit zugrunde liegt. Geometrisch ist sie aber schlechter zu übersehen, weil sie wesentlich von der Eckenordnung in $M$ abhängt.

Ist $\mathfrak{Z}$ ein Cozyklus aus $M$, so sind nach (6.2) und (6.5) $\mathfrak{Z}^* = \partial \mathfrak{Z}$ und $\bar{\partial} \mathfrak{Z} = su^* \mathfrak{Z}^*$ Zyklen in $M^*$, resp. M. Für sie gilt, wegen (3.4)

$$u^* \partial \mathfrak{Z} - u \bar{\partial} \mathfrak{Z} = u^* \mathfrak{Z}^* - usu^* \mathfrak{Z}^* \sim 0 \quad \text{in } M' . \qquad (6.6)$$

Nach § 3 bewirken $u$ und $u^*$ (ebenso $s$) Isomorphismen zwischen den Homologiegruppen von $M$, $M^*$ und $M'$. Betrachten wir Homologieklassen von $M$, $M^*$ und $M'$, die durch diese Isomorphismen einander zugeordnet werden, als nicht voneinander verschieden, so folgt aus (6.6): $\bar{\partial}$ erzeugt denselben Isomorphismus $D$ von $\mathfrak{B}'^p(M)$ auf $\mathfrak{B}^{n-p}(M)$, wie $\partial$ von $\mathfrak{B}'^p(M)$ auf $\mathfrak{B}^{n-p}(M^*)$. Wir bemerken: Während $\bar{\partial}$ von der in $M$

gewählten Eckpunktordnung abhängt, trifft dies nicht zu für $\partial$, somit auch nicht für $D$. Ist $\mathfrak{Z}$ eine Cohomologieklasse (von $M$), so nennen wir $z = D\mathfrak{Z}$ die zu $\mathfrak{Z}$ *duale Homologieklasse.*

Da eine Zelle $x^* \subset M^*$ und ein Simplex $y \subset M$ sich stets in relativ allgemeiner Lage befinden, ist ihr Schnitt $x^* \circ y$ definiert (vgl. A. H., p. 409ff.), und zwar als der geeignet orientierte Durchschnitt von $x^*$ und $y$. Daher ist $x^* \circ y$ entweder null oder ein orientiertes Simplex $x' \subset M'$. Man verifiziert, daß der Schnitt $x^* \circ y$ auch durch folgende Formel definiert werden kann:

$$x^* \circ y = s'x \cap uy, \qquad x = \partial^{-1}x^*.$$

Für Komplexe $A^* \subset \mathfrak{L}(M^*)$ und $B \subset \mathfrak{L}(M)$ gilt daher

$$A^* \circ B = s'A \cap uB, \qquad A = \partial^{-1}A^*, \tag{6.7}$$

oder nach (4.6) und (3.3)

$$s(A^* \circ B) = A \cap B, \qquad A = \partial^{-1}A^*. \tag{6.8}$$

Mit Hilfe der Formeln (5.2), (3.2), (3.6), (6.2) ergibt sich jetzt leicht die bekannte Randrelation für Schnitte

$$r(\partial A^p \circ B^q) = r(s'A^p \cap uB^q) = (-1)^{q-p}s'r'A^p \cap uB^q + s'A^p \cap urB^q$$

$$= (-1)^{q-p}\partial r'A^p \circ B^q + \partial A^p \circ rB^q$$

$$r(\partial A^p \circ B^q) = (-1)^{n-p}r\partial A^p \circ B^q + \partial A^p \circ rB^q. \tag{6.9}$$

*Folgerung:* Der Schnitt zweier Zyklen ist stets ein Zyklus, der Schnitt eines Zyklus mit einem Rand und der eines Randes mit einem Zyklus stets ein Rand. Somit lassen sich auf eindeutige Weise Schnitte zwischen Homologieklassen von $M^*$ und solchen von $M$ definieren; die Schnitte sind Homologieklassen von $M'$. Die Schnittbildung von Klassen bezeichnen wir ebenfalls mit „$\circ$“.

Es seien $A$ und $B$ Cozyklen in $M$; dann sind $\partial A$ und $\bar{\partial} B$ Zyklen in $M^*$ resp. $M$, und wir finden mittels (6.8) (6.4) und (4.2):

$$s(\partial A \circ \bar{\partial} B) = A \cap \bar{\partial} B = A \cap (B \cap M) = (A \cup B) \cap M = \bar{\partial}(A \cup B)\ . \tag{6.10}$$

Wir identifizieren in der vorn erwähnten Weise entsprechende Homologieklassen von $M$, $M^*$ und $M'$. Sind dann $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ Cohomologieklassen von $M$, so erhalten wir auf Grund obiger Folgerung aus (6.10) die Gleichung für Homologieklassen

$$D\mathfrak{Z}_1 \circ D\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{Z}_1 \cap D\mathfrak{Z}_2 = D(\mathfrak{Z}_1 \cup \mathfrak{Z}_2)\,. \tag{6.11}$$

Wir wissen, daß das $\cup$-Produkt die Cohomologieklasse von $M$ zu einem Ring, dem Homologiering $\mathfrak{R}'(M)$ zusammenfaßt. Nach Formel (6.11) vereinigt ebenso die Schnittbildung die Gesamtheit der Homologieklassen von $M$ zu einem Ring, dem *Schnittring* $\mathfrak{R}(M)$ von $M$. Nach derselben Formel ist die isomorphe Abbildung $D$ von $\mathfrak{R}'(M)$ auf $\mathfrak{R}(M)$ sogar produkttreu; $D$ ist also ein Ringisomorphismus, d. h. es ist

$$D\mathfrak{R}'(M) = \mathfrak{R}(M)\,.$$

## § 7. Umkehrungsabbildung und Umkehrungshomomorphismus [8] [12] [13]

$L^n$ und $\Lambda^\nu$ seien simpliziale geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeiten, $L^*$ und $\Lambda^*$ die zu $L$ und $\Lambda$ dualen Zellenzerlegungen. Den Übergang von einem algebraischen Komplex $C$ aus $L$ zu seinem Dualkomplex $C^*$ in $L^*$ bezeichnen wir mit $\partial$. Es ist also $C^* = \partial C$. Entsprechende Bedeutung habe $\delta$ für Komplexe aus $\Lambda$. $f$ sei eine simpliziale Abbildung von $L$ in $\Lambda$. Den dadurch bewirkten Homomorphismus von $\mathfrak{L}(L)$ in $\mathfrak{L}(\Lambda)$ nennen wir ebenfalls $f$, den hierzu dualen $f'$.

$\Gamma^*$ sei ein algebraischer Zellenkomplex aus $\Lambda^*$. Durch die Gleichung

$$\varphi\Gamma^* = \partial f' \delta^{-1} \Gamma^* = C^* \tag{7.1}$$

wird ihm ein Zellenkomplex $C^*$ aus $L^*$ zugeordnet: $\varphi$ bildet die Gruppe $\mathfrak{L}(\Lambda^*)$ homomorph in die Gruppe $\mathfrak{L}(L^*)$ ab. $\varphi$ heißt die zu $f$ gehörige *Umkehrungsabbildung.*

Das $\varphi$-Bild einer Zelle $\xi^* \subset \Lambda^*$ wird nach (7.1) wie folgt gefunden: Man sucht das zu $\xi^*$ duale Simplex $\xi = \delta^{-1}\xi^*$, bestimmt den Komplex $f'(\xi)$ derjenigen gleichdimensionalen Simplexe in $L$, die durch $f$ auf $\xi$ abgebildet werden, und bildet den Komplex $\partial f'(\xi)$ der zu diesen Simplexen dualen Zellen. Folglich ist, $n - \nu = d$ gesetzt,

$$\operatorname{Dim} \varphi\Gamma^{*p} = n - (\nu - p) = (n - \nu) + p = p + d\,.$$

Ähnlich wie $f$ erfüllt auch $\varphi$ einen Erhaltungssatz. Er lautet:

*Satz 6:* $\varphi$ erhält die Ränder; genauer

$$\varphi r \Gamma^* = (-1)^d r \varphi \Gamma^* . \tag{7.2}$$

*Beweis:* Wir berufen uns auf die Definition von $\varphi$, Formel (6.2) und den Erhaltungssatz für $f'$. Es sei $\Gamma^p = \delta^{-1}\Gamma^*$. Dann wird

$$\varphi r \Gamma^* = \partial f' \delta^{-1} r \delta \Gamma^p = (-1)^{\nu - p} \partial f' r' \Gamma^p ,$$

$$r \varphi \Gamma^* = r \partial f' \delta^{-1} \Gamma^* = r \partial f' \Gamma^p = (-1)^{n-p} \partial r' f' \Gamma^p .$$

Folglich gilt, wie behauptet, wegen $n - \nu = d$,

$$\varphi r \Gamma^* = (-1)^d r \varphi \Gamma^* .$$

Nach Satz 6 induziert $\varphi$ eine homomorphe Abbildung der Gruppe $\mathfrak{B}^p(\Lambda^*)$ in die Gruppe $\mathfrak{B}^{p+d}(L^*)$ und somit, da es bei Homologien gar nicht auf die speziell gewählten Unterteilungen ankommt (vgl. § 6), einen Homomorphismus von $\mathfrak{B}^p(\Lambda)$ in $\mathfrak{B}^{p+d}(L)$. Dies ist der *Umkehrungshomomorphismus* $\Phi$.

Bezeichnen wir mit $F'$ den durch $f'$ erzeugten Homomorphismus der Gruppe $\mathfrak{B}'^p(\Lambda)$ in die Gruppe $\mathfrak{B}'^p(L)$, mit $D$ und $\Delta$ die durch $\partial$ und $\delta$ bewirkten Isomorphismen von $\mathfrak{B}'^p(L)$ auf $\mathfrak{B}^{n-p}(L)$, resp. von $\mathfrak{B}'^p(\Lambda)$ auf $\mathfrak{B}^{\nu-p}(\Lambda)$, so gilt definitionsgemäß

$$\Phi \zeta = D F' \Delta^{-1} \zeta , \qquad \zeta \subset \mathfrak{B}(\Lambda) , \qquad \text{oder}$$

$$\Phi \Delta Z = D F' Z , \qquad Z \subset \mathfrak{B}'(\Lambda) . \tag{7.3}$$

Die Eckpunkte in $L$ und $\Lambda$ werden beliebig geordnet. Wir können dann in $L$ und $\Lambda$ Produkte bilden. Aus den Formeln (7.3), (6.11) und (5.10) folgt für die Homologieklassen $\zeta_1 = \Delta Z_1$, $\zeta_2 = \Delta Z_2$:

$$\begin{aligned} \Phi\zeta_1 \circ \Phi\zeta_2 &= \Phi\Delta Z_1 \circ \Phi\Delta Z_2 = DF'Z_1 \circ DF'Z_2 \\ &= D(F'Z_1 \cup F'Z_2) = DF'(Z_1 \cup Z_2) , \\ \Phi(\zeta_1 \circ \zeta_2) &= \Phi(\Delta Z_1 \circ \Delta Z_2) = \Phi\Delta(Z_1 \cup Z_2) , \end{aligned}$$

also

$$\Phi\zeta_1 \circ \Phi\zeta_2 = \Phi(\zeta_1 \circ \zeta_2) . \tag{7.4}$$

Somit gilt

*Satz 7:* $\Phi$ ist ein (Schnitt-)Ringhomomorphismus.

Nennen wir ferner $F$ den durch $f$ erzeugten Homomorphismus der Gruppe $\mathfrak{B}(L)$ in die Gruppe $\mathfrak{B}(\Lambda)$, so folgt aus den Formeln (7.3), (6.11) und (5.11) für die Homologieklassen $\zeta = \Delta Z \subset \mathfrak{B}(\Lambda)$, $z \subset \mathfrak{B}(L)$:

$$F(\Phi \zeta Z \circ z) = F(DF'Z \circ z) = F(F'Z \cap z) = Z \cap Fz = \Delta Z \circ Fz = \zeta \circ Fz .$$

Also gilt

*Satz 8:* $\Phi$ erfüllt die Funktionalgleichung.

$$F(\Phi\zeta \circ z) = \zeta \circ Fz . \tag{7.5}$$

Genauer gilt sogar, wie wir zeigen werden, die Formel

$$\mathbf{f}(\varphi\Gamma^* \circ C) = \Gamma^* \circ fC , \tag{7.6}$$

wenn $\Gamma^*$ und $C$ Komplexe in $\Lambda^*$, resp. $L$ sind und $\mathbf{f}$ wie folgt definiert ist:

Wir erweitern $f$ zu einer simplizialen Abbildung der baryzentrischen Unterteilung $L'$ von $L$ und $L^*$ in die baryzentrische Unterteilung $\Lambda'$ von $\Lambda$ und $\Lambda^*$ durch folgende Vorschrift: Ist das Simplex $|\xi^q| \subset \Lambda$ das geometrische Bild des Simplexes $|x^p| \subset L$, so bilde $\mathbf{f}$ den Schwerpunkt von $|x^p|$ auf den Schwerpunkt von $|\xi^q|$ ab.

Man ordnet die Eckpunkte von $\Lambda'$ und $L'$ in der in § 6 angegebenen natürlichen Weise. Offenbar ist $\mathbf{f}$ diejenige simpliziale Approximation von $f$, welche jeden Eckpunkt $e$ von $L'$ in den ersten Eckpunkt des Trägers von $fe$ in $\Lambda'$ abbildet. $\mathbf{f}$ erhält somit die Ordnung im Kleinen.

$s$ und $\sigma$ seien jene pseudoidentischen simplizialen Abbildungen von $L'$ auf $L$ und von $\Lambda'$ auf $\Lambda$, welche jeden Eckpunkt von $L'$, resp. $\Lambda'$ in den ersten Eckpunkt ihres Trägers in $L$, resp. $\Lambda$ verschieben. Dann gilt auf Grund der über die Eckpunktordnung gemachten Voraussetzungen

$$\sigma\mathbf{f}C' = fsC', \qquad C' \subset L', \tag{7.7}$$

somit nach (1.2)

$$\mathbf{f}'\sigma'\Gamma = s'f'\Gamma, \qquad \Gamma \subset \Lambda. \tag{7.8}$$

Ferner bezeichnen wir mit $u$, $u^*$ und $\omega$ die durch die Unterteilungen $L'$ von $L$ und $L^*$, $\Lambda'$ von $\Lambda$ bewirkten Abbildungen der Gruppen $\mathfrak{L}(L)$ und $\mathfrak{L}(L^*)$ in $\mathfrak{L}(L')$, resp. der Gruppe $\mathfrak{L}(\Lambda)$ in $\mathfrak{L}(\Lambda')$. Dann gilt ferner

$\mathfrak{f}uC = \omega fC$ für alle $C$ aus $L$, folglich nach (6.7), (7.1), (7.8) und (4.6) mit $\Gamma = \delta^{-1}\Gamma^*$

$$\mathfrak{f}(\varphi\Gamma^* \circ C) = \mathfrak{f}(s'f'\Gamma \cap uC) = \sigma'\Gamma \cap \omega fC = \Gamma^* \circ fC\,,$$

womit Formel (7.6) bewiesen ist.

Nebenbei ergibt sich noch eine neue Form der Definition von $\varphi$: Ist nämlich $\Gamma^* \subset \Lambda^*$, $\Gamma = \delta^{-1}\Gamma^*$, so gilt nach (7.1), (6.1) und (7.8)

$$u^*\varphi\Gamma^* = u^*\partial f'\Gamma = s'f'\Gamma \cap L' = \mathfrak{f}'\sigma'\Gamma \cap L'\,. \qquad (7.9)$$

# KAPITEL II

## Der H-Prozess bei Abbildungen von Mannigfaltigkeiten

### § 8. Definition des Homomorphismus H

Wir betrachten einen Zyklus $\zeta^* \subset \Lambda^*$, dessen $\varphi$-Bild in $L^*$ einen Komplex $C^*$ berandet. Dessen Unterteilung $u^*C^*$ wollen wir mittels $\mathfrak{f}$ in $\Lambda'$ abbilden und untersuchen, wie dieses Bild mit $\zeta^*$ in Zusammenhang steht. Es sei also

$$\varphi\zeta^* = rC^*, \qquad C^* \subset L^*\,. \qquad (8.1\text{a})$$

Dann setzen wir als *Definition*

$$h\zeta^* = \mathfrak{f}u^*C^*\,. \qquad (8.1\text{b})$$

Ist Dim $\zeta^* = p$, so wird Dim $\varphi\zeta^* = p + d =$ (Dim $C^*$) $- 1$; folglich ist Dim $h\zeta^* =$ Dim $C^* = p + d + 1 = p + e$, wenn $d + 1 = e$ gesetzt wird.

Im allgemeinen ist $h\zeta^*$ kein Zyklus; doch trifft dies immer zu unter folgender

*Voraussetzung: $L$ sei von höherer Dimension als $\Lambda$, d. h. $n - \nu = d > 0$. Die Gültigkeit dieser Voraussetzung erstrecke sich bis zum Schlusse dieses Kapitels.* Aus ihr folgt, wenn $f$ und $\mathfrak{f}$ als algebraische simpliziale Abbildungen aufgefaßt werden, $fL = \mathfrak{f}L' = 0$.

Es gilt jetzt der

*Hilfssatz 4:* Für jeden Komplex $\Gamma^*$ aus $\Lambda^*$ ist $\mathfrak{f}u^*\varphi\Gamma^* = 0$. Denn nach (7.9) und (4.6) ist mit $\Gamma = \delta^{-1}\Gamma^*$

$$\mathfrak{f}u^*\varphi\Gamma^* = \mathfrak{f}(\mathfrak{f}'\sigma'\Gamma \cap L') = \sigma'\Gamma \cap \mathfrak{f}L' = 0\,.$$

Dieser Beweis stützt sich zwar auf die speziell gewählten Eckpunktordnungen in $L'$ und $\Lambda'$. Da aber die Abbildungen $\mathfrak{f}$, $u^*$ und $\varphi$ frei von jeder solcher Vorschrift definiert wurden, gilt der Hilfssatz 4 unabhängig von jeder Eckpunktnumerierung. Nun folgt

*Satz 9:* Ist $\varphi\zeta^* = rC^*$, so ist $h\zeta^* = \mathfrak{f}u^*C^*$ Zyklus.

Denn es gilt nach Hilfssatz 4

$$rh\zeta^* = r\mathfrak{f}u^*C^* = \mathfrak{f}u^*rC^* = \mathfrak{f}u^*\varphi\zeta^* = 0\,.$$

Nach Definition von $h$ ist der Zyklus $h\zeta^*$ nicht eindeutig bestimmt; doch gilt der

*Satz 10:* Sind die Zyklen $\zeta_0^*$ und $\zeta_1^*$ von $\Lambda^*$ homolog, und gilt $\varphi\zeta_0^* = rC_0^*$, somit (nach Satz 6) auch $\varphi\zeta_1^* = rC_1^*$, dann unterscheiden sich die Zyklen $h\zeta_0^*$ und $h\zeta_1^*$ höchstens um das $\mathfrak{f}$-Bild eines Zyklus $\mathfrak{Z}$ aus $L'$.

*Beweis:* Nach Voraussetzung gibt es einen Komplex $\Gamma^* \subset \Lambda^*$, so daß $\zeta_1^* - \zeta_0^* = r\Gamma^*$. Nach Formel (7.2) ist daher $\varphi\zeta_1^* - \varphi\zeta_0^* = (-1)^d r\varphi\Gamma^*$. Somit wird nach Hilfssatz 4:

$$h\zeta_1^* - h\zeta_0^* = \mathfrak{f}u^*C_1^* - \mathfrak{f}u^*C_0^* = \mathfrak{f}u^*(C_1^* - C_0^* - (-1)^d\varphi\Gamma^*) = \mathfrak{f}\mathfrak{Z}\,,$$

wobei $\mathfrak{Z} = u^*\,(C_1^* - C_0^* - (-1)^d\varphi\Gamma^*)$ gesetzt wird. $\mathfrak{Z}$ ist aber Zyklus, womit Satz 10 bewiesen ist.

*Wir definieren: Es sei $\mathfrak{K}$ die Menge der Homologieklassen $\zeta \subset \mathfrak{B}(\Lambda^*)$, für deren Zyklen $\zeta^*$ die Beziehung $\varphi\zeta^* \sim 0$ gilt. Es sei $\mathfrak{F}$ die Menge der Homologieklassen $Z \subset \mathfrak{B}(\Lambda')$, welche $\mathfrak{f}$-Bilder von Zyklen aus $L'$ enthalten. $\mathfrak{K}^p$ und $\mathfrak{F}^p$ seien die Mengen der $p$-dimensionalen Elemente von $\mathfrak{K}$, resp. $\mathfrak{F}$.*
All dies sind Untergruppen der entsprechenden Homologiegruppen.

Mit Hilfe dieser Definitionen können wir unsere bisherigen Resultate über $h$ zusammenfassen in dem

*Satz 11: $h$ induziert einen Homomorphismus $H$ der Untergruppe $\mathfrak{K}^p$ von $\mathfrak{B}^p(\Lambda^*)$ in die Faktorgruppe $\mathfrak{B}^{p+e}(\Lambda')/\mathfrak{F}^{p+e}$* $(e = d + 1)$. Derselbe ist unabhängig von irgendeiner Eckpunktordnung.

Diese erste Definition von $h$ läßt sich geometrisch gut überblicken; formal ist sie aber, wegen der verschiedenen zu betrachtenden Unterteilungen der Mannigfaltigkeiten $L$ und $\Lambda$, unbequem. Wir bemerken, daß weder $h$, noch der hierdurch erzeugte Homomorphismus $H$ von einer speziell gewählten Eckpunktnumerierung in $L'$ und $\Lambda'$ abhängt. Wir definieren nun nochmals denselben Homomorphismus $H$, aber auf eine formal einfachere Weise.

Zu diesem Zwecke bilden wir neue Definitionen: Ist $\Gamma$ Komplex in $\Lambda$, so setzen wir

$$\bar{\varphi}(\Gamma \cap \Lambda) = f'\Gamma \cap L, \tag{8.2}$$

d. h.

$$\bar{\varphi}\bar{\delta}\Gamma = \bar{\delta}f'\Gamma .$$

Ist $\zeta$ Cozyklus in $\Lambda$ und

$$\bar{\varphi}\bar{\delta}\zeta = rC, \qquad C \subset L, \tag{8.3a}$$

so definieren wir

$$\bar{h}\bar{\delta}\zeta = fC . \tag{8.3b}$$

Ähnlich wie vorn gelten

*Hilfssatz* $\bar{4}$: Es ist $f\bar{\varphi}\bar{\delta}\Gamma = 0$. Denn nach (4.6) gilt

$$f\bar{\varphi}\bar{\delta}\Gamma = f(f'\Gamma \cap L) = \Gamma \cap fL = 0 .$$

*Satz* $\bar{9}$: $\bar{h}\bar{\delta}\zeta$ ist Zyklus. Denn es wird

$$r\bar{h}\bar{\delta}\zeta = rfC = frC = f\bar{\varphi}\bar{\delta}\zeta = 0 .$$

*Satz* $\overline{10}$: Ist $\bar{\delta}\zeta_0 \sim \bar{\delta}\zeta_1$, und $\bar{\varphi}\bar{\delta}\zeta_0 = rC_0$, somit $\bar{\varphi}\bar{\delta}\zeta_1 = rC_1$, so gilt: $\bar{h}\bar{\delta}\zeta_0$ und $\bar{h}\bar{\delta}\zeta_1$ unterscheiden sich höchstens um das $f$-Bild eines Zyklus $\boldsymbol{Z}$ aus $L$.

*Beweis:* Nach Voraussetzung und (6.5) ist $\zeta_1 - \zeta_0 = r'\Gamma$, folglich nach Formel (8.2)

$$\bar{\varphi}\bar{\delta}\zeta_1 = \bar{\varphi}\bar{\delta}\zeta_0 = f'r'\Gamma \cap L = r(\pm f'\Gamma \cap L) = r\bar{\varphi}\bar{\delta}(\pm \Gamma) .$$

Somit wird

$$\bar{h}\bar{\delta}\zeta_1 - \bar{h}\bar{\delta}\zeta_0 = fC_1 - fC_0 = f(C_1 - C_0 - \bar{\varphi}\bar{\delta}(\pm \Gamma)) = f\boldsymbol{Z} ,$$

wenn $\boldsymbol{Z} = C_1 - C_0 - \bar{\varphi}\bar{\delta}(\pm \Gamma)$ gesetzt wird. $\boldsymbol{Z}$ ist aber Zyklus und damit Satz 10 bewiesen.

Wir definieren: Es sei $\bar{\mathfrak{K}}$ die Menge der Homologieklassen aus $\mathfrak{B}(\Lambda)$, für deren Zyklen der Form $\bar{\delta}\zeta$ die Beziehung $\bar{\varphi}\bar{\delta}\zeta \sim 0$ gilt. Es sei $\bar{\mathfrak{F}}$ die Menge der Homologieklassen aus $\mathfrak{B}(\Lambda)$, die $f$-Bilder von Zyklen aus $L$ enthalten. $\bar{\mathfrak{K}}^p$ und $\bar{\mathfrak{F}}^p$ seien die Teilmengen der $p$-dimensionalen Klassen aus $\mathfrak{K}$, resp. $\mathfrak{F}$. Damit gilt

*Satz* $\overline{11}$: $\bar{h}$ induziert einen Homomorphismus $\bar{H}$ der Untergruppe $\bar{\mathfrak{K}}$ von $\mathfrak{B}(\Lambda)$ in die Faktorgruppe $\mathfrak{B}(\Lambda)/\bar{\mathfrak{F}}$.

Nach Satz 5 bestehen isomorphe Abbildungen der Gruppen $\mathfrak{B}^p(\Lambda)$, $\mathfrak{B}^p(\Lambda')$ und $\mathfrak{B}^p(\Lambda^*)$ aufeinander. Identifizieren wir die sich hierbei entsprechenden Elemente dieser Gruppen, so dürfen wir diese Gruppen schlechthin als gleich auffassen. Wir schreiben dafür kurz $\mathfrak{B}^p$. Entsprechende Bedeutung habe die Abkürzung $\mathfrak{B}$, die direkte Summe aller $\mathfrak{B}^p$. In diesem Sinne ist nach § 6 (insbesondere Formel (6.6)) $\overline{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}$ und nach Formel (7.7) $\overline{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}$. Schließlich folgt aus (8.1) und (8.3), (6.3) und (7.7), daß hiermit auch $\overline{H} = H$ ist. $\overline{H}$ ist daher, wie $H$, von keiner Eckpunktnumerierung abhängig, obwohl eine solche in seiner Konstruktion auftritt.

Wir werden in Zukunft nur noch die zweite Definition von $H$ verwenden, welche auf den Formeln (8.2) und (8.3) beruht. Daher schreiben wir von nun an $\varphi$ statt $\bar{\varphi}$ und $h$ statt $\bar{h}$.

Wir werden im folgenden oft von Zyklen aus einer der Gruppen $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}^p$, $\mathfrak{F}$ oder $\mathfrak{F}^p$ sprechen. Darunter wollen wir Zyklen verstehen, deren Homologieklassen der entsprechenden Gruppe angehören.

## § 9. Invarianz des Homomorphismus H in der Abbildungsklasse von f

Wir werden zeigen, daß homotope simpliziale Abbildungen von $L$ in $\Lambda$ denselben Homomorphismus $H$ definieren. Dies ist der Inhalt von Satz 12. Ihm schicken wir einen Hilfssatz voraus.

*Hilfssatz 5:* $L^+$ und $\Lambda^+$ seien simpliziale Unterteilungen von $L$, resp. $\Lambda$, die Abbildung $f^+$ von $L^+$ in $\Lambda^+$ sei eine simpliziale Approximation (nach A. H., p. 316, „Modifikation“ genannt) der simplizialen Abbildung $f$ von $L$ in $\Lambda$. Wir bilden die Homomorphismen $\varphi$, $h$ und $H$ mittels $f$, entsprechend $\varphi^+$, $h^+$ und $H^+$ mittels $f^+$. Dann gilt, wenn man einander entsprechende Homologiegruppen verschiedener Unterteilungen von $\Lambda$ als gleich betrachtet, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^+$, $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^+$, und für $\zeta \subset \mathfrak{K}$ ist $H\zeta = H^+\zeta$ in $\mathfrak{B}/\mathfrak{F}$.

*Beweis:* $s$ und $\sigma$ seien solche pseudoidentische simpliziale Abbildungen von $L^+$ auf $L$, resp. von $\Lambda^+$ auf $\Lambda$, daß $\sigma f^+ = fs$, also $f^{+\prime}\sigma' = s'f'$ ist. Da $s$ und $\sigma$ Isomorphismen zwischen $\mathfrak{B}(L^+)$ und $\mathfrak{B}(L)$, resp. zwischen $\mathfrak{B}(\Lambda^+)$ und $\mathfrak{B}(\Lambda)$ erzeugen, folgt aus $\sigma f^+ = fs$ sofort, daß $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^+$ ist.

Die Eckpunkte von $\Lambda$, $\Lambda^+$, $L$ und $L^+$ werden so numeriert, daß $\sigma$, $s$, $f$ und $f^+$ deren Ordnung im Kleinen erhalten. $\bar{\zeta}^+$ sein beliebiger Zyklus aus $\Lambda^+$; zu ihm gibt es nach Satz $5'$ und § 6 einen Cozyklus $\zeta \subset \Lambda$ derart, daß $\bar{\zeta}^+ \sim \sigma'\zeta \cap \Lambda^+$. Damit ist, $\sigma\bar{\zeta}^+ = \sigma(\sigma'\zeta \cap \Lambda^+) = \zeta \cap \Lambda = \bar{\zeta}$ gesetzt, nach (8.2) und (4.6)

$$s\varphi^+\bar{\zeta}^+ = s(f^{+\prime}\sigma'\zeta \cap L^+) = f'\zeta \cap L = \varphi\bar{\zeta}\,.$$

Hieraus folgt nach Satz 5: Es ist $\mathfrak{K} = \overline{\mathfrak{K}}$.

Sei nun $\bar{\zeta}^+ \subset \mathfrak{K}$, also $\varphi^+\bar{\zeta}^+ = rC^+$, $C^+ \subset L^+$. Dann wird

$$\varphi\bar{\zeta} = s\varphi^+\bar{\zeta}^+ = srC^+ = rsC^+, \qquad sC^+ \subset L,$$

und

$$h\bar{\zeta} = fsC^+ = \sigma f^+C^+ = \sigma h^+\bar{\zeta}^+ .$$

Damit ist Hilfssatz 5 bewiesen. Nun gilt

*Satz 12: Der Homomorphismus $H$ ist invariant in der Abbildungsklasse von $f$.* Mit andern Worten: $f_0$ und $f_1$ seien homotope simpliziale Abbildungen der simplizialen Zerlegungen $L_0$ und $L_1$ von $L^n$ in die simplizialen Zerlegungen $\Lambda_0$ und $\Lambda_1$ von $\Lambda^\nu$ ($n - \nu = d > 0$); ihnen mögen die Abbildungen $h_0$ und $h_1$ entsprechen. Dann sind die hierdurch bewirkten Homomorphismen $H_0$ und $H_1$ einander gleich, wenn man (im Sinne von Satz 5 einander) entsprechende Homologieklassen verschiedener Unterteilungen von $\Lambda$ identifiziert.

*Beweis:* $\Lambda'$ sei eine gemeinsame simpliziale Verfeinerung von $\Lambda_0$ und $\Lambda_1$. Dann gibt es Verfeinerungen $L_0'$ von $L_0$ und $L_1'$ von $L_1$ und Modifikationen $\bar{f}_0$ von $f_0$ und $\bar{f}_1$ von $f_1$, welche $L_0'$ und $L_1'$ simplizial in $\Lambda'$ abbilden. Nach dem Hilfssatz erzeugen sie dieselben Homomorphismen $H_0$ und $H_1$ wie $f_0$ und $f_1$.

Nach Voraussetzung sind $\bar{f}_0$ und $\bar{f}_1$ homotop. Es gibt daher eine stetige Abbildung $f$ von $L\times T$ ($T$ = Einheitsstrecke $[0,1]$) in $\Lambda'$, wobei

$$f(L\times 0) = \bar{f}_0 L_0', \qquad f(L\times 1) = \bar{f}_1 L_1' .$$

$f$ wird simplizial approximiert durch die Abbildung $f^+$. Hierzu soll $L\times T$ so in $(L\times T)^+$ unterteilt werden, daß die hierdurch erzeugten Unterteilungen $L_0^+$ von $L\times 0$ und $L_1^+$ von $L\times 1$ Verfeinerungen der Zerlegungen $L_0'$ und $L_1'$ sind. Dann sind

$$f^+(L\times 0)^+ = f_0^+ L_0^+ , \qquad f^+(L\times 1)^+ = f_1^+ L_1^+$$

Modifikationen von $\bar{f}_0$ und $\bar{f}_1$. Nach Hilfssatz 5 definieren $f_0^+$ und $f_1^+$ die gleichen Homomorphismen $H_0$ und $H_1$ wie $\bar{f}_0$ und $\bar{f}_1$, also auch wie $f_0$ und $f_1$.

$\bar{\zeta} = \bar{\delta}\zeta$ sei Zyklus in $\Lambda'$. Setze

$$\varphi^+\bar{\zeta} = f^{+\prime}\zeta \cap (L\times T)^+ .$$

Hierbei wird vorausgesetzt, daß in $\Lambda'$ und in $(L\times T)^+$ Eckenordnungen gegeben sind, die durch $f^+$ im Kleinen erhalten bleiben. Nun wird nach Formel (5.2)

$$r\varphi^+\bar{\zeta} = f^{+\prime}\zeta \cap r(L\times T)^+ = f^{+\prime}\zeta \cap (L_1^+ - L_0^+) = f^{+\prime}\zeta \cap L_1^+ - f^{+\prime}\zeta \cap L_0^+ = \varphi_1^+\bar{\zeta} - \varphi_0^+\bar{\zeta}.$$

Es sei $\varphi_0^+\bar{\zeta} = rC_0$ $(C_0 \subset L_0^+)$. Dann ist

$$\varphi_1^+\bar{\zeta} = r(C_0 + \varphi^+\bar{\zeta}) \sim 0 \qquad \text{in } (L\times T)^+,$$

und somit auch $\varphi_1^+\bar{\zeta} \sim 0$ in $L_1^+$. Ebenso folgt $\varphi_0^+\bar{\zeta} \sim 0$ in $L_0^+$ aus $\varphi_1^+\bar{\zeta} \sim 0$ in $L_1^+$. Dies besagt: Es ist $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}$. Offenbar ist auch $\mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}$.

Die Projektion von $L\times T$ längs der Strecke $T$ auf $L_0$ nennen wir $g$. Mit andern Worten: Sind $p$ und $t$ Punkte aus $L$, resp. $T$, so sei $g(p\times t) = p\times 0$. Es sei nun $\varphi_1^+\bar{\zeta} = rC_1$, somit $\varphi_0^+\bar{\zeta} = r(C_1 - \varphi^+\bar{\zeta})$. Faßt man $g$ als algebraische Abbildung auf, so gilt daher

$$\varphi_0^+\bar{\zeta} = rg(C_1 - \varphi^+\bar{\zeta}) = rC_0, \qquad C_0 = g(C_1 - \varphi^+\bar{\zeta}) \subset L_0^+.$$

Folglich ist $C_1 - C_0 - \varphi^+\bar{\zeta}$ ein Zyklus, der in $(L\times T)^+$ berandet. Daher gilt nach Hilfssatz 4 für die mit $f_0^+$ und $f_1^+$ gebildeten Abbildungen $h_0^+$ und $h_1^+$:

$$h_1^+\bar{\zeta} - h_0^+\bar{\zeta} = f_1^+C_1 - f_0^+C_0 = f^+(C_1 - C_0 - \varphi^+\bar{\zeta}) \sim 0 \qquad \text{in } \Lambda.$$

Damit ist Satz 12 bewiesen.

*Folgerungen:* Jeder stetigen dimensionserniedrigenden Abbildung $f$ einer Mannigfaltigkeit $L^n$ in eine solche $\Lambda^\nu$ ist ein Homomorphismus $H$ zugeordnet. Derselbe ist konstant in der Abbildungsklasse von $f$. Dieser Homomorphismus $H$ erlaubt daher unter Umständen verschiedene Abbildungsklassen voneinander zu unterscheiden. So gilt beispielsweise: Ist $H$ nicht die Nullabbildung (d. h. gilt nicht $H\zeta = 0$ für alle $\zeta \subset \mathfrak{K}$ in sämtlichen Dimensionen), so ist $f$ nicht 0-homotop. Insbesondere kann $H$ herangezogen werden für die Untersuchung der Wesentlichkeit der Abbildung $f$; denn gibt es in $\Lambda$ einen Zyklus $\zeta_0$ mit $h\zeta_0 = \gamma\Lambda$ $(\gamma \neq 0)$, so ist $f$ bestimmt wesentlich. Wir nehmen an, $\zeta_0$ existiere. Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Es gibt in $L^n$ einen Zyklus $Z^\nu$, der durch $f$ mit einem von 0 verschiedenen Grade auf $\Lambda^\nu$ abgebildet wird. Offenbar ist $Z^\nu$ kein Randteiler; folglich ist dann die $\nu$te Bettische Zahl von $L^n$, $p^\nu(L^n) \neq 0$. (Wir werden später sehen, daß in diesem Falle der Zyklus $\zeta_0$ ein Rand sein muß.)

2. Es gibt in $L^n$ keinen Zyklus $\mathfrak{Z}^\nu$ mit $f\mathfrak{Z}^\nu = \gamma\Lambda (\gamma \neq 0)$. Dann kann also $\zeta_0$, für welches $h\zeta_0 = \gamma\Lambda\,(\gamma \neq 0)$ gilt, weder Rand, noch Randteiler sein; folglich ist dann (wegen Dim $\zeta_0 = \nu - e$) die $(\nu - e)^{te}$ Bettische Zahl von $\Lambda$, $\pi^{\nu - e} \neq 0$. Es muß dann also $0 \leqslant \nu - e = \nu - d - 1 = 2\nu - n - 1$, somit $n \leqslant 2\nu - 1$ sein. Wir werden später noch eine zusätzliche Bedingung finden: $d$ muß ungerade sein.

In Kapitel III werden wir eine spezielle Klasse von Abbildungen studieren, bei denen ein Zyklus $\zeta_0$ mit $h\zeta_0 = \gamma\Lambda\ (\gamma \neq 0)$ stets auftritt. Es sind dies die durch Sphärenfaserungen erzeugten Abbildungen; diese sind somit stets wesentlich. Wir werden sogar zeigen, daß in diesem Falle $\zeta_0$ stets so gewählt werden kann, daß $\gamma = +1$ wird.

## § 10. Definition des Homomorphismus H′

Mit Hilfe der Abbildungen $\varphi$, $r$, $f$ definierten wir den Homomorphismus $H$ für gewisse Elemente der Homologiegruppen von $\Lambda$. Unser nächstes Ziel ist die Konstruktion eines entsprechenden Homomorphismus $H'$ für gewisse Elemente der Cohomologiegruppen von $\Lambda$. Zu diesem Zwecke ist es naheliegend, statt $\varphi$, $r$, $f$, die hierzu dualen Abbildungen $\varphi'$, r$'$, $f'$ heranzuziehen. Wir werden dies wirklich tun, wollen aber, um leichter zum Ziele zu kommen, nur $r'$ und $f'$ dual zu $f$ und $r$ erklären (vgl. § 1), $\varphi'$ aber durch die folgende

*Definition:* Es sei $\mathfrak{Z}$ ein Cozyklus in $L$, $Z$ ein solcher in $\Lambda$, und es gelte $f\bar{\partial}\mathfrak{Z} \sim \bar{\delta}Z$. Dann setzen wir $\varphi'\mathfrak{Z} = Z$. Hierin ist nach (6.4) $\bar{\partial}\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z} \cap L$, $\bar{\delta}Z = Z \cap \Lambda$ gesetzt. $\varphi'$ erfüllt somit die Formel

$$\varphi'\mathfrak{Z} \cap \Lambda \sim f(\mathfrak{Z} \cap L)\ , \tag{10.1}$$

welche in ihrem Aufbau ganz an Formel (8.2) erinnert. Diese Analogie ist es auch, welche unsere Definition von $\varphi'$ rechtfertigen wird. Zur Bildung von $\bar{\delta}$ und $\bar{\partial}$, d. h. der in Formel (10.1) auftretenden Produkte müssen die Eckpunkte von $L$ und $\Lambda$ im Kleinen geordnet sein. Für später setzen wir dazu voraus, daß dies so geschehen sei, daß $f$ diese Ordnungen im Kleinen erhalte.

Definitionsgemäß ist $\varphi'\mathfrak{Z}$ Cozyklus in $\Lambda$, der aber nur bis auf Coränder bestimmt ist. Aus $\mathfrak{Z} \backsim 0$ folgt $\varphi'\mathfrak{Z} \backsim 0$. $\varphi'$ erniedrigt die Dimension um $d$; nach Formel (10.1) gilt nämlich: Dim $\varphi'\mathfrak{Z}^p = \nu - (n - p) = p - (n - \nu) = p - d$. Die Abbildung $\varphi'$ besitzt somit eine Reihe von Eigenschaften, die man von der zu $\varphi$ dualen Abbildung erwartet. Diese Analogie im Verhalten gegenüber $\varphi$ führt noch weiter, wie wir bald sehen werden. Vorher aber wollen wir den Definitionsbereich von $\varphi'$ erweitern.

$\varphi'$ ist erklärt für Cozyklen $\mathfrak{Z}$ aus $L$, und zwar ist $\varphi'\mathfrak{Z}$ ein Cozyklus aus derjenigen Cohomologieklasse von $\Lambda$, welche durch die Homologie (10.1) eindeutig bestimmt ist. Damit aber diese Formel einen Sinn hat, ist gar nicht nötig, daß $\mathfrak{Z}$ Cozyklus ist. Wichtig ist nur, daß $f(\mathfrak{Z} \cap L)$ Zyklus ist. Wir können daher $\varphi'C$ erklären für alle Komplexe $C$ aus $L$, für die $f(C \cap L)$ Zyklus ist, indem wir festsetzen: $\varphi'C$ sei ein Cozyklus aus derjenigen Cohomologieklasse von $\Lambda$, welche nach Formel (10.1) durch $f(C \cap L)$ eindeutig bestimmt ist. Man beachte aber, daß $C \cap L$ und damit auch die Cohomologieklasse von $\varphi'C$ von der in $L$ gewählten Eckpunktordnung abhängen, im Gegensatz zu der Cohomologieklasse von $\varphi'\mathfrak{Z}$, falls $\mathfrak{Z}$ Cozyklus ist.

In Analogie zu Satz 8 gilt der

*Satz 8':* $\varphi'$ erfüllt die Relation

$$\varphi'(f'Z \cup C) \backsim Z \cup \varphi'C\,, \tag{10.2}$$

falls $Z$ Cozyklus in $\Lambda$ und $\varphi'C$ erklärt ist.

*Beweis:* Nach Voraussetzung ist $f(C \cap L)$ Zyklus in $\Lambda$, somit nach (4.2) und (4.6) ($f$ erhält ja die Eckenordnung im Kleinen) auch

$$f[(f'Z \cup C) \cap L] = f[f'Z \cap (C \cap L)] = Z \cap f(C \cap L)\,.$$

Folglich ist $\varphi'(f'Z \cup C)$ definiert und es gilt nach (10.1)

$$\begin{aligned}\varphi'(f'Z \cup C) \cap \Lambda \sim f[(f'Z \cup C) \cap L] &= Z \cap f(C \cap L)\\ &\sim Z \cap (\varphi'C \cap \Lambda) = (Z \cup \varphi'C) \cap \Lambda\,.\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung (§ 6).

Auch zu Satz 7 gibt es einen entsprechenden: Er wird durch Formel (5.10) ausgedrückt.

Aus der vorn gemachten Voraussetzung $fL = 0$ folgt weiter der

*Hilfssatz 4':* $\varphi'f'\Gamma$ ist erklärt für alle $\Gamma \subset \Lambda$, und es gilt $\varphi'f'\Gamma \backsim 0$. Denn es ist $f(f'\Gamma \cap L) = \Gamma \cap fL = 0$ Rand in $\Lambda$, somit $\varphi'f'\Gamma \backsim 0$.

Es sei $\zeta^p$ Cozyklus in $\Lambda$ und

$$f'\zeta^p = r'C^{p-1}, \qquad C^{p-1} \subset L. \tag{10.3a}$$

Dann ist $\varphi'C^{p-1}$ erklärt; denn $f(C^{p-1} \cap L)$ ist Zyklus, weil nach (5.2), (4.6) und (10.3a)

$$rf(C^{p-1} \cap L) = \pm f(r'C^{p-1} \cap L) = \pm \zeta^p \cap fL = 0$$

wird. Wir setzen als Definition

$$h'\zeta^p = (-1)^p \varphi' C^{p-1} . \tag{10.3b}$$

$h'\zeta^p$ ist definitionsgemäß Cozyklus. Die Wahl des Vorzeichens wird sich später als geeignet erweisen. Es gilt Dim $h'\zeta^p = (p-1) - d = p-e$, wenn wie früher $d + 1 = e$ gesetzt wird. $h'\zeta^p$ ist nicht eindeutig bestimmt; doch gilt der

*Satz 10':* Sind die Cozyklen $\zeta_0$ und $\zeta_1$ von $\Lambda$ cohomolog und $f'\zeta_0 = r'C_0$, somit $f'\zeta_1 = r'C_1$, so unterscheiden sich $h'\zeta_0$ und $h'\zeta_1$ nur um das $\varphi'$-Bild eines Cozyklus aus $L$.

*Beweis:* Nach Voraussetzung ist $\zeta_1 - \zeta_0 = r'\Gamma$, also $f'\zeta_1 - f'\zeta_0 = r'f'\Gamma$. Hieraus folgt nach Hilfssatz 4'

$$\pm (h'\zeta_1 - h'\zeta_0) = \varphi' C_1 - \varphi' C_0 \backsim \varphi'(C_1 - C_0 - f'\Gamma) .$$

$C_1 - C_0 - f'\Gamma$ ist aber Cozyklus, womit Satz 10' bewiesen ist.

Wir bemerkten vorn, daß $\varphi' C$ von der Eckpunktnumerierung in $L$ abhängt; damit wäre auch unsere soeben definierte Abbildung $h'$ hiervon abhängig. Daß dies aber wirklich nicht zutrifft, wird durch den folgenden Hilfssatz bewiesen.

*Hilfssatz 6:* Es sei $\zeta$ ein Cozyklus aus $\Lambda$ und $f'\zeta = r'C$. Dann ist die Cohomologieklasse von $\varphi' C$ unabhängig von der Eckpunktordnung in $L$.

*Beweis:* $L$, $L'$, $L^*$ und $\Lambda$, $\Lambda'$ seien die in § 7 betrachteten Unterteilungen von $L$ und $\Lambda$; $u^*$, $s$, $\sigma$, $f$ und $\mathfrak{f}$ seien die dort eingeführten Abbildungen. Dann gilt mit den ebenfalls schon dort definierten Eckpunktordnungen in $\Lambda'$ und $L'$ nach (4.6) und (6.1)

$$C \cap L = s(s'C \cap L') = su^* \partial C ,$$

somit, wegen $fs = \sigma\mathfrak{f}$ (Formel (7.7)),

$$f(C \cap L) = fsu^* \partial C = \sigma(\mathfrak{f} u^* \partial C) .$$

Der Komplex $\mathfrak{f} u^* \partial C$ ist frei von jeder Eckpunktordnung definiert. Er ist Zyklus; denn nach (6.2), (6.1), (7.8) und (4.6) gilt, wegen $\mathfrak{f} L' = 0$:

$$r\mathfrak{f} u^* \partial C = \pm \mathfrak{f} u^* \partial r'C = \pm \mathfrak{f}(s'r'C \cap L') = \pm \mathfrak{f}(s'f'\zeta \cap L') = \pm \sigma'\zeta \cap \mathfrak{f} L' = 0 .$$

Somit ist die Homologieklasse des Zyklus

$$f(C \cap L) = \sigma(\mathfrak{f}u^*\partial C) \sim \mathfrak{f}u^*\partial C$$

unabhängig von jeder Eckpunktnumerierung bestimmt; folglich ist dies auch die Cohomologieklasse von $\varphi' C$, w.z.b.w.

Wir definieren nun ähnlich wie vorn: Es sei $\mathfrak{K}'$ die Menge der Cohomologieklassen von $\mathfrak{B}'(\Lambda) = \mathfrak{B}'$, für deren Cozyklen $\zeta$ die Beziehung $f'\zeta \backsim 0$ gilt. Es sei $\mathfrak{F}'$ die Menge der Cohomologieklassen von $\mathfrak{B}'$, welche $\varphi'$-Bilder von Cozyklen aus $L$ enthalten. $\mathfrak{K}'^p$ und $\mathfrak{F}'^p$ seien die Mengen der $p$-dimensionalen Elemente von $\mathfrak{K}'$, resp. $\mathfrak{F}'$. All dies sind Untergruppen von $\mathfrak{B}'$, resp. von $\mathfrak{B}'^p$. Wir werden im folgenden oft von Cozyklen aus einer dieser Gruppen sprechen. Darunter wollen wir Cozyklen verstehen, deren Cohomologieklassen der entsprechenden Gruppe angehören.

Mit Hilfe dieser Definitionen können wir unsere Resultate über $h'$ zusammenfassen in dem

*Satz 11': $h'$ induziert einen Homomorphismus $H'$ der Untergruppe $\mathfrak{K}'^p$ von $\mathfrak{B}'^p$ in die Faktorgruppe* $\mathfrak{B}'^{p-e}/\mathfrak{F}'^{p-e}(e = d + 1)$. Derselbe ist von keiner Eckpunktnumerierung abhängig.

Ein erster Zusammenhang zwischen den Homomorphismen $H$ und $H'$ wird durch den folgenden Satz 13 dargelegt.

*Hilfssatz 7:* Ist der Cozyklus $\zeta \subset \mathfrak{K}'$, dann ist der Zyklus $\bar{\delta}\zeta \subset \mathfrak{K}$, und umgekehrt. Denn folgende vier Aussagen sind äquivalent: $\zeta \subset \mathfrak{K}'$; $f'\zeta \backsim 0$; $\varphi\bar{\delta}\zeta = \bar{\partial} f'\zeta \sim 0$; $\bar{\delta}\zeta \subset \mathfrak{K}$.

*Hilfssatz 8:* Ist der Cozyklus $Z \subset \mathfrak{F}'$, dann ist der Zyklus $\bar{\delta}Z \subset \mathfrak{F}$, und umgekehrt. Denn folgende vier Aussagen sind äquivalent: $Z \subset \mathfrak{F}'$; es gibt einen Cozyklus $\mathfrak{Z}$ in $L$ mit $\varphi'\mathfrak{Z} \backsim Z$; es gibt einen Zyklus $\bar{\partial}\mathfrak{Z}$ in $L$ mit $f\bar{\partial}\mathfrak{Z} \sim \bar{\delta}Z$; $\bar{\delta}Z \subset \mathfrak{F}$.

Es bezeichne $\Delta$ den durch $\bar{\delta}$ erzeugten (von der Eckenordnung in $\Lambda$ aber unabhängigen) Isomorphismus von $\mathfrak{B}'$ auf $\mathfrak{B}$ (§ 7). Dann gilt

*Satz 13: Ist die Cohomologieklasse $\zeta \subset \mathfrak{K}'$, so ist*

$$H\Delta\zeta = (-1)^{n+1}\Delta H'\zeta\,. \tag{10.4}$$

*Beweis:* $\zeta^p$ sei Cozyklus aus $\zeta$ und

$$f'\zeta^p = r'C^{p-1}\,, \quad h'\zeta^p = (-1)^p\varphi' C^{p-1}\,.$$

Dann gilt nach (8.2) und (6.5):

$$\varphi\bar{\delta}\zeta^p = \bar{\partial}f'\zeta^p = \bar{\partial}r'C^{p-1} = (-1)^{n-p+1}r\bar{\partial}C^{p-1},$$

somit nach (10.1) und (10.3)

$$h\bar{\delta}\zeta^p = (-1)^{n+1-p}f\bar{\partial}C^{p-1} \sim (-1)^{n+1-p}\bar{\delta}\varphi'C = (-1)^{n+1}\bar{\delta}h'\zeta^p,$$

w.z.b.w.

Aus diesem Satze folgt in Verbindung mit Satz 12 der

*Satz 12': Der Homomorphismus $H'$ ist invariant in der Abbildungsklasse von $f$.*

Daneben besteht ein weiterer Zusammenhang zwischen $H$ und $H'$. Er folgt aus den Sätzen 1—4 von § 2 und basiert auf der Dualität der Homomorphismen $r$ und $r'$, $f$ und $f'$, sowie einer entsprechenden Verwandtschaft von $\varphi$ und $\varphi'$.

$\varphi'$ wurde zu Beginn dieses Paragraphen nicht dual zu $\varphi$ erklärt. Gleichwohl gilt für einen Zyklus $\bar{\zeta} (= \zeta \cap \Lambda)$ aus $\Lambda$ ($\zeta$ ist Cozyklus aus $\Lambda$) und einen algebraischen Komplex $C$ aus $L$, für welchen $\varphi'C$ erklärt ist, die Formel für das Skalarprodukt

$$C \cdot \varphi\bar{\zeta} = \pm\, \varphi'C \cdot \bar{\zeta}, \tag{10.5}$$

welche bis aufs Vorzeichen übereinstimmt mit Formel (1.4), die für duale Homomorphismen charakteristisch ist. Denn es ist nach (4.3) und (4.4) für beliebige Komplexe $A$ und $B$ aus $L$, wenn die mit der gegebenen Eckpunktordnung gebildeten Produkte mit $\cup$ und $\cap$, die mit der inversen berechneten mit $\cup'$ und $\cap'$ bezeichnet werden:

$$A \cdot (B \cap L) = (A \cup B) \cdot L = \pm\,(B \cup' A) \cdot L = \pm\, B \cdot (A \cap' L).$$

Dabei hängt das Vorzeichen nur von den Dimensionszahlen von $A$ und $B$ ab. Entsprechendes gilt für Komplexe aus $\Lambda$. Damit folgt nach (8.2), (1.4) und (10.1)

$$\begin{aligned} C \cdot \varphi\bar{\zeta} &= C \cdot \varphi(\zeta \cap \Lambda) = C \cdot (f'\zeta \cap L) = \pm\, f'\zeta \cdot (C \cap' L) = \\ &= \pm\, \zeta \cdot f(C \cap' L) = \pm\, \zeta \cdot (\varphi'C \cap' \Lambda) = \pm\, \varphi'C \cdot (\zeta \cap \Lambda) = \pm\, \varphi'C \cdot \bar{\zeta} \end{aligned}$$

w.z.b.w.

Weiter gilt: Ist $\zeta$ Zyklus aus $\mathfrak{R}^p$, $Z'$ Cozyklus aus $\mathfrak{F}'^p$, also $Z' \backsim \varphi'\mathbf{Z}'$ für einen geeigneten Cozyklus $\mathbf{Z}'$ aus $L$, so wird

$$\zeta \cdot Z' = \zeta \cdot \varphi'\mathbf{Z}' = \varphi\zeta \cdot \mathbf{Z}' = 0, \tag{10.6}$$

da $\varphi\zeta \sim 0$ ist. Entsprechend gilt für einen Zyklus $Z \subset \mathfrak{F}$ und einen Cozyklus $\zeta' \subset \mathfrak{R}'$:

$$Z \cdot \zeta' = 0. \tag{10.7}$$

Ist $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}_m (m \geqslant 2)$ oder $= \mathfrak{R}$, und erfüllt ein Zyklus $\zeta$ aus $\Lambda$ die Relation $\zeta \cdot Z' = 0$ für alle Cozyklen $Z' \subset \mathfrak{F}'$, so ist für alle Cozyklen $\boldsymbol{Z}'$ aus $L$

$$\varphi\zeta \cdot \boldsymbol{Z}' = \zeta \cdot \varphi' \boldsymbol{Z}' = 0\,,$$

also, nach Satz 13, $\varphi\zeta$ Rand in $L$, folglich $\zeta \subset \mathfrak{K}$. Ebenso gilt die hierzu duale Aussage.

Diese Resultate fassen wir mit Hilfe von Satz 1 folgendermaßen zusammen:

*Satz 14:* Für Klassen $\zeta \subset \mathfrak{K}$ und $Z' \subset \mathfrak{F}'$ gilt $\zeta \cdot Z' = 0$. — Für Klassen $Z \subset \mathfrak{F}$ und $\zeta' \subset \mathfrak{K}'$ gilt $Z \cdot \zeta' = 0$.

*Satz 15:* Es sei $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}_m (m \geqslant 2)$ oder $= \mathfrak{R}$. Erfüllt die Homologieklasse $\zeta$ aus $\Lambda$ die Gleichung $\zeta \cdot Z' = 0$ für alle Klassen $Z' \subset \mathfrak{F}'$, so ist $\zeta \subset \mathfrak{K}$. — Erfüllt die Cohomologieklasse $\zeta'$ aus $\Lambda$ die Gleichung $Z \cdot \zeta' = 0$ für alle $Z \subset \mathfrak{F}$, so ist $\zeta' \subset \mathfrak{K}'$.

Wie vorn aus den Sätzen 1 und 3 für $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}_m (m \geqslant 2)$ oder $= \mathfrak{R}$ die Isomorphie der Gruppen $\mathfrak{B}^p$ und $\mathfrak{B}'^p$ folgte, ergibt sich jetzt aus den Sätzen 14 und 15

*Satz 16:* Für $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}_m (m \geqslant 2)$ oder $= \mathfrak{R}$ bestehen die Isomorphien

$$\mathfrak{B}^p / \mathfrak{K}^p \approx \mathfrak{F}'^p, \qquad \mathfrak{B}'^p / \mathfrak{K}'^p \approx \mathfrak{F}^p\,.$$

Hieraus folgt, wegen $\mathfrak{B}^p \approx \mathfrak{B}'^p$, das

*Korollar zu Satz 16:* Für $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$ gelten die Isomorphien

$$\mathfrak{B}^p / \mathfrak{F}^p \approx \mathfrak{K}'^p, \qquad \mathfrak{B}'^p / \mathfrak{F}'^p \approx \mathfrak{K}^p\,.$$

Noch ein weiterer Satz gehört an diese Stelle: Es sei $\zeta$ Zyklus aus $\mathfrak{K}^p$, $\zeta'$ Cozyklus aus $\mathfrak{K}'^q$, $q - p = e\ (= d + 1)$. Es sei also

$$\varphi\zeta = rC, \qquad h\zeta = fC,$$
$$f'\zeta' = r'C', \quad h'\zeta' = (-1)^q \varphi' C'.$$

Dann finden wir

$$h\zeta \cdot \zeta' = fC \cdot \zeta' = C \cdot f'\zeta' = C \cdot r'C' = rC \cdot C' = \varphi\zeta \cdot C' = \pm\, \zeta \cdot \varphi' C'$$
$$= \pm\, \zeta \cdot h'\zeta'\,.$$

Nach Satz 14 können wir Skalarprodukte zwischen Klassen aus $\mathfrak{K}$ und Elementen aus $\mathfrak{B}'/\mathfrak{F}'$ oder zwischen Klassen aus $\mathfrak{K}'$ und Elementen aus $\mathfrak{B}/\mathfrak{F}$ bilden. Der Produktwert kann mittels beliebiger Repräsentanten der Faktorklassen berechnet werden. Damit läßt sich das oben gefundene Resultat aussprechen in dem

*Satz 17:* Für Klassen $\zeta^p \subset \mathfrak{K}$ und $\zeta^q \subset \mathfrak{K}'$, $q - p = e$ gilt

$$H\zeta^p \cdot \zeta^q = \pm\, \zeta^p \cdot H'\zeta^q\,. \tag{10.8}$$

Hierin sind $H\zeta^p$ und $H'\zeta^q$ Klassen aus $\mathfrak{B}/\mathfrak{F}$, resp. $\mathfrak{B}'/\mathfrak{F}'$. Das Vorzeichen hängt nur von den Dimensionen ab.

## § 11. Multiplikative Eigenschaften der Homomorphismen H' und H

Wir bemerken vorerst, daß $\mathfrak{F}'$ ein Ideal in $\mathfrak{R}'(\Lambda)$ ist; denn nach (10.2) gilt für Cozyklen $\zeta$ aus $\Lambda$ und $\boldsymbol{Z}$ aus $L$

$$\zeta \cup \varphi'\boldsymbol{Z} \backsim \varphi'(f'\zeta \cup \boldsymbol{Z}) \subset \mathfrak{F}'\,. \tag{11.1}$$

Ebenso folgt aus (4.5), daß $\mathfrak{K}'$ ein Ideal in $\mathfrak{R}'(\Lambda)$ ist. $H'$ ist somit eine additiv homomorphe Abbildung des Ideals $\mathfrak{K}'$ von $\mathfrak{R}'(\Lambda)$ in den Restklassenring $\mathfrak{R}'(\Lambda)/\mathfrak{F}'$. Schon aus Dimensionsgründen kann aber $H'$ kein multiplikativer Homomorphismus sein. Gleichwohl besitzt $H'$ gewisse multiplikative Eigenschaften. Diese folgen aus den Formeln (4.5) und (10.2).

Auf Grund der Formeln (10.4) und (6.11) gilt mit jedem Satz über $H'$ und das $\cup$-Produkt ein analoger Satz über $H$ und die Schnittbildung. Wir werden vorerst zwei Sätze für $H'$ herleiten, später die analogen Sätze (ohne explizite Beweise) für $H$ aussprechen. Diese Anordnung ist in folgender Tatsache begründet: Während sich die Sätze über $H'$ leicht beweisen lassen, sind die direkten Beweise für die entsprechenden Sätze über $H$ mühsamer, weil bei Schnittbildungen verschiedene Unterteilungen von $L$ und $\Lambda$ betrachtet werden müssen. Hierin liegt neben den an sich interessanten Resultaten des vorigen Paragraphen der Grund zur Einführung von $H'$.

Ist der in Formel (11.1) auftretende Cozyklus $\zeta \subset \mathfrak{K}'$, also $f'\zeta \backsim 0$, so folgt aus ihr $\zeta \cup \varphi'\boldsymbol{Z} \backsim 0$. Also gilt der

*Hilfssatz 9':* Sind $\zeta$ und $Z$ Cohomologieklassen von $\Lambda$, $\zeta \subset \mathfrak{K}'$, $Z \subset \mathfrak{F}'$, so wird $\zeta \cup Z = 0$ in $\mathfrak{R}'(\Lambda)$.

*Folgerung:* Man kann das $\cup$-Produkt von Klassen aus $\mathfrak{K}'$ mit solchen aus $\mathfrak{B}'/\mathfrak{F}'$ bilden. Das Produkt ist ein Element des Homologierings $\mathfrak{R}'(\Lambda)$ und wird mittels beliebiger Repräsentanten der Faktorklassen berechnet.

$\zeta^p$ und $\zeta^q$ seien Cozyklen aus $\mathfrak{K}'$, und es sei

$$f'\zeta^p = r'C^{p-1}, \qquad h'\zeta^p = (-1)^p\varphi'C^{p-1},$$
$$f'\zeta^q = r'C^{q-1}, \qquad h'\zeta^q = (-1)^q\varphi'C^{q-1}.$$

In $\Lambda$ und $L$ seien Eckpunktordnungen im Kleinen definiert, die durch $f$ erhalten bleiben. Den damit gebildeten Produkten geben wir die Zeichen $\cup$ und $\cap$. Offenbar erhält $f$ auch die inversen Eckpunktordnungen von $L$ und $\Lambda$. Den damit gebildeten Produkten geben wir die Zeichen $\cup'$ und $\cap'$. Dann gilt nach (4.4) und (5.1)

$$\begin{aligned} r'(C^{p-1} \cup C^{q-1}) &= r'C^{p-1} \cup C^{q-1} + (-1)^{p-1}C^{p-1} \cup r'C^{q-1} \\ &= f'\zeta^p \cup C^{q-1} + (-1)^{(p-1)(q-1)} f'\zeta^q \cup' C^{p-1}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt nach Satz 8′ (Formel (10.2)) und Hilfssatz 6:

$$\begin{aligned} 0 &\backsim \varphi'(f'\zeta^p \cup C^{q-1}) + (-1)^{(p-1)(q-1)}\varphi'(f'\zeta^q \cup' C^{p-1}) \\ &\backsim \zeta^p \cup \varphi'C^{q-1} + (-1)^{(p-1)(q-1)}\zeta^q \cup' \varphi'C^{p-1}, \end{aligned}$$

oder

$$\zeta^p \cup h'\zeta^q \backsim (-1)^{pq}\zeta^q \cup' h'\zeta^p,$$

somit nach (5.9)

$$\zeta^p \cup h'\zeta^q \backsim (-1)^{pq}\zeta^q \cup h'\zeta^p. \tag{11.2}$$

Aus diesem Resultat ergibt sich mit Hilfssatz 9′ der

*Satz 18′: $\zeta^p$ und $\zeta^q$ seien Cohomologieklassen aus $\mathfrak{K}'$. Dann gilt*

$$\zeta^p \cup H'\zeta^q = (-1)^{pq}\zeta^q \cup H'\zeta^p. \tag{11.3}$$

Hierin sind $H'\zeta^p$ und $H'\zeta^q$ Klassen aus $\mathfrak{R}'(\Lambda)/\mathfrak{F}'$, die Gleichung aber eine solche im Homologiering $\mathfrak{R}'(\Lambda)$.

$Z$ und $\zeta$ seien Cozyklen in $\Lambda$, $\zeta \subset \mathfrak{K}'$. Es sei ferner Dim $Z = p$, Dim $\zeta = q$. Dann finden wir mit $f'\zeta = r'C$ und $h'\zeta = (-1)^q\varphi'C$ nach (5.1)

$$r'(f'Z \cup C) = (-1)^p f'Z \cup r'C = (-1)^p f'(Z \cup \zeta),$$

somit nach Formel (10.2)

$$(-1)^p h'(Z \cup \zeta) = (-1)^{p+q}\varphi'(f'Z \cup C) \backsim (-1)^{p+q} Z \cup \varphi'C,$$

also

$$h'(Z \cup \zeta) \backsim Z \cup h'\zeta. \tag{11.4}$$

Es gilt daher

*Satz 19':* $Z$, $Z'$ und $\zeta$ seien Cohomologieklassen aus $\Lambda$, $\zeta \subset \mathfrak{K}'$; $Z'$ sei enthalten in der Klasse $H'\zeta$ von $\mathfrak{R}'(\Lambda)/\mathfrak{J}'$, also $Z' \subset H'\zeta$. Dann gilt: $Z \cup Z' \subset H'(Z \cup \zeta)$.

Die analogen Resultate für $H$ lauten: $\mathfrak{J}$ ist ein Ideal im Schnittring $\mathfrak{R}(\Lambda)$. (Dies folgt direkt aus Formel (7.5.)) Da $\Lambda$ Einselement ist von $\mathfrak{R}(\Lambda)$, gilt folglich mit $\Lambda \subset \mathfrak{J}$ auch $Z \subset \mathfrak{J}$ für alle $Z \subset \mathfrak{R}(\Lambda)$, d. h. hat $\Lambda$ einen Urbildzyklus $\boldsymbol{Z}^\nu$ in $L$, so besitzen sämtliche Zyklen aus $\Lambda$ Urbilder in $L$. — $\mathfrak{K}$ ist ein Ideal in $\mathfrak{R}(\Lambda)$. (Dies folgt direkt aus (7.4).) $H$ ist somit eine additiv homomorphe Abbildung des Ideals $\mathfrak{K}$ in den Restklassenring $\mathfrak{R}(\Lambda)/\mathfrak{J}$, also stets die Nullabbildung, falls $\Lambda \subset \mathfrak{J}$.

*Hilfssatz 9:* Sind $\zeta$ und $Z$ Homologieklassen von $\Lambda$, $\zeta \subset \mathfrak{K}$, $Z \subset \mathfrak{J}$, so wird $\zeta \circ Z = 0$ in $\mathfrak{R}(\Lambda)$.

*Folgerung:* Somit lassen sich Schnitte definieren zwischen Klassen aus $\mathfrak{K}$ und solchen aus $\mathfrak{R}(\Lambda)/\mathfrak{J}$. Diese sind selbst Elemente des Schnittrings $\mathfrak{R}(\Lambda)$ und lassen sich mittels beliebiger Repräsentanten der „miteinander geschnittenen" Klassen berechnen. In diesem Sinne gilt

*Satz 18: $\zeta^p$ und $\zeta^q$ seien Homologieklassen aus $\mathfrak{K}$. Dann ist*

$$\zeta^p \circ H\zeta^q = (-1)^{(\nu-p)(\nu-q)}\zeta^q \circ H\zeta^p \,. \tag{11.5}$$

Damit ist ein Zusammenhang zwischen $H$-Bildern verschiedener Klassen beliebiger Dimensionen aus $\mathfrak{K}$ hergestellt. Wir werden bald wichtige Folgerungen aus diesem Satze herleiten.

Es sei speziell $p + q = \nu - e$ $(e = d + 1)$. Dann drückt Satz 18 eine bekannte Tatsache aus; denn sind $\zeta^p$ und $\zeta^q$ Zyklen aus $\mathfrak{K}$, also $\varphi\zeta^p = rC^{p+e}$ und $\varphi\zeta^q = rC^{q+e}$, so ist (vgl. A. H., p. 416), wegen $\mathrm{Dim}\,\varphi\zeta^p + \mathrm{Dim}\,\varphi\zeta^q = p + d + q + d = \nu - e + 2d = n - 1$, die Verschlingungszahl $\mathfrak{v}(\varphi\zeta^p, \varphi\zeta^q)$ der (zueinander fremd vorausgesetzten) Zyklen $\varphi\zeta^p$ und $\varphi\zeta^q$ definiert. Sie ist gleich der Schnittzahl (vgl. A. H., p. 413) von $\varphi\zeta^p$ und $C^{q+e}$ ($\varphi\zeta^p$ und $C^{q+e}$ in relativ allgemeiner Lage angenommen). Diese stimmt aber, wie man mit Hilfe von (7.6) sieht, mit der Schnittzahl der Zyklen $\zeta^p$ und $h\zeta^q = fC^{q+e}$ überein. Also gilt

$$\mathfrak{v}(\varphi\zeta^p, \varphi\zeta^q) = \text{Schnittzahl}\,(\zeta^p, h\zeta^q)\,. \tag{11.6}$$

Daher ist Formel (11.5) in diesem Falle nur eine Folge der bekannten Verschlingungszahlrelation

$$\mathfrak{v}(\varphi\zeta^p, \varphi\zeta^q) = \pm\,\mathfrak{v}(\varphi\zeta^q, \varphi\zeta^p)\,.$$

Nach Formel (11.6) folgt aus der Existenz von Zyklen $\varphi\zeta^p$ und $\varphi\zeta^q$ in $L$, welche miteinander verschlungen sind und von denen wenigstens einer in $L$ homolog 0 ist, daß $H$ nicht die Nullabbildung ist. Folglich ist dann $f$ nicht nullhomotop. Es sei speziell $p = 0$ (also $q = \nu - e$) und $\zeta^q \subset \mathfrak{K}$. Dann ist $h\zeta^q = \gamma\Lambda$. Folglich

$$\pm \gamma = \text{Schnittzahl}\,(\zeta^0, \gamma\Lambda) = \mathfrak{v}(\varphi\zeta^0, \varphi\zeta^{\nu-e}) \ .$$

Aus dem Nichtverschwinden dieser Verschlingungszahl folgt somit die Existenz eines Zyklus $\zeta^{\nu-e} \subset \mathfrak{K}$, für welchen $h\zeta^{\nu-e} = \gamma\Lambda (\gamma \neq 0)$ gilt. Nach den Folgerungen zu Satz 12 ist dann die Abbildung $f$ wesentlich.

Hierin ist als Spezialfall, nämlich für $\nu - e = 0$, also $n = 2d + 1$, die in der Einleitung erwähnte $\gamma$-Theorie von H. Hopf[9]) enthalten.

Umgekehrt gibt es (wenigstens im Falle $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}_m (m \geqslant 2)$ oder $= \mathfrak{R}$) stets Zyklen $\varphi\zeta^p$ und $\varphi\zeta^q \sim 0$ in $L$, welche miteinander verschlungen sind, falls $H$ nicht die Nullabbildung ist. Denn ist $\zeta^q$ ein Zyklus aus $\mathfrak{K}$ und $h\zeta^q \neq 0$, so gibt es einen Zyklus $\zeta^p$, $p = \nu - (q + e)$, mit

$$0 \neq \text{Schnittzahl}\,(\zeta^p, h\zeta^q) = \mathfrak{v}(\varphi\zeta^p, \varphi\zeta^q) \,.$$

Die Existenz solcher verschlungener Zyklen $\varphi\zeta^p$ und $\varphi\zeta^q \sim 0$ in $L$ ist somit eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $H$ nicht die Nullabbildung ist.

Analog zu Satz *19'* gilt schließlich

*Satz 19:* $Z$, $Z'$ und $\zeta$ seien Homologieklassen aus $\Lambda$, $\zeta \subset \mathfrak{K}$; $Z'$ sei enthalten in der Klasse $H\zeta$ von $\mathfrak{R}(\Lambda)/\mathfrak{F}$, also $Z' \subset H\zeta$. Dann gilt $Z \circ Z' \subset H(Z \circ \zeta)$.

Von nun an werden wir der „Anschaulichkeit" halber nur noch den Homomorphismus $H$ weiter untersuchen und uns merken, daß entsprechende Resultate stets auch für $H'$ gelten.

Wir wissen (§ 9): Die Existenz einer Homologieklasse $\zeta_0 \subset \mathfrak{K}$ mit $\Lambda \subset H\zeta_0$ hat die Wesentlichkeit von $f$ zur Folge. Es gilt aber noch mehr: $\zeta_0$ existiere; dann wird nach Satz 18 mit $\zeta^p = \zeta$, $\zeta^q = \zeta_0$ nach (6.11) und (5.9)

$$\zeta = (-1)^{(\nu-p)e}\zeta_0 \circ H\zeta = (-1)^{(\nu-p)e-(\nu-p-e)e} H\zeta \circ \zeta_0 = (-1)^e H\zeta \circ \zeta_0 .$$

Somit gilt

*Satz 20:* Existiert $\zeta_0$, so gilt für $\zeta \subset \mathfrak{K}$

$$\zeta = (-1)^e H\zeta \circ \zeta_0 \,. \tag{11.7}$$

*Folgerungen:* 1. Die Ordnung eines jeden $\zeta \subset \mathfrak{K}$ ist Teiler der Ordnung von $\zeta_0$. Ist also $\zeta_0 = 0$, so ist $\mathfrak{K}$ die Nullgruppe, $H$ die Nullabbildung. Dann ist aber, wegen $\Lambda \subset H(\zeta_0): \Lambda \subset \mathfrak{F}$, und damit $\mathfrak{R}(\Lambda) \equiv \mathfrak{F}$.

2. Formel (11.7) liefert für ungerades $e$, also gerades $d$, mit $\zeta = \zeta_0$: Es ist $2\zeta_0 = 0$. In diesem Falle wähle man $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}_2$. Dann lautet (11.7):

$$\zeta = H\zeta \circ \zeta_0 . \tag{11.8}$$

Genau dieselbe Form erhält (11.7) bei beliebigem $\mathfrak{J}$, wenn $e$ gerade, $d$ also ungerade ist. Aus der zweiten Folgerung ziehen wir

*Satz 21: Existiert eine Homologieklasse $\zeta_0 \subset \mathfrak{K}$ mit $\Lambda \subset H\zeta_0$, und gilt $2\zeta_0 \neq 0$, so ist $d = n - \nu$ ungerade.*

Weiter besteht der

*Satz 22: Existiert $\zeta_0 \subset \mathfrak{K}$ mit $\Lambda \subset H\zeta_0$, so ist $H$ eine (additiv) isomorphe Abbildung von $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{R}(\Lambda)/\mathfrak{F}$.*

*Beweis:* 1. Ist $\zeta \subset \mathfrak{K}$, $H\zeta \subset \mathfrak{F}$, so wird nach (11.8) und Hilfssatz 9

$$\zeta = H\zeta \circ \zeta_0 = 0 \qquad \text{in } \mathfrak{R}(\Lambda).$$

Folglich ist $H$ ein *Isomorphismus.*

2. Nach Satz 19 gilt für alle $Z \subset \mathfrak{R}(\Lambda)$

$$Z = Z \circ \Lambda = Z \circ H\zeta_0 \subset H(Z \circ \zeta_0) .$$

Somit ist $H$ eine Abbildung von $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{R}(\Lambda)/\mathfrak{F}$.

Damit ist Satz 22 bewiesen. Seine Umkehrung ist trivial: Wenn $H$ eine Abbildung von $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{R}(\Lambda)/\mathfrak{F}$ ist, so gibt es ein $\zeta_0$ der genannten Art. Die Existenz eines solchen $\zeta_0$ ist somit äquivalent damit, daß $H$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{R}(\Lambda)/\mathfrak{F}$ ist.

# KAPITEL III

# Der H-Prozess bei Sphärenfaserungen

## § 12. Geometrische Bedeutung von $\varphi$ im Falle von Faserabbildungen

*Voraussetzungen:* Wir übernehmen sämtliche Definitionen und Bezeichnungen aus dem vorigen Kapitel. *$f_0$ sei eine stetige Abbildung von $L^n$ auf $\Lambda^\nu$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Die Urbildmenge eines jeden Punktes $\pi \subset \Lambda$ ist eine Sphäre $S$ der Dimension $d = n - \nu > 0$.*

2. *Die Urbildmenge eines Simplexes* $|\xi| \subset \Lambda$ *ist homöomorph dem topologischen Produkt* $|\xi \times S|$, *und zwar so, daß hierin die Urbildmenge* $S$ *eines beliebigen Punktes* $\pi$ *aus* $|\xi|$ *das Produkt* $|\pi \times S|$ *ist.*

Wir sagen dann: Es liegt eine *Faserung von* $L^n$ *in Sphären* $S^d$ vor. $S^d$ heißt die *Faser*, $f_0$ die *Faserabbildung* und $\Lambda^\nu$ der *Faserraum*; er entsteht aus $L^n$ durch Identifizieren der Punkte einer jeden Faser. Von der Tatsache, daß die Faser $S$ eine Sphäre ist, werden wir erst später vollen Gebrauch machen; vorderhand ist für uns nur wichtig, daß $S$ im Sinne der kombinatorischen Topologie als Zyklus aufgefaßt werden kann.

Für jedes einzelne Simplex $|\xi| \subset \Lambda$ werde der Urbildkomplex $|\xi \times S|$ in (krumme) Zellen unterteilt. Fügt man die so zerlegten Teilkomplexe $|\xi \times S|$ zum Komplex $L$ zusammen, so überschneiden sich gewisse dieser Zellenunterteilungen. Wählt man dort, wo solche Überschneidungen auftreten, die Zellendurchschnitte als neue Zellen, so entsteht eine gemeinsame Verfeinerung der sich überdeckenden Unterteilungen. Damit ist eine Zellenzerlegung von $L$ gefunden, die der Faserung angepaßt ist. Wir bezeichnen sie mit $L$.

$L'$ und $\Lambda'$ seien die baryzentrischen Unterteilungen von $L$ und $\Lambda$. Die dadurch erzeugten Abbildungen der Gruppen $\mathfrak{L}(L)$ auf $\mathfrak{L}(L')$ und $\mathfrak{L}(\Lambda)$ auf $\mathfrak{L}(\Lambda')$ nennen wir $u$ und $\omega$. Die Eckpunkte von $L'$ und $\Lambda'$ werden wie in § 5 auf natürliche Weise angeordnet. Sodann werden beide Ordnungen umgekehrt. Es kommt also der Schwerpunkt $e_i$ einer Zelle $|x^p| \subset L$ stets dann vor dem Schwerpunkt $e_k$ einer Zelle $|x^q| \subset L$, wenn $p < q$ ist.

$f$ sei diejenige simpliziale Approximation von $f_0$, welche jeden Eckpunkt $e$ von $L'$ auf den letzten Eckpunkt des Trägers von $f_0 e$ in $\Lambda'$ abbildet. $f$ erhält dann die Ordnung im Kleinen. Gemäß dieser Definition ordnet $f$ dem Eckpunkt $e \subset L'$ dann und nur dann den Schwerpunkt des Simplexes $|\xi| \subset \Lambda$ zu, wenn $e$ innerer Punkt des Urbildes $|\xi \times S|$ von $|\xi|$ ist.

Nunmehr ist nach (8.2) auch $\varphi$ (seit Ende des § 8 schreiben wir $\varphi$ statt $\overline{\varphi}$) erklärt, und zwar für alle jene Komplexe aus $\Lambda'$, welche sich in der Form $\Gamma \cap \Lambda'$ darstellen lassen. Geht man auf die Definition des $\cap$-Produktes (§ 4) zurück, so sieht man, daß die so darstellbaren Komplexe genau die baryzentrisch unterteilten Simplexe $\xi$ von $\Lambda$, sowie deren Linearverbindungen sind.

Ganz gleich ergibt sich, daß die als $\varphi$-Bilder in $L'$ auftretenden Komplexe, welche nach (8.2) von der Form $C \cap L'$ sind, Linearverbindungen der baryzentrisch unterteilten Zellen aus $L$ sind. Wir werden zeigen:

*Ist $\xi^p$ ein Simplex aus $\Lambda$, so ist $\varphi\omega\xi^p$ der geeignet orientierte Urbildkomplex $|\xi^p \times S|$ von $|\xi^p|$.*

In der Tat. Es sei $\xi^p$ Seite des Simplexes $|\xi^\nu|$ aus $\Lambda$, $\eta^q$ mit $q = \nu - p$ ein Simplex aus $|\omega\xi^\nu|$, für welches

$$\omega\xi^p = \eta^q \cap \omega\xi^\nu$$

gilt. Aus der Definition des $\cap$-Produktes, aus der Tatsache, daß $|\omega\xi^\nu|$ baryzentrische Unterteilung von $|\xi^\nu|$ ist, und aus der Vorschrift über die Eckenordnung folgt, daß der erste Eckpunkt $\varepsilon_0$ von $\eta^q$ der Schwerpunkt des Simplexes $|\xi^p|$ sein muß.

Nun ist nach (8.2), wegen $\eta^q \cap \omega\xi^\nu = \eta^q \cap \Lambda'$,

$$\varphi\omega\xi^p = \varphi(\eta^q \cap \omega\xi^\nu) = f'\eta^q \cap L' .$$

Dabei ist $f'\eta^q = \Sigma\, y^q$, summiert über alle Simplexe $y^q \subset L'$, für die $f y^q = \eta^q$. Gemäß der Definition der simplizialen Approximation $f$ von $f_0$ muß der erste Eckpunkt $e_0$ eines solchen Simplexes $y^q$, wegen $f e_0 = \varepsilon_0$, im Urbild $|\xi^p \times S|$ von $|\xi^p|$ liegen.

Entweder ist $y^q \cap L' = 0$ oder es gibt eine Zelle $x^{p+d}$ in $L$ mit

$$y^q \cap L' = u x^{p+d} .$$

Letzteres ist genau dann der Fall, wenn der Schwerpunkt von $|x^{p+d}|$ der erste Eckpunkt $e_0$ von $|y^q|$ ist. Mit ihrem Schwerpunkt liegt aber die ganze Zelle $|x^{p+d}|$ in $|\xi^p \times S|$.

Damit ist gezeigt: $\varphi\omega\xi^p$ ist ein $(p+d)$-dimensionaler Komplex in $|\xi^p \times S|$. Daraus folgt mit (8.2) und (5.2) (Beweis wie für (7.2)):

$$r\varphi\omega\xi^p = (-1)^d \varphi\omega r\xi^p \subset |r\xi^p \times S| , \tag{12.1}$$

d. h. $\varphi\omega\xi^p$ ist $(p+d)$-dimensionaler Relativzyklus in der $(p+d)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $|\xi^p \times S|$ bis auf deren Rand (vgl. A. H., p. 193), somit von der Form

$$\varphi\omega\xi^p = au(\xi^p \times S) . \tag{12.2}$$

Hieraus folgt weiter

$$\begin{aligned}(-1)^d \varphi\omega r\xi^p = r\varphi\omega\xi^p &= rau(\xi^p \times S)\\ &= au(r\xi^p \times S) ,\end{aligned} \tag{12.3}$$

d. h. der in (12.2) auftretende Koeffizient $a$ ist für alle Seiten des Simplexes $|\xi^p|$ bis aufs Vorzeichen derselbe. Insbesondere gilt für $p = \nu$, wie man sofort bestätigt,

$$\varphi\omega\xi^\nu = u(\xi^\nu \times S) \tag{12.4}$$

bei geeigneter Orientierung von $S$ über $|\xi^\nu|$. Orientiert man schließlich sämtliche $\xi^\nu \subset \Lambda$ so, daß $\Sigma\, \xi^\nu = \Lambda$ gilt, und wählt man über jedem $\xi^\nu$ diejenige Orientierung von $S$, welche (12.4) befriedigt, so wird

$$L' = \varphi\Lambda' = \varphi\Sigma\,\omega\xi^\nu = \Sigma\, u(\xi^\nu \times S)$$

ein Zyklus, woraus folgt, daß die Orientierungen von $S$ über den Durchschnitten zweier $\xi^\nu$ miteinander übereinstimmen. Hieraus, aus (12.2), (12.3) und (12.4) ergibt sich schließlich: Es ist

$$\varphi\omega\xi^p = (-1)^{d(\nu-p)} u(\xi^p \times S)\,. \tag{12.5}$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen und die geometrische Bedeutung der Abbildung $\varphi$ im Falle einer Faserung klargelegt.

Im nächsten Paragraphen werden wir uns folgender abgeänderten Definition von $\varphi$ bedienen: Es sei für alle Simplexe $\xi \subset \Lambda$:

$$\varphi\xi = u(\xi \times S) \tag{12.6a}$$

es sei für algebraische Komplexe $\Gamma = \Sigma\, a_i \xi_i$:

$$\varphi\Gamma = \Sigma\, a_i \varphi\xi_i\,. \tag{12.6b}$$

Nach dem soeben Bewiesenen stimmt diese neue Definition bis auf das (nur dimensionsabhängige) Vorzeichen mit der alten überein. Für sie gilt, da $S$ Zyklus ist,

$$r\varphi\xi = r(\xi \times S) = r\xi \times S = \varphi r\xi\,,$$

folglich für $\Gamma \subset \mathfrak{L}(\Lambda)$

$$r\varphi\Gamma = \varphi r\Gamma\,. \tag{12.7}$$

Hilfssatz 4, nach welchem $f\varphi\Gamma = 0$ für alle $\Gamma$, ist nunmehr aus Dimensionsgründen klar. Man beachte, daß bis anhin nur die Zykleneigenschaft der Faser $S$ benutzt wurde.

## § 13. Der Isomorphismus H bei einer Sphärenfaserung

Wir erinnern an die in § 8 eingeführten Begriffe und Bezeichnungen: Wir nennen $\mathfrak{F}$, resp. $\mathfrak{F}^p$ jene Untergruppe von $\mathfrak{B}(\Lambda')$, resp. $\mathfrak{B}^p(\Lambda')$, welche die $f$-Bilder von Zyklen aus $L'$ enthält. $\mathfrak{K}$, resp. $\mathfrak{K}^p$ ist die Untergruppe von $\mathfrak{B}(\Lambda)$, resp. $\mathfrak{B}^p(\Lambda)$, welche die Zyklen $\zeta$ aus $\Lambda$ enthält, deren $\varphi$-Bilder homolog 0 sind in $L'$. Für $\zeta^p \subset \mathfrak{K}^p$ ist also $\varphi\zeta^p = rC^{p+e}$ ($e = d + 1$ gesetzt). Wir nennen $fC^{p+e} = h\zeta^p$.

In § 8 wurde gezeigt: $h\zeta^p$ ist ein Zyklus, der durch die Homologieklasse von $\zeta^p$ bis auf Zyklen aus $\mathfrak{F}$ bestimmt ist. Ferner ist $h\zeta^p \subset \mathfrak{F}$, falls $\zeta^p \sim 0$. Folglich erzeugt $h$ eine homomorphe Abbildung $H$ von $\mathfrak{K}^p$ in $\mathfrak{B}^{p+e}/\mathfrak{F}^{p+e}$. Wir werden nunmehr diesen Homomorphismus $H$ genauer untersuchen, indem wir von der Tatsache Gebrauch machen, daß $f$ durch eine Sphärenfaserung erzeugt wird. $\sigma$ sei eine pseudoidentische Abbildung von $\Lambda'$ auf $\Lambda$. Wir betrachten im folgenden die Abbildung $f^* = \sigma f$, schreiben dafür aber wieder $f$. ($\varphi$ wird beibehalten.) Nach Satz 5 wird dadurch am Homomorphismus $H$ nichts geändert.

Da sich alle unsere Betrachtungen auf Homologien stützen, würde genügen vorauszusetzen, daß die Faser $S$ eine Homologiesphäre ist.

Das Ziel dieses Paragraphen ist der folgende Hauptsatz über Sphärenfaserungen:

*Satz 23: Ist die Faser $S$ eine Sphäre, so ist $H$ eine isomorphe Abbildung von $\mathfrak{K}^p$ auf $\mathfrak{B}^{p+e}/\mathfrak{F}^{p+e}$ ($e = d + 1$).*

Der Beweis ergibt sich aus den nachstehenden zwei Behauptungen:

*Satz 24: Ist $\zeta$ Zyklus aus $\mathfrak{K}$ und $h\zeta \subset \mathfrak{F}$, so ist $\zeta \sim 0$, d. h. $H$ ist eine isomorphe Abbildung von $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{B}/\mathfrak{F}$.*

*Satz 25: Zu jedem Zyklus $Z$ aus $\Lambda$ gibt es einen Zyklus $\zeta \subset \mathfrak{K}$, so daß $h\zeta = Z$ gewählt werden kann, d. h. $H$ ist eine Abbildung von $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{B}/\mathfrak{F}$.*

Nach Satz 22 würde es zum Beweise von Satz 23 genügen, die folgende, als Spezialfall in Satz 25 enthaltene Aussage zu bestätigen: Ist die Faser $S$ eine Sphäre, so gibt es einen Zyklus $\zeta_0 \subset \mathfrak{K}$, so daß $h\zeta_0 = \Lambda$. Wir wollen hier aber ganz unabhängig von multiplikativen Eigenschaften von $H$, also mit der rein additiven Homologietheorie den Satz 23 beweisen. Dadurch erhalten wir viel eher einen Einblick in die Struktur der Faserung, als wenn wir die Produkttheorie als Hilfsmittel heranziehen.

Dem Beweise der Sätze 24 und 25 schicken wir drei Hilfssätze voraus.

*Hilfssatz 10:* $C^t$ ($t \geqslant 0$) sei ein Komplex in $|\varphi\xi^s|$ ($s \geqslant 0$) mit $rC^t \subset |\varphi r\xi^s|$ und $t < s + d$. Im Falle $s = t$ sei ferner $fC^t = 0$. Dann gibt es einen Komplex $B^t \subset |\varphi r\xi^s|$ derart, daß $rB^t = rC^t$.

*Beweis:* Die Behauptung ist klar, wenn $t = 0$: Man setze $B^t = 0$. Im Falle $s = 0$ ist $|\varphi r\zeta^s|$ leer; da dann aber nach Voraussetzung $C^t$ Zyklus ist, kann $B^t = 0$ gewählt werden, womit die Behauptung bewiesen ist.

Es sei nunmehr $s > 0$ und $t > 0$. Die vier Klassen einer Homologiebasis von $|\varphi r \xi^s| = |r\xi^s \times S|$ werden repräsentiert durch die Zyklen

$$\pi \times p, \quad \pi \times S^d, \quad r\xi^s \times p, \quad r\xi^s \times S^d .$$

Hierin bedeuten $\pi$ und $p$ Eckpunkte von $\xi^s$, resp. $S^d$. $\pi \times p$ und $\pi \times S^d$ repräsentieren zugleich die zwei Klassen einer Homologiebasis von $|\varphi \xi^s| = |\xi^s \times S|$. Nun ist aber $rC^t$ Zyklus in $|\varphi r \xi^s|$ und $\operatorname{Dim} rC^t = t - 1 < s + d - 1 = \operatorname{Dim}(r\xi^s \times S^d)$. Somit gilt in $|\varphi r \xi^s|$ im

Falle $s = t$:

$$\begin{array}{lll} \text{Für } t-1=0: & & rC^t \sim a(r\xi^s \times p) + b(\pi \times p), \\ \text{,,} \quad t-1=d: & & rC^t \sim a(r\xi^s \times p) + b(\pi \times S^d), \\ \text{,,} \quad t-1 \neq \begin{cases} 0 \\ d \end{cases}: & & rC^t \sim a(r\xi^s \times p). \end{array}$$

Da sowohl $rC^t$, also auch $r\xi^s \times p$ in $|\varphi \xi^s|$ beranden, muß dies auch $b(\pi \times p)$, resp. $b(\pi \times S^d)$ tun. Dies tritt aber nie ein, solange $b \neq 0$ ist. Folglich muß in den beiden ersten Fällen $b = 0$ sein. Somit bleibt

$$rC^t \sim a(r\xi^s \times p) .$$

Damit ist aber

$$frC^t = ar\xi^s .$$

Wegen $frC^t = rfC^t = 0$ muß daher auch $a$ verschwinden. Es ist somit $rC^t \sim 0$ *in* $|\varphi r \xi^s|$ für $s = t$.

Einfacher geht der Schluß im

Falle $s \neq t$: Man macht dieselben Unterscheidungen für $t - 1$ wie oben. Dabei tritt diesmal der Term $a(r\xi^s \times p)$ gar nicht auf. Wieder folgt $b = 0$, also $rC^t \sim 0$ in $|\varphi r \xi^s|$, w.z.b.w.

Eine Verschärfung dieses Satzes ist der

*Hilfssatz 11:* $C^t (t \geqslant 0)$ sei ein Komplex in $|\varphi \xi^s|$ $(s \geqslant 0)$ mit $rC^t \subset |\varphi r \xi^s|$ und $t < s + d$. Im Falle $s = t$ sei ferner $fC^t = 0$. Dann gibt es einen Komplex $A = A^{t+1} \subset |\varphi \xi^s|$ derart, daß $C^t - rA \subset |\varphi r \xi^s|$ und $fA = 0$ ist. Dann gilt also $f(C^t - rA) = fC^t$.

*Beweis:* Nach Hilfssatz 10 gibt es unter diesen Voraussetzungen einen Komplex $B^t \subset |\varphi r \xi^s|$, so daß $C^t - B^t$ Zyklus ist in $|\varphi \xi^s|$. Daher gilt

$$\begin{array}{lll} \text{für } t = 0: & & C^t - B^t \sim c(\pi \times p), \\ \text{,,} \quad t = d: & & C^t - B^t \sim c(\pi \times S^d), \\ \text{,,} \quad t \neq 0, d: & & C^t - B^t \sim 0. \end{array}$$

In den Fällen $t = 0$ und $t = d$ wollen wir die Zyklen $c(\pi \times p)$, resp. $c(\pi \times S^d)$ zu $B^t$ hinzuschlagen; dies ist erlaubt, weil beides Zyklen aus $|\varphi r \xi^s|$ sind. In allen Fällen wird sodann $C^t - B^t \sim 0$. Es gibt also einen Komplex $A = A^{t+1} \subset |\varphi \xi^s|$, der von $C^t - B^t$ berandet wird, d. h. welcher die Gleichung

$$C^t - rA = B^t \subset |\varphi r \xi^s|$$

erfüllt.

Aus Dimensionsgründen wird $fA = 0$, wenn $t \geqslant s$ ist. Für $t < s$ gilt aber im allgemeinen $fA = \Delta \neq 0$. Es sei $D$ der Komplex $\Delta \times p$ in der durch $L'$ gegebenen Unterteilung des topologischen Produktes $|\xi^s \times S^d|$.

Dann gilt

$$fD = \Delta^{t+1} \subset [\xi^s], \; (t < s);$$

damit ist: $r\Delta \subset |r\xi^s|$, und

$$rD = r(\Delta \times p) = r\Delta \times p \subset |\varphi r \xi^s|.$$

Damit ist

$$C^t - r(A - D) = B^t + rD \subset |\varphi r \xi^s|$$

und

$$f(A - D) = 0.$$

Dies war aber die Behauptung (in ihr steht zwar $A$ statt $A - D$).

Schließlich gilt der

*Hilfssatz 12:* $C^t$ sei ein Komplex in $|\varphi \xi^s|$ mit $rC^t \subset |\varphi r \xi^s|$ und $t = s + d$. Dann ist $C^t = a\varphi\xi^s$.

*Beweis:* $|\varphi \xi^s| = |\xi^s \times S^d|$ ist eine $t$-dimensionale berandete Mannigfaltigkeit. In ihr ist $C^t$ Relativzyklus bis auf deren Rand, somit von der Form

$$C^t = a\varphi\xi^s.$$

Wir führen noch folgende Abkürzungen ein: $\Lambda^q$ sei der Komplex der höchstens $q$-dimensionalen Simplexe von $\Lambda$; ferner bezeichne $\varphi\Lambda^q$ denjenigen Teilkomplex von $L'$, welcher sich aus den $\varphi$-Bildern aller Simplexe von $\Lambda^q$ zusammensetzt. Ist $C$ ein Komplex in $\varphi\Lambda^q$, so sagen wir kurz „$C$ steht über $\Lambda^q$". Wegen $\varphi\Lambda^v = L'$ steht jeder Komplex $C$ aus $L'$ über $\Lambda^v$. Sind $C$ und $D$ (algebraische) Komplexe in $L'$, so wollen wir unter $C(D)$ denjenigen (algebraischen) Teilkomplex von $C$ verstehen, der in $|D|$ liegt.

Nun gehen wir an den

*Beweis von Satz 24:* Die Behauptung lautet: Ist $\zeta^p$ Zyklus in $\Lambda$, $\varphi\zeta^p = rC^t (t = p + e > p)$ und $h\zeta^p = fC^t = Z^t \subset \mathfrak{F}$, so ist $\zeta^p \sim 0$.

In der Tat! Nach Voraussetzung gibt es einen Zyklus $\mathbf{Z}^t \subset L$ mit $f\mathbf{Z}^t \sim Z^t$; also berandet $f(C^t - \mathbf{Z}^t)$ einen Komplex $\Delta$ in $\Lambda$. $D \subset L'$ sei ein beliebiges Urbild von $\Delta$. Dann gilt mit

$$C_0^t = C^t - \mathbf{Z}^t - rD:$$

$$rC_0^t = rC^t = \varphi\,\zeta^p$$

und

$$fC_0^t = f(C^t - \mathbf{Z}^t - rD) = 0\ .$$

Ersetzt man daher in $h\zeta^p = fC^t$ den Komplex $C^t$ durch $C_0^t$, so wird

$$h\zeta^p = fC_0^t = 0\ .$$

$C_0^t$ steht im allgemeinen über $\Lambda^\nu$, sein Rand aber über $\Lambda^p (p < \nu)$. Wir werden nun $C_0^t$ der Reihe nach durch Komplexe $C_1^t, C_2^t, \ldots, C_k^t, \ldots, C_{\nu-p-1}^t$ ersetzen, so daß stets $rC_k^t = \varphi\zeta^p$ und $fC_k^t = 0$ ist, aber $C_k^t$ nur noch über $\Lambda^{\nu-k}$ steht. Dies geschieht nach folgender Vorschrift: Ist $\nu - p - 1 = 0$, so sei $C_{\nu-p-1}^t = C_0^t$. Ist $\nu - p - 1 > k \geqq 0$ und $C_k^t$ schon konstruiert, so erfüllt $C_k^t(\varphi\xi_i^{\nu-k})$ für jedes Simplex $\xi_i^{\nu-k} \subset \Lambda$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 11. Es gibt daher zu jedem dieser Simplexe $\xi_i$ einen Komplex $A_i$ derart, daß $C_k^t(\varphi\xi_i) - rA_i$ in $|\varphi r\xi_i|$ enthalten und $fA_i = 0$ ist. Bilden wir die Summe aller dieser $A_i$ und setzen

$$C_{k+1}^t = C_k^t - r\,\Sigma A_i\ ,$$

so gilt

$$r\,C_{k+1}^t = rC_k^t = \varphi\,\zeta^p\ ,$$

$$f\,C_{k+1}^t = f\,C_k^t - r\,\Sigma\,fA_i = fC_k^t = 0$$

und: $C_{k+1}^t$ steht nur mehr über $\Lambda^{\nu-(k+1)}$.

Wird $C_{\nu-p-1}^t$ auf diese Weise konstruiert, so erfüllt $C_{\nu-p-1}^t(\varphi\xi_j^{p+1})$ für jedes Simplex $\xi_j^{p+1} \subset \Lambda$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 12; denn der Rand von $C_{\nu-p-1}^t$, $\varphi\zeta^p$, steht über $\Lambda^p$ und es ist $t = p + e = (p+1) + d$. Somit ist

$$C_{\nu-p-1}^t(\varphi\xi_j) = a_j\varphi\xi_j\ .$$

Setzt man daher

$$\Gamma = \Sigma a_j\,\xi_j\ ,$$

summiert über alle $(p+1)$-dimensionalen Simplexe $\xi_j \subset \Lambda$, so wird, weil $C^t_{\nu-p-1}$ ganz über $\Lambda^{p+1}$ steht

$$C^t_{\nu-p-1} = \Sigma a_j \varphi \xi_j = \varphi \Gamma .$$

Dann ist aber

$$\varphi r \Gamma = r \varphi \Gamma = r C^t_{\nu-p-1} = \varphi \zeta^p ,$$

folglich

$$r \Gamma = \zeta^p \sim 0 ,$$

w.z.b.w.

*Beweis von Satz 25:* Die Behauptung lautet: Zu jedem Zyklus $Z^q \subset \Lambda$ gibt es einen Zyklus $\zeta^p \subset \mathfrak{K}$ und einen Komplex $C^q \subset L'$, so daß

$$\varphi \zeta^p = r C^q, \qquad f C^q = Z^q .$$

In der Tat! $C^q_0$ sei Urbild von $Z^q$, d. h. $f C^q_0 = Z^q$. Im Falle $q = 0$ ist $C^q_0$ Zyklus, somit $Z^q \subset \mathfrak{J}$; $\zeta^p = 0$ erfüllt daher die Behauptung.

Es sei nunmehr $q > 0$. Wir setzen $q - 1 = t$ und $r C^q_0 = \boldsymbol{Z}^t$. Dann gilt

$$f \boldsymbol{Z}^t = r f C^q_0 = r Z^q = 0 .$$

Man verfährt nun mit $\boldsymbol{Z}^t$ vermöge der Hilfssätze 11 und 12 genau gleich wie mit $C^t_0$ im Beweise von Satz 24: Man subtrahiert solange Ränder von Komplexen $A$ (mit $fA = 0$), bis $\boldsymbol{Z}^t$ entweder zu 0 oder zu einem Zyklus $\boldsymbol{Z}^*$ wird, welcher das $\varphi$-Bild eines Komplexes $\zeta^p \subset \Lambda$ ist. Im ersten Falle folgt $Z^q \subset \mathfrak{J}$; man setzt wieder $\zeta^p = 0$. Im zweiten Falle ist, wegen $\varphi r \zeta^p = r \varphi \zeta^p = r \boldsymbol{Z}^* = 0$, $\zeta^p$ Zyklus in $\Lambda$, also $Z^q = h \zeta^p$, w.z.b.w. Gleichzeitig ergibt sich hieraus

*Satz 26: Ist $\boldsymbol{Z}$ Zyklus* in $L'$ und $f\boldsymbol{Z} \sim 0$, so gibt es einen Zyklus $Z \subset \Lambda$ mit $\varphi Z \sim \boldsymbol{Z}$.

Um nämlich obigen Beweis anwenden zu können, braucht man nur zu beachten, daß es einen zu $\boldsymbol{Z}$ homologen Zyklus gibt (siehe im ersten Teil des Beweises von Satz 24), dessen $f$-Bild verschwindet. Dieser spielt dann die Rolle von $\boldsymbol{Z}^t$ in obigem Beweise.

## KAPITEL IV

## Anwendungen

Wir fassen nunmehr die Resultate der Kapitel II und III zusammen. Wir setzen daher voraus: Die geschlossene orientierbare Mannigfaltigkeit $L^n$ sei in Sphären $S^d (d > 0)$ gefasert (vgl. § 12); $\Lambda^\nu (\nu = n - d)$ sei der

Faserraum. Im folgenden werden wir eine Reihe geometrischer Eigenschaften einer solchen Sphärenfaserung aufzählen (§§ 15 und 16). Dazu bedürfen wir noch einer letzten Vorbereitung (§ 14).

## § 14. H-Ketten

Nach Satz 23 existiert eine Homologieklasse $\zeta_0$ in $\Lambda$ mit $\Lambda \subset H\zeta_0$. Da $\mathfrak{K}$ ein Ideal ist in $\mathfrak{R}(\Lambda)$, sind sämtliche Homologieklassen der Form $Z \circ \zeta_0$ in $\mathfrak{K}$ enthalten. Ist umgekehrt $\zeta \subset \mathfrak{K}$, so gilt nach Satz 20, Formel (11.8): $\zeta = H\zeta \circ \zeta_0$. Folglich ist $\mathfrak{K}$ das durch $\zeta_0$ erzeugte Ideal von $\mathfrak{R}(\Lambda)$.

Ebenso läßt sich das Ideal $\mathfrak{J}$ von $\mathfrak{R}(\Lambda)$ durch $\zeta_0$ charakterisieren: Nach Satz 19 gilt für eine Homologieklasse $Z$ aus $\Lambda$: $Z \subset H(Z \circ \zeta_0)$. Hieraus folgt, da $H$ eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{R}(\Lambda)/\mathfrak{J}$ ist (Satz 11): Verschwindet $Z \circ \zeta_0$, so ist $Z \subset \mathfrak{J}$. Nach Hilfssatz 9 gilt hiervon die Umkehrung. Folglich ist dann und nur dann $Z \subset \mathfrak{J}$, wenn $Z \circ \zeta_0 = 0$.

Wir betrachten nun die Potenzen von $\zeta_0$,

$$\zeta_0^0 = \Lambda\,,\ \zeta_0^1 = \zeta_0\,,\ \zeta_0^2 = \zeta_0 \circ \zeta_0\,,\ \zeta_0^3 = \zeta_0^2 \circ \zeta_0\,,\ \ldots,\ \zeta_0^M, \ldots \tag{14.1}$$

und nehmen an, daß $\zeta_0^M$ deren letzte sei, die nicht Null ist. Dies bedeutet $\zeta_0^M \subset \mathfrak{J}$. Weil $\operatorname{Dim} \zeta_0 = \nu - e$, ist $\operatorname{Dim} \zeta_0^k = \nu - ke$, $e = d + 1$. Folglich ist $k = \left[\frac{\nu}{e}\right]$ die höchste für $M$ in Frage kommende Zahl. Es gibt daher eine wohlbestimmte Zahl $M$, $0 \leqslant M \leqslant \left[\frac{\nu}{e}\right]$ derart, daß

$$\zeta_0^k \neq 0 \text{ für } k \leqslant M,\ \zeta_0^k = 0 \text{ für } k > M\ .$$

Wir nennen die Folge $\Lambda, \zeta_0, \zeta_0^2, \ldots, \zeta_0^M$, die $H$-Kette von $\Lambda$; $M$ heiße ihre Länge. $M = 0$ bedeutet also $\zeta_0 = 0$, d. h. $\Lambda \subset \mathfrak{J}$.

Es sei $Z \not\subset \mathfrak{K}$. Wir betrachten die in der Dimension absteigende Folge

$$Z, Z \circ \zeta_0, Z \circ \zeta_0^2, \ldots, Z \circ \zeta_0^m, \ldots \tag{14.2}$$

und nehmen an, daß hierin $Z \circ \zeta_0^m$ das letzte nicht verschwindende Glied ist. Dies bedeutet, $Z \circ \zeta_0^m \subset \mathfrak{J}$. Wir nennen die Folge $Z, Z \circ \zeta_0, \ldots, Z \circ \zeta_0^m$ die $H$-Kette von $Z (\not\subset \mathfrak{K})$; $m$ heiße ihre Länge. Es gilt stets $m \leqslant M$; denn mit $\zeta_0^k$ verschwindet auch $Z \circ \zeta_0^k$.

Aus der vorn gegebenen Charakterisierung von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{J}$ durch $\zeta_0$ ergibt sich: Sämtliche Glieder einer solchen $H$-Kette mit Ausnahme des ersten sind Klassen aus $\mathfrak{K}$; nur das letzte Glied ist in $\mathfrak{J}$ enthalten. Weiter gilt: jede Klasse $\zeta \subset \mathfrak{R}(\Lambda)$ gehört der $H$-Kette einer Klasse $Z (\not\subset \mathfrak{K})$ an. Denn dies ist nach Definition der Fall, wenn $\zeta \not\subset \mathfrak{K}$; andernfalls bildet man eine in der Dimension aufsteigende Folge $Z_1 \subset H\zeta$, $Z_2 \subset HZ_1, \ldots,$ bis man ein $Z_k$ findet, welches nicht mehr in $\mathfrak{K}$ enthalten ist. Dies tritt spätestens dann ein, wenn $\operatorname{Dim} Z_k \geqslant \nu - d$. Dann folgt durch mehrmalige Anwendung von (11.8): $\zeta = Z_k \circ \zeta_0^k$, d. h. $\zeta$ ist in der $H$-Kette von $Z_k$ enthalten. Zusammenfassend gilt der

*Satz 27:* Jede Klasse $Z \not\subset \mathfrak{K}$ und keine andere ist Anfang, jede Klasse $\zeta \subset \mathfrak{F}$ und keine andere ist Ende einer $H$-Kette. Jede Homologieklasse aus $\Lambda$ gehört einer $H$-Kette an.

Nach Definition ist $\zeta_0^M \subset \mathfrak{F}$. Es gibt daher eine Homologieklasse $z_0 \neq 0$ in $L$ mit $Fz_0 = \zeta_0^M$. ($F$ ist die durch die Faserabbildung $f$ (§ 12) induzierte (additiv) homomorphe Abbildung von $\mathfrak{R}(L)$ in $\mathfrak{R}(\Lambda)$.) $Fz_0$ ist also gleich dem Ende der $H$-Kette von $\Lambda$. Insbesondere gilt für $M = 0$: $Fz_0 = \Lambda$. Die Dimension von $z_0$ beträgt:

$$\operatorname{Dim} z_0 = \operatorname{Dim} \zeta_0^M = \nu - Me, \quad (\nu = n - d,\; e = d + 1). \tag{14.3}$$

Wir betrachten den folgenden Spezialfall: *Alle $H$-Ketten von $\Lambda$ besitzen dieselbe Länge $M \geqslant 0$*, d. h. für jede Klasse $Z \not\subset \mathfrak{K}$ sei $Z \circ \zeta_0^M \neq 0$, aber in $\mathfrak{F}$ enthalten. Beispiele, in denen diese Voraussetzung erfüllt ist, werden wir in den §§ 15 und 16 kennen lernen.

Es sei $\mathfrak{T}_k^q$ diejenige Untergruppe von $\mathfrak{B}^q$, für deren Elemente $Z$ gilt: $Z \circ \zeta_0^k = 0$. Dann wird

$$\mathfrak{T}_0^q \subset \mathfrak{T}_1^q \subset \cdots \subset \mathfrak{T}_k^q \subset \mathfrak{T}_{k+1}^q \subset \cdots \subset \mathfrak{T}_M^q \subset \mathfrak{T}_{M+1}^q\,. \tag{14.4}$$

Hierin sind insbesondere $\mathfrak{T}_0^q = 0$, $\mathfrak{T}_1^q = \mathfrak{F}^q$ und, da alle $H$-Ketten die Länge $M$ haben, $\mathfrak{T}_M^q = \mathfrak{K}^q$, $\mathfrak{T}_{M+1}^q = \mathfrak{B}^q$.

Nach Definition der Gruppen $\mathfrak{T}_k^q$ ist für $Z \subset \mathfrak{T}_k^q$ $(0 \leqslant k \leqslant M)$

$$T_k Z = Z \circ \zeta_0^k = 0\,,$$

für $Z \subset \mathfrak{T}_{k+1}^q$ somit

$$T_k Z = Z \circ \zeta_0^k \subset \mathfrak{F}^{q-ke}\,.$$

Kern*) dieser homomorphen Abbildung $T_k$ von $\mathfrak{T}_{k+1}^q$ in $\mathfrak{F}^{q-ke}$ ist $\mathfrak{T}_k^q$. Nach Voraussetzung gibt es zu jedem Element $\zeta \subset \mathfrak{F}^{q-ke}$ eine in $\zeta$ endigende $H$-Kette der Länge $M$; diese enthält aber ein Element von $\mathfrak{T}_{k+1}^q$. Somit ist $T_k$ eine Abbildung *auf* $\mathfrak{F}^{q-ke}$. $T_k$ vermittelt daher die Isomorphie

$$\mathfrak{T}_{k+1}^q / \mathfrak{T}_k^q \approx \mathfrak{F}^{q-ke}\,. \tag{14.5}$$

*) Kern eines Homomorphismus ist die Untergruppe derjenigen Elemente, die auf die Null abgebildet werden.

Insbesondere gilt, wegen $\mathfrak{T}^q_{M+1} = \mathfrak{B}^q$ und $\mathfrak{T}^q_M = \mathfrak{K}^q$:

*Satz 28:* Haben alle $H$-Ketten von $\Lambda$ die Länge von $M$, so gilt $\mathfrak{B}^q/\mathfrak{K}^q \approx \mathfrak{F}^{q-Me}$. (Dieser Isomorphismus wird durch $T_M$ vermittelt.)

Aus (14.4) und (14.5) folgt weiter, wegen $\mathfrak{T}^q_{M+1} = \mathfrak{B}^q$ und $\mathfrak{T}^q_0 = 0$:

*Satz 29:* Ist $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$, und haben alle $H$-Ketten von $\Lambda$ die Länge $M$, so gilt

$$\mathfrak{B}^q \approx \mathfrak{F}^q + \mathfrak{F}^{q-e} + \mathfrak{F}^{q-2e} + \ldots + \mathfrak{F}^{q-Me}. \tag{14.6}$$

Nunmehr beweisen wir den

*Satz 30:* Haben alle $H$-Ketten von $\Lambda$ die Länge $M$, so läßt sich jede Homologieklasse $z \subset \mathfrak{R}(L)$ darstellen in der Form

$$z = \Phi Z \circ z_0 + \Phi Z^* \;, \quad (Fz_0 = \zeta_0^M). \tag{14.7}$$

Hierin sind die Klassen $Z$ und $Z^*$ bis auf Elemente aus $\mathfrak{K}$ bestimmt. ($z_0$ sei beliebig, aber fest gewählt.)

*Beweis:* 1. Die Darstellung ist möglich! Es ist $Fz \subset \mathfrak{F}$. Somit gibt es ein $Z \subset \mathfrak{R}(\Lambda)$ mit $Fz = Z \circ \zeta_0^M$. Folglich gilt nach Formel (7.5):

$$F(z - \Phi Z \circ z_0) = Fz - Z \circ Fz_0 = 0,$$

also nach Satz 26

$$z = \Phi Z \circ z_0 + \Phi Z^*.$$

2. Die Darstellung ist bis auf Klassen aus $\mathfrak{K}$ eindeutig; denn ist $z = 0$, so ergeben sich bei der unter 1. beschriebenen Bestimmung von $Z$ und $Z^*$ nacheinander die Bedingungen $Z \subset \mathfrak{K}$, $Z^* \subset \mathfrak{K}$.

Es sei $\operatorname{Dim} z = q$ und $z = \Phi Z \circ z_0 + \Phi Z^*$. Beachtet man, daß $\operatorname{Dim} \Phi Z = \operatorname{Dim} Z + d$, ebenso $\operatorname{Dim} \Phi Z^* = \operatorname{Dim} Z^* + d$, und daß nach (14.3) $\operatorname{Dim} z_0 = n - d - Me$, so findet man: Es ist

$$\operatorname{Dim} Z^* = q - d,$$
$$\operatorname{Dim} Z = q + Me.$$

Nach Satz 30 wird also jeder Klasse $z^q$ aus $L$ eineindeutig und isomorph eine Klasse (enthaltend $Z$) aus $\mathfrak{B}^{q+Me}/\mathfrak{K}^{q+Me}$ und eine solche (enthaltend $Z^*$) aus $\mathfrak{B}^{q-d}/\mathfrak{K}^{q-d}$ zugeordnet. Auf Grund von Satz 28 gilt aber

$$\mathfrak{B}^{q+Me}/\mathfrak{K}^{q+Me} \approx \mathfrak{F}^q \;, \quad \mathfrak{B}^{q-d}/\mathfrak{K}^{q-d} \approx \mathfrak{F}^{q-d-Me}.$$

Hieraus folgt

*Satz 31:* Haben alle $H$-Ketten von $\Lambda$ die Länge $M$, so besteht die Isomorphie

$$\mathfrak{B}^q(L) \approx \mathfrak{F}^q + \mathfrak{F}^{q-Me-d} \quad (e = d + 1) \; . \tag{14.8}$$

Damit läßt sich die additive Struktur von $\mathfrak{R}(L)$ ganz durch diejenige von $\mathfrak{R}(\Lambda)$ beschreiben, wenn man $\zeta_0$ und damit $\mathfrak{F}$ kennt. Man wird sich nun fragen: Gilt Entsprechendes für die multiplikative Struktur?

$z_1$ und $z_2$ seien zwei Elemente von $\mathfrak{R}(L)$. Um ihren Schnitt zu berechnen, verfährt man wie folgt: Man stellt $z_1$ und $z_2$ in der Form (14.7) dar (mit festem $z_0$) und multipliziert nun nach den in Schnittringen üblichen Rechenregeln aus, beachtet aber dabei, daß $\Phi$ ein Schnittringhomomorphismus ist (§ 7), und daß sich auch $z_0 \circ z_0 = z_0^2$ in der Form (14.7) darstellen läßt:

$$z_0^2 = \Phi Z_0 \circ z_0 + \Phi Z_0^* \; .$$

Dadurch erhält man wieder eine Darstellung der Form (14.7) für den Schnitt $z_1 \circ z_2$. Hieraus folgt: Die multiplikative Struktur von $\mathfrak{R}(L)$ ist durch diejenige von $\mathfrak{R}(\Lambda)$ bestimmt, sobald das Produkt $z_0^2$, resp. dessen Darstellung $\Phi Z_0 \circ z_0 + \Phi Z_0^*$ bekannt ist.

Es gibt gewisse, allein durch die Größen $n$, $d$ und $M$ bestimmte Fälle, in denen man sagen kann, daß $z_0^2 = 0$ sein muß. Hierüber gibt die folgende Aufstellung Auskunft. Wir bemerken: Wegen $\operatorname{Dim} z_0 = \nu - Me = n - (d + Me)$, ist $\operatorname{Dim} z_0^2 = n - 2(d + Me)$; somit gilt

1. Ist $Me + d > \frac{n}{2}$, so ist $\operatorname{Dim} z_0^2 < 0$, also $z_0^2 = 0$.
2. Ist $d$ ungerade, so ist dies auch $Me + d$. Dann gilt aber nach (6.11) und (5.9): $2z_0^2 = 0$.

2*. Ist also $d$ ungerade und $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$ oder $= \mathfrak{G}_m$, $m$ ungerade, so ist $z_0^2 = 0$.

Ist $d$ gerade, so ist nach Satz 21: $2\zeta_0 = 0$. Wählt man $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$ oder $= \mathfrak{G}_m$, $m$ ungerade, so ist auch schon $\zeta_0 = 0$, folglich $M = 0$ und $\operatorname{Dim} z_0 = \nu = n - d$, somit $n - (\operatorname{Dim} z_0) = d$ gerade. Hieraus folgt nach (6.11) und (5.9) für alle $\boldsymbol{Z} \subset \mathfrak{R}(L)$: $\boldsymbol{Z} \circ z_0 = z_0 \circ \boldsymbol{Z}$. Ist nun nach (14.7) $z_0^2 = \Phi Z \circ z_0 + \Phi Z^*$, so wird mit $z_0^* = z_0 - \Phi \frac{Z}{2}$: $F z_0^* = F z_0 = \Lambda$ und

$$z_0^{*2} = z_0^2 - \Phi Z \circ z_0 + \Phi \left(\frac{Z}{2}\right)^2 = \Phi\left(Z^* + \left(\frac{Z}{2}\right)^2\right) \; .$$

3. Ist also $d$ gerade und $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$ oder $= \mathfrak{G}_m$, $m$ ungerade, so kann $z_0$ so gewählt werden, daß $z_0 = \Phi Z_0^*$ für ein geeignet gewähltes Element $Z_0^* \subset \mathfrak{R}(\Lambda)$. Alsdann ist $(\operatorname{Dim} Z_0^*) + d = \operatorname{Dim} z_0^2 = n - 2d$, somit:

3*. Ist $d$ gerade, $d > \frac{n}{3}$ und $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$ oder $= \mathfrak{G}_m$, $m$ ungerade, so kann $z_0$ so gewählt werden, daß $z_0^2 = 0$.

Auf die Bedeutung von $z_0^2 = 0$ werden wir noch zu sprechen kommen.

## § 15. Geometrische Eigenschaften von Sphärenfaserungen

*1. Eigenschaften, die für alle Sphärenfaserungen gelten.*

*Satz 32: Die durch eine Sphärenfaserung erzeugte Abbildung der gefaserten Mannigfaltigkeit $L$ auf den Faserraum $\Lambda$ ist wesentlich.*

*Beweis:* Für den durch die Faserabbildung $f$ erzeugten Homomorphismus $H$ gilt (Satz 25): Es gibt eine Homologieklasse $\zeta_0$ in $\Lambda$ derart, daß $\Lambda \subset H\zeta_0$. Wir haben aber früher (§ 9) festgestellt, daß hieraus die Wesentlichkeit von $f$ folgt.

*Satz 33: Notwendig für die Faserbarkeit der Mannigfaltigkeit $L$ in Sphären der Dimension $d$ ist das Nichtverschwinden einer der Bettischen Zahlen $p^d$, $p^{2d+1}$, $p^{3d+2}$, ... von $L$.*

Dieser Satz ist enthalten in

*Satz 34: Ist die Mannigfaltigkeit $L$ in $d$-dimensionale Sphären gefasert und ist die $q$te Bettische Zahl des Faserraumes $\Lambda$, $\pi^q$, von 0 verschieden, so muß mindestens eine der Bettischen Zahlen $p^{q+d}$, $p^{q+2d+1}$, $p^{q+3d+2}$, ... von $L$ positiv sein.*

*Beweis:* Es sei $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$. Nach Satz 27 ist jede Homologieklasse $\zeta^q \neq 0$ aus $\Lambda$ Glied einer $H$-Kette, deren Anfang eine Klasse $Z \not\subset \mathfrak{K}$ bildet. Für diese gilt aber $\Phi Z \neq 0$ und $\operatorname{Dim} Z = q + k(d+1)$, $k$ ganz. Daher ist $\operatorname{Dim} \Phi Z = q + k(d+1) + d = q + (k+1)d + k$, w.z.b.w.

*Satz 35: Zwischen den Bettischen Zahlen $p^q$ der in Sphären $S^d$ gefaserten Mannigfaltigkeit $L$ und den Bettischen Zahlen $\pi^q$ des Faserraumes $\Lambda$ besteht die Ungleichung*

$$p^q \leqslant \pi^q + \pi^{q-d}, \tag{15.1}$$

*d. h. die Bettischen Zahlen von $L$ sind nie größer als die entsprechenden des topologischen Produktes $\Lambda \times S^d$.*

*Beweis:* Es sei $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$. $F$ bildet die Homologiegruppe $\mathfrak{B}^q(L)$ homomorph auf $\mathfrak{F}^q$ ab. Kern dieses Homomorphismus ist nach Satz 26 die Gruppe $\mathfrak{N}^q$ der $q$-dimensionalen $\Phi$-Bilder, welche gemäß Definition von $\mathfrak{K}$ isomorph ist der Restklassengruppe $\mathfrak{B}^{q-d}(\Lambda)/\mathfrak{K}^{q-d}$. Ferner gilt nach Satz 23: $\mathfrak{K}^{q-e} \approx \mathfrak{B}^q(\Lambda)/\mathfrak{F}^q$. Bezeichnen wir mit $k^q$ den Rang von $\mathfrak{K}^q$, so gilt auf Grund der Addivität der Gruppenränge:

$$\begin{aligned} p^q &= (\pi^q - k^{q-e}) + (\pi^{q-d} - k^{q-d}) \,, \\ p^q &= \pi^q + \pi^{q-d} - (k^{q-e} + k^{q-d}) \,, \quad (e = d+1) \,. \end{aligned} \tag{15.2}$$

Hieraus folgt Satz 35.

Berechnet man die Charakteristik $\Sigma(-1)^q p^q$ von $L$, so folgt aus (15.2), wegen $k^\nu = 0$:

*Satz 36: Die in d-dimensionale Sphären $S$ gefaserte Mannigfaltigkeit $L$ und das topologische Produkt $\Lambda \times S$ des Faserraumes $\Lambda$ mit der Faser $S$ besitzen gleiche Charakteristiken.*

Dieser Satz gilt auch dann, wenn die Faser keine Sphäre ist, wie man leicht durch direkte Berechnung der Eulerschen Charakteristik als Wechselsumme der Zellenanzahlen von $L$ feststellen kann.

*Folgerungen:* Mannigfaltigkeiten mit ungerader Charakteristik lassen sich nicht in Sphären fasern. Mannigfaltigkeiten mit nicht verschwindender Charakteristik lassen sich höchstens in Sphären gerader Dimension fasern.

*2. Eigenschaften, die davon abhängen, ob die Faser $S$ im gefaserten Raum $L$ berandet oder nicht.*

*Satz 37: Der Koeffizientenbereich $\mathfrak{J}$ sei beliebig, aber fest* ($= \mathfrak{R}$, $= \mathfrak{G}$ oder $= \mathfrak{G}_m$, $m \geqslant 2$). *Gibt es in der gefaserten Mannigfaltigkeit $L$ einen Zyklus $z_0$, welcher durch die Faserabbildung $f$ auf den einfach gezählten, orientierten Faserraum $\Lambda$ projiziert wird* ($fz_0 = \Lambda$), *so kann weder die Faser $S$, noch ein von 0 verschiedenes Vielfaches derselben in $L$ beranden. Hiervon gilt die Umkehrung für $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$ oder $= \mathfrak{G}_m$, $m \geqslant 2$; sie ist auch für $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}$ richtig, falls $\Lambda^\nu$ in der Dimension $\nu - d - 1$ keine Torsion besitzt.*

*Beweis:* Nach Satz 16 und Hilfssatz 8 gilt für $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$ oder $= \mathfrak{G}_m$, $m \geqslant 2$:

$$\mathfrak{B}^0(\Lambda)/\mathfrak{K}^0 \approx \mathfrak{F}^\nu \subset \mathfrak{B}^\nu(\Lambda) \,. \tag{15.3}$$

Ferner ist $\mathfrak{B}^0(\Lambda) \approx \mathfrak{B}^\nu(\Lambda) \approx \mathfrak{J}$. Wählt man also $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$ oder $= \mathfrak{G}_m$,

$m \geqslant 2$, und gilt $aS \not\sim 0$ für $a \neq 0$, d. h. $\mathfrak{K}^0 = 0$, so wird $\mathfrak{F}^\nu = \mathfrak{B}^\nu$, somit $\Lambda \subset \mathfrak{F}$; mit andern Worten: $\Lambda$ ist Projektion eines Zyklus $z_0$ aus $L$.

Ist umgekehrt $\mathfrak{K}^0 \neq 0$, so folgt aus (15.3): $\mathfrak{F}^\nu$ ist echte Untergruppe von $\mathfrak{B}^\nu$ (im Falle $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$ sogar die Nullgruppe); also ist $\Lambda$, das erzeugende Element von $\mathfrak{B}^\nu$, nicht in $\mathfrak{F}^\nu$ enthalten. Damit ist Satz 37 bewiesen für $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$ oder $= \mathfrak{G}_m$, $m \geqslant 2$.

Ist $\mathfrak{K}^0 \neq 0$ für $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}$, dann ist auch $\mathfrak{K}^0 \neq 0$ für $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$; es gibt dann keinen rationalzahligen, also erst recht keinen ganzzahligen Zyklus $z_0$ mit $fz_0 = \Lambda$. Ist $\mathfrak{K}^0 = 0$ für $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}$, dann ist auch $\mathfrak{K}^0 = 0$ für $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$; es gibt dann einen rationalzahligen Zyklus $z_0$ mit $fz_0 = \Lambda$, also eine ganze Zahl $m$ und einen ganzzahligen Zyklus $z_0^*$ mit $fz_0^* = m\Lambda$. Nach Satz 25 gibt es aber eine Klasse $\zeta_0$ der Dimension $\nu - d - 1$ mit $\Lambda \subset H\zeta_0$. Nach Satz 24 folgt aber aus $m\Lambda \subset \mathfrak{F}$: Es ist $m\zeta_0 = 0$. Da aber $\Lambda$ in der Dimension $\nu - d - 1$ torsionsfrei vorausgesetzt wurde, muß $m = 1$, also $\Lambda \subset \mathfrak{F}$ sein. Damit ist die Umkehrung auch für $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}$ bewiesen.

*Satz 38: Der Koeffizientenbereich $\mathfrak{J}$ sei beliebig, aber fest. Gibt es in $L$ einen Zyklus $z_0$ mit $fz_0 = \Lambda$, so sind die Homologieringe $\mathfrak{R}(L)$ und $\mathfrak{R}(\Lambda \times S)$ additiv und dimensionstreu isomorph, und umgekehrt, wenn* (wie in Satz 37) *im Falle $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}$ der Faserraum $\Lambda$ keine $(\nu - d - 1)$-dimensionale Torsion besitzt.*

*Beweis:* Es gebe einen Zyklus $z_0$ mit $fz_0 = \Lambda$, d. h. es sei $\Lambda \subset \mathfrak{F}$. Nun gilt aber: $\mathfrak{F}$ ist ein Ideal in $\mathfrak{R}(\Lambda)$; $\Lambda$ ist Einselement von $\mathfrak{R}(\Lambda)$. Aus $\Lambda \subset \mathfrak{F}$ folgt daher $\mathfrak{F} = \mathfrak{R}(\Lambda)$. Nach Satz 23 gilt dann $\mathfrak{K} \approx \mathfrak{R}(\Lambda)/\mathfrak{F} \approx 0$. Der Homomorphismus $H$ ist somit die Nullabbildung, d. h. alle $H$-Ketten von $\Lambda$ haben dieselbe Länge $0$. Hieraus ergibt sich nach Satz 31 (mit $M = 0$):

$$\mathfrak{B}^q(L) \approx \mathfrak{F}^q + \mathfrak{F}^{q-d} = \mathfrak{B}^q(\Lambda) + \mathfrak{B}^{q-d}(\Lambda) \approx \mathfrak{B}^q(\Lambda \times S) . \qquad (15.4)$$

Zum Beweise der Umkehrung stützen wir uns auf folgende, sich aus Satz 25 ergebende Tatsache: Die Gruppe $\mathfrak{N}^q$ der $q$-dimensionalen $\Phi$-Bilder ist Kern des Homomorphismus $F$ von $\mathfrak{B}^q(L)$ auf $\mathfrak{F}^q \subset \mathfrak{B}^q(\Lambda)$. Ferner ist $\mathfrak{K}^{q-d}$ Kern des Homomorphismus $\Phi$ von $\mathfrak{B}^{q-d}(\Lambda)$ auf $\mathfrak{N}^q$. Somit gilt

$$\mathfrak{B}^q(L)/\mathfrak{N}^q \approx \mathfrak{F}^q \subset \mathfrak{B}^q(\Lambda) \quad , \quad \mathfrak{B}^{q-d}(\Lambda)/\mathfrak{K}^{q-d} \approx \mathfrak{N}^q \subset \mathfrak{B}^q(L) . \qquad (15.5)$$

Es sei nun $\Lambda \not\subset \mathfrak{F}$, also $\mathfrak{F}^\nu$ eine echte Untergruppe von $\mathfrak{B}^\nu(\Lambda)$. Im Falle $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$ ist dann $\mathfrak{F}^\nu = 0$, ebenso (auf Grund der Torsionsfreiheit von $\Lambda$ in der Dimension $\nu - d - 1$) im Falle $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}$. Bei beliebigem $\mathfrak{J}$ besitzt daher $\mathfrak{F}^\nu$ kleinere Ordnung als $\mathfrak{B}^\nu(\Lambda)$. Aus den Isomorphien (15.5), für

$q = \nu$, folgt daher, daß $\mathfrak{B}^\nu(L)$ und $\mathfrak{B}^\nu(\Lambda \times S) \approx \mathfrak{B}^\nu(\Lambda) + \mathfrak{B}^{\nu-d}(\Lambda)$ nicht isomorph sein können, also auch nicht $\mathfrak{R}(L)$ und $\mathfrak{R}(\Lambda \times S)$.

Mit $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$ ergibt sich aus den Sätzen 37 und 38 der

*Zusatz zu Satz 35: Zwischen den Bettischen Zahlen von L und Λ besteht dann und nur dann die Gleichung*

$$p^q = \pi^q + \pi^{q-d} \qquad \textit{für alle } q,$$

*wenn die Faser S in L nicht rational homolog* 0 *ist.*

Die Sätze 37 und 38 zeigen deutlich, wie wichtig es ist, zu wissen, ob bei einer vorgelegten Sphärenfaserung die Faser $S$ im gefaserten Raum $L$ berandet. Die folgenden zwei Sätze geben Fälle an, in denen nie $S \sim 0$ sein kann.

*Satz 39: Besteht zwischen der Dimension n des gefaserten Raumes L und der Dimension d der Faser S die Ungleichung* $d \geqslant \frac{n}{2}$, *so gibt es in L einen Zyklus* $z_0$ *mit* $fz_0 = \Lambda$; *dann ist also* $aS \not\sim 0$ *in L für* $a \neq 0$.

*Beweis:* Ist $\Lambda \not\subset \mathfrak{F}$, so ist die nach Satz 25 in $\Lambda$ existierende Homologieklasse $\zeta_0$, welche die Relation $\Lambda \subset H\zeta_0$ erfüllt, nicht die Nullklasse. Hieraus folgt, wegen $0 \leqslant \text{Dim}\ \zeta_0 = \nu - d - 1 = n - 2d - 1$, die Behauptung.

*Satz 40: Ist d gerade und* $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$ *oder* $= \mathfrak{G}_m$, *m ungerade, so gibt es in L einen Zyklus* $z_0$ *mit* $fz_0 = \Lambda$.

Nach Satz 37 folgt hieraus das

*Korollar: Ist bei einer Sphärenfaserung die Faser* $S^d$ *rational homolog* 0, *so ist d ungerade.*

*Beweis von Satz 40:* Nach der Folgerung 2 zu Satz 20 gilt bei geradem $d$ stets $2\zeta_0 = 0$. Für $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$ oder $= \mathfrak{G}_m$, $m$ ungerade, ist dann schon $\zeta_0 = 0$, also $\Lambda \subset \mathfrak{F}$, w.z.b.w.

*Folgerungen:* Nach Satz 39 läßt die additive Homologietheorie keinen Unterschied zwischen $L$ und $\Lambda \times S$ erkennen, solange die Dimension der Faser größer oder gleich der halben Dimension von $L$, also auch größer oder gleich der Dimension des Faserraumes ist. Wir werden aber sehen, daß für $d = \frac{n}{2} = \nu$ die Homologieringe $\mathfrak{R}(L)$ und $\mathfrak{R}(\Lambda \times S)$ multiplikativ verschieden sein können (Beispiel 2 zum Fall $S \not\sim 0$).

Nach Satz 40 kann eine Sphäre gerader Dimension nie als rational

0-homologe Faser auftreten. Daß dies aber jede Sphäre ungerader Dimension $d$ kann, zeigt das Beispiel des Raumes der gerichteten Linienelemente auf der Sphäre $S^{d+1}$. (Vgl. hierzu § 16.)

*3. Der Fall $S \not\sim 0$:*

Wir nehmen an, die Faser $S$ sei weder Rand, noch Randteiler in $L$; im Falle $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}$ besitze der Faserraum $\Lambda$ keine $(\nu - d - 1)$-dimensionale Torsion. Dann gibt es nach Satz 37 einen Zyklus $z_0$ in $L$ mit $fz_0 = \Lambda$, und nach Satz 38 sind dann die Homologieringe $\mathfrak{R}(L)$ und $\mathfrak{R}(\Lambda \times S)$ additiv und dimensionstreu isomorph. Wir können leicht eine Abbildung von $\mathfrak{R}(L)$ auf $\mathfrak{R}(\Lambda \times S)$ angeben, welche diese Isomorphie bewirkt: Nach Satz 30 wird bei fest gewählter Klasse $z_0$ mit $Fz_0 = \Lambda$, wegen $\mathfrak{K} = 0$ $(\approx \mathfrak{R}(\Lambda)/\mathfrak{J})$, durch Formel (14.7)

$$z = \Phi Z \circ z_0 + \Phi Z^*$$

die direkte Summe $\mathfrak{B}^q(\Lambda) + \mathfrak{B}^{q-d}(\Lambda)$ isomorph auf die Gruppe $\mathfrak{B}^q(L)$ abgebildet. Ferner vermittelt die Formel

$$z = Z \times p + Z^* \times S,$$

in welcher $p$ die 0-dimensionale, $S$ die $d$-dimensionale Basisklasse von $\mathfrak{R}(S)$ bedeuten, einen Isomorphismus von $\mathfrak{B}^q(\Lambda) + \mathfrak{B}^{q-d}(\Lambda)$ auf $\mathfrak{B}^q(\Lambda \times S)$. Die Isomorphie zwischen $\mathfrak{R}(L)$ und $\mathfrak{R}(\Lambda \times S)$ läßt sich somit durch folgende Zuordnung herstellen:

$$\begin{array}{ccc} \text{in } L: & & \text{in } \Lambda \times S: \\ \Phi Z \circ z_0 + \Phi Z^* & \longleftrightarrow & Z \times p + Z^* \times S\,. \end{array} \tag{15.6}$$

Wann wird hierdurch auch multiplikative Isomorphie erzeugt? Zur Untersuchung dieser Frage bilden wir die folgenden Schnitte

$$\begin{array}{r|l} \text{in } L: & \text{in } \Lambda \times S: \\ \Phi Z_1 \circ \Phi Z_2 = \Phi(Z_1 \circ Z_2)\,, & (Z_1 \times S) \circ (Z_2 \times S) = (Z_1 \circ Z_2) \times S\,, \\ \Phi Z_1 \circ (\Phi Z_2 \circ z_0) = \Phi(Z_1 \circ Z_2) \circ z_0\,, & (Z_1 \times S) \circ (Z_2 \times p) = (Z_1 \circ Z_2) \times p\,, \\ (\Phi Z_1 \circ z_0) \circ (\Phi Z_2 \circ z_0) = \pm\, \Phi(Z_1 \circ Z_2) \circ z_0^2\,, & (Z_1 \times p) \circ (Z_2 \times p) = 0\,. \end{array}$$

Diese Zusammenstellung zeigt: Im Falle $S \not\sim 0$ wird durch die Zuordnung (15.6) dann und nur dann neben der additiven auch multiplikative Isomorphie zwischen $\mathfrak{R}(L)$ und $\mathfrak{R}(\Lambda \times S)$ hergestellt, wenn $z_0^2 = 0$ ist. Es gilt also der

*Satz 41: Damit dimensionstreue Ringisomorphie zwischen $\mathfrak{R}(L)$ und* $\mathfrak{R}(\Lambda \times S)$ (in der durch (15.6) angegebenen Weise) *hergestellt werden kann, ist notwendig und hinreichend: Es gibt in $L$ einen Zyklus $z_0$ mit $fz_0 = \Lambda$* ($f$ ist die Faserabbildung) *und der Eigenschaft: Der Schnitt von $z_0$ mit einem zu ihm homologen Zyklus $z_0^*$ berandet in $L$* (d. h. $z_0 \sim z_0^*$ und $z_0 \circ z_0^* \sim 0$).

Dies tritt nach den Sätzen 39 und 40 und der Aufstellung am Schlusse von § 14 stets ein in folgenden Fällen:

1. $d > \frac{n}{2}$. Denn nach Satz 39 existiert $z_0$; ferner ist $z_0^2 = 0$ nach Fall 1 von § 14. Für $d > \frac{n}{2}$ ist es daher unmöglich, durch Homologiebetrachtungen $L$ und $\Lambda \times S$ voneinander zu unterscheiden.
2. $d$ ungerade, $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$ und $S \not\sim 0$, oder $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}_m$, $m$ ungerade, und $aS \not\sim 0$ für $a \neq 0$. Denn dies ist Fall 2* von § 14.
3. $d$ gerade, $d > \frac{n}{3}$, $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$ oder $= \mathfrak{G}_m$, $m$ ungerade. Denn dies ist Satz 40 und Fall 3* von § 14.

*Beispiele:* Man kennt folgende Faserungen in Sphären:

1. $L = P^3$ (= 3-dimensionaler projektiver Raum), $S = S^1$ (= projektive Gerade), $\Lambda = S^2$. Für $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$ oder $= \mathfrak{G}_m$, $m$ ungerade, ist $S^1 \sim 0$, somit nach den Sätzen 37 und 38: $\mathfrak{R}(P^3) \not\cong \mathfrak{R}(S^2 \times S^1)$; und in der Tat ist $p^1(P^3) \neq p^1(S^2 \times S^1)$. Für $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}_2$ ist $S^1 \not\sim 0$; $P^3$ hat in der Tat, wie die Sätze 37 und 38 verlangen, dieselben Bettischen Zahlen mod 2 wie $S^2 \times S^1$. Satz 41, resp. die daran anschließende Aufstellung sagen nichts aus über multiplikative Eigenschaften von $\mathfrak{R}(P^3)$; und in der Tat ist $\mathfrak{R}(P^3) \not\cong \mathfrak{R}(S^2 \times S^1)$ mod 2.

2. $L = K^6$ (= komplexer projektiver Raum), $S = S^2$, $\Lambda = S^4$; $d = 2$, $n = 3d$. Es besteht additiver, aber nicht multiplikativer Isomorphismus zwischen $\mathfrak{R}(K^6)$ und $\mathfrak{R}(S^4 \times S^2)$.

Eine weitere Anwendung des Falles $S \not\sim 0$ ist der im nächsten § behandelte Linienelementraum einer Mannigfaltigkeit.

*4. Der Fall $S \sim 0$.*

Der Koeffizientenbereich $\mathfrak{J}$ sei beliebig und $aS \sim 0$ für ein $a \neq 0$. Dann ist nach Satz 37 der Zyklus $\Lambda \not\subset \mathfrak{F}$; also existiert ein Zyklus $\zeta_0 \neq 0$ mit $\Lambda = h\zeta_0$. $\pi$ sei ein einfach gezählter Punkt aus $\Lambda$, also $\varphi\pi \sim S$. Unter diesen Voraussetzungen gilt nach Formel (11.6) für die Verschlingungszahl der Zyklen $S$ und $\varphi\zeta_0$:

$$\mathfrak{v}(S, \varphi\zeta_0) = \mathfrak{v}(\varphi\pi, \varphi\zeta_0) = \text{Schnittzahl}\ (\pi, h\zeta_0) = 1 \ .$$

Es besteht somit der

*Satz 42: Wenn bei einer Sphärenfaserung der Mannigfaltigkeit L die Faser S oder ein von 0 verschiedenes Vielfaches derselben in L berandet, so gibt es im Faserraum $\Lambda$ einen Zyklus $\zeta_0$, dessen $\varphi$-Bild mit der Faser einfach verschlungen ist, für welchen also gilt:* $\mathfrak{v}(S, \varphi\zeta_0) = 1$.

*Wir spezialisieren Satz 42:* Zwischen der Dimension $n$ von $L$ und derjenigen $d$ von $S$ bestehe die Beziehung $n = 2d + 1$; dann ist $\zeta_0$ nulldimensional, also $= a\pi$, wenn nunmehr $a$ die Ordnung von $S$ bezeichnet. In diesem Falle gilt daher $\varphi\zeta_0 = aS$ und $\mathfrak{v}(S, aS) = 1$. Ist hierin insbesondere $a = 1$, berandet also die einfach gezählte Faser $S$ in $L$, so besagt Satz 42, daß je zwei Fasern miteinander einfach verschlungen sind. Diesem Spezialfall werden wir weiter unten begegnen.

*5. Sphärenfaserungen von Sphären.*

Wir setzen voraus: Die Sphäre $S^n$ sei in Sphären $S^d$ gefasert $(0 < d < n)$. Den Faserraum bezeichnen wir wieder mit $\Lambda^\nu(\nu = n - d)$; $\pi$ sei die Homologieklasse des einfach gezählten Punktes aus $\Lambda$.

Offenbar ist (bei beliebigem Koeffizientenbereich $\mathfrak{J}$) $S^d \sim 0$ in $S^n$, also $d$ ungerade (Korollar zu Satz 40). Ferner ist $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}^0(\Lambda) = \{a\pi\}$, und $\Phi Z = 0$, falls nicht $Z = a\Lambda, a \neq 0$. Es gibt daher auf Grund von Satz 27 im wesentlichen nur eine $H$-Kette in $\Lambda$, nämlich diejenige von $\Lambda$, welche in $\pm\pi$ endigen muß:

$$\Lambda\,, \zeta_0\,, \zeta_0^2\,, \ldots, \zeta_0^M = \pm\pi\,,\quad M = \frac{n-d}{d+1} \tag{15.7}$$

(alle andern $H$-Ketten in $\Lambda$ sind die Vielfachen hiervon). Die Glieder dieser Kette bilden, da aus Dimensionsgründen keine lineare Abhängigkeit unter ihnen bestehen kann, eine Homologiebasis von $\Lambda$. Mit $\zeta_0^M = \pm\pi$ hat jedes Glied aus (15.7) die Ordnung 0: $\Lambda$ besitzt also keine Torsion. Somit gilt

*Satz 43: Ist die Sphäre $S^n$ in Sphären $S^d(0 < d < n)$ gefasert, so sind die Homologieeigenschaften des Faserraums $\Lambda$ durch die Dimensionszahlen n und d vollständig bestimmt: $\Lambda$ besitzt keine Torsion. Eine Homologiebasis von $\Lambda$ wird gebildet durch die Potenzen $\Lambda = \zeta_0^0, \zeta_0, \zeta_0^2, \ldots, \zeta_0^M$ derjenigen Klasse $\zeta_0 \subset \mathfrak{R}(\Lambda)$, welche $H\zeta_0 = \Lambda$ erfüllt.* Hierbei muß $d$ ungerade und $M = \dfrac{n-d}{d+1}$ ganz sein; also ist $d+1/n+1$, folglich auch $n$ ungerade.

Bekannt sind folgende Beispiele hierzu:

1. Faserung einer $S^{2m+1}$ in $S^1 \cdot \Lambda^{2m}$ ist der komplexe projektive Raum $K^{2m}$.

2. Faserung einer $S^{4m+3}$ in $S^3 \cdot A^{4m}$ ist der quaternionale projektive Raum $Q^{4m}$.
3. Faserung der $S^{15}$ in $S^7 \cdot A^8$ ist die $S^8$ [9]).

Man kennt also Faserungen der $S^{4k-1}$ in $S^{2k-1}$ für $k = 1, 2$ und $4$, bei denen als Faserraum $A$ die Sphäre $S^{2k}$ auftritt. In allen diesen Beispielen ist $n = 2d + 1$ und $S \sim 0$; die vorn gegebene Spezialisierung von Satz 42 besagt, daß dann je zwei Fasern miteinander einfach verschlungen sein müssen, was sich leicht an den Beispielen direkt verifizieren läßt.

Obige Beispiele treten auf bei der Klassifikation der Abbildungen der $S^{4k-1}$ auf die $S^{2k}$ nach der in der Einleitung erwähnten $\gamma$-Theorie von H. Hopf. Sie liefern nämlich die bisher einzigen bekannten Fälle, für welche in $H\pi = \gamma S^{2k}$ die Zahl $\gamma$ den Wert $\pm 1$ besitzt. Die Frage, für welche $k$ Abbildungen der $S^{4k-1}$ auf die $S^{2k}$ mit $\gamma = \pm 1$ existieren, können wir hier nicht beantworten, sondern nur von einer andern Seite beleuchten: Nach Satz 25 ist stets dann $\gamma = \pm 1$, wenn die Abbildung durch eine Faserung der $S^{4k-1}$ in $S^{2k-1}$ erzeugt wird. Hierzu sind aber nur die oben erwähnten drei Beispiele mit $k = 1, 2$ und $4$ bekannt.

## § 16. Der Linienelementraum einer Mannigfaltigkeit

$L^n$ sei der Raum der gerichteten Linienelemente auf einer geschlossenen orientierbaren Mannigfaltigkeit $A^\nu$ ($\nu \geqslant 2$). Der Raum der in einem Punkte $\pi \subset A^\nu$ angebrachten Tangentialrichtungen ist eine Sphäre $S^{\nu-1}$. Somit ist $L^n$ in Sphären $S$ der Dimension $d = \nu - 1 > 0$ gefasert. Faserraum ist $A^\nu$. Es gilt daher $n = \nu + d = 2d + 1$. Die Faserabbildung heiße $f$. Sie ist dadurch gegeben, daß sie jeder im Punkte $\pi \subset A$ angebrachten Richtung den Punkt $\pi$ zuordnet.

Es sei $\chi$ die Charakteristik von $A$ und $V$ ein Vektorfeld auf $A$, überall stetig mit höchstens einer Ausnahme in einem festen Punkte $\pi$. Nur im Falle $\chi = 0$ ist $V$ auch in $\pi$ stetig und läßt sich dann als Zyklus auffassen. Im Falle $\chi \neq 0$ besitzt $V$ in $\pi$ eine Singularität vom Index $\chi$. Ergänzt man dann $V$ durch Hinzufügen des $\chi$-fach gezählten Büschels $S^{\nu-1} = \varphi\pi$ aller Tangentialrichtungen in $\pi$, so wird $V$ zu einer abgeschlossenen Punktmenge des Linienelementraumes $L$ und kann als Komplex aufgefaßt werden, dessen Rand gegeben ist durch

$$rV = \chi S^{\nu-1} = \varphi(\chi\pi) \neq 0 \,. \tag{16.1}$$

Es gilt daher: Der algebraische Komplex $V$ ist dann und nur dann ein Zyklus, wenn $\chi = 0$ ist im zugrundeliegenden Koeffizientenbereich $\mathfrak{J}$.

Nun ist aber $f V = \Lambda$. Hieraus und aus (16.1) folgt (vgl. § 13): Es gilt

$$h(\chi\pi) = \Lambda \, .$$

Nach Formel (16.1) berandet die $\chi$-fach gezählte Faser $S^{\nu-1}$ in $L$; es folgt daher aus den Sätzen 37 und 38 (wegen $\nu - d - 1 = 0$ besitzt $\Lambda$ keine $(\nu - d - 1)$-dimensionale Torsion) der

*Satz 44: Dann und nur dann ist der Homologiering $\mathfrak{R}(L)$ des Raumes der Linienelemente auf der Mannigfaltigkeit $\Lambda^\nu (\nu \geqslant 2)$ additiv und dimensionstreu isomorph dem Ringe $\mathfrak{R}(\Lambda^\nu \times S^{\nu-1})$, wenn die Charakteristik $\chi$ von $\Lambda$ gleich* 0 *ist im zugrundeliegenden Koeffizientenbereich $\mathfrak{J}$.*

*Zusatz: Für $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$ oder $= \mathfrak{G}$ besteht dann und nur dann additive Isomorphie zwischen $\mathfrak{R}(L)$ und $\mathfrak{R}(\Lambda \times S)$, wenn $\chi(\Lambda) = 0$, d. h. wenn auf $\Lambda$ ein stetiges Richtungsfeld $V$ existiert.*

Es sei $\chi = 0$ in $\mathfrak{J}$. Dann ist der Zyklus $V$, wegen $f V = \Lambda$, Repräsentant der in § 15 betrachteten Homologieklasse $z_0$. Wir stellten dort fest: Multiplikative Isomorphie zwischen $\mathfrak{R}(L)$ und $\mathfrak{R}(\Lambda \times S)$ besteht (für $\chi = 0$) dann und nur dann, wenn $z_0^2 = 0$. Nach der anschließend an Satz 41 gegebenen Aufstellung tritt dies stets dann ein, wenn $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$ oder $= \mathfrak{G}_m$, $m$ ungerade; denn für ungerades $d$ ist dies Fall 2, für gerades $d$ (also $d \geqslant 2$) ist dies, wegen $n = 2d + 1 < 3d$, Fall 3. Also:

*Satz 45:* Ist $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$ oder $= \mathfrak{G}_m$, $m$ ungerade, und $\chi = 0$ in $\mathfrak{J}$, so sind die Ringe $\mathfrak{R}(L)$ und $\mathfrak{R}(\Lambda \times S)$ dimensionstreu isomorph.

Es sei $\chi = 0$. Die geometrische Bedeutung von $z_0^2$ ist folgende: Es seien $V$ und $V^*$ zwei stetige Vektorfelder auf $\Lambda$, also Zyklen aus $z_0$. Die zu $V$ und $V^*$ gehörigen, im Punkte $\pi \subset \Lambda$ angebrachten Vektoren nennen wir $\mathfrak{v}(\pi)$ und $\mathfrak{v}^*(\pi)$. Wir wollen annehmen, daß beide Vektoren in jedem Punkte $\pi \subset \Lambda$ die Länge 1 besitzen. (Zu diesem Zwecke möge in $\Lambda$ eine Riemannsche Metrik vorausgesetzt sein.) Nach Stiefel[11]) läßt sich der Komplex der Punkte $\pi$, in denen $\mathfrak{v}(\pi)$ und $\mathfrak{v}^*(\pi)$ linear abhängig sind, als eindimensionaler Zyklus $Z$ auffassen, dessen Homologieklasse durch $\Lambda$ (bei geradem $d$ nur mod 2) eindeutig bestimmt ist und von Stiefel die *zweite charakteristische Klasse von $\Lambda$* genannt wird. Wir behaupten:

$$f(V \circ V) = f V^2 \sim Z \, . \qquad (16.2)$$

Vorerst bemerken wir: Für gerades $d$ ist $f V^2$ durch $\Lambda$ ebenfalls nur mod 2 bestimmt; denn ist $V^* \sim V - \Phi Z^*, Z^* \subset \mathfrak{R}(\Lambda)$, so wird

$$V^{*2} \sim V^2 - 2\Phi Z^* \circ V + \Phi Z^{*2} \, .$$

Einerseits ist dann $f V^* = f V = A$, anderseits aber

$$f V^{*2} = f V^2 - 2Z^* .$$

Hieraus ergibt sich unsere Bemerkung.

Zum Beweise von (16.2) bilden wir das zu $V$ homotope, also homologe Vektorfeld $V'$, welches aufgespannt wird durch die Vektoren $\mathfrak{v}'(\pi) = \mathfrak{v}(\pi) + \frac{1}{2}\mathfrak{v}^*(\pi)$. In keinem Punkte $\pi \subset A$ sind $\mathfrak{v}(\pi)$ und $\mathfrak{v}'(\pi)$ einander entgegengesetzt. Der Zyklus $Z$ der Punkte linearer Abhängigkeit von $V$ und $V^*$ fällt daher zusammen mit dem Ort der Punkte, in denen $V$ und $V'$ gleichgerichtet sind, d. h. mit dem $f$-Bild des Schnittes von $V$ und $V'$. Dies ist aber unsere Behauptung.

$Z$ läßt sich auch noch auf eine andere Weise charakterisieren: Es sei $\overline{V}$ das zu $V$ entgegengesetzte Vektorfeld. Dann ist $f\overline{V} = f V = A$, also nach Satz 26: $V - \overline{V} \sim \varphi\overline{Z}$ für einen geeigneten eindimensionalen Zyklus $\overline{Z}$ aus $A$. Ferner ist $\overline{V} \circ V = 0$, da $\overline{V}$ und $V$ zueinander fremd sind. Somit gelten:

$$\begin{aligned} (V - \overline{V}) \circ V &= V^2 \sim \varphi\overline{Z} \circ V, \\ Z \sim f V^2 &\sim f(\varphi\overline{Z} \circ V) \sim \overline{Z} . \end{aligned} \tag{16.3}$$

Also gilt: Der Zyklus $V - \overline{V}$ ist homolog dem $\varphi$-Bilde der zweiten Stiefelschen Klasse $Z$ (bei geradem $d$ nur mod 2); *es ist $V \sim \overline{V}$ dann und nur dann, wenn $Z = 0$.*

Aus (16.2) und (16.3) mit $Z$ statt $\overline{Z}$ folgt: Dann und nur dann kann $V$ so gewählt werden, daß $V^2 \sim 0$, wenn die zweite Stiefelsche Klasse $Z$ von $A$ verschwindet. Zusammenfassend gilt

*Satz 46: Dann und nur dann ist $\mathfrak{R}(L) \approx \mathfrak{R}(A \times S)$, wenn $\chi(A) = 0$ und wenn die zweite Stiefelsche Klasse $Z$ von $A$ verschwindet* (alles in bezug auf $\mathfrak{J}$).

Nach Stiefel ist (neben $\chi = 0$) das Verschwinden von $Z$ eine notwendige Bedingung dafür, daß es auf $A$ zwei stetige, überall linear unabhängige Vektorfelder, d. h. ein „Zweifeld“ gibt. Somit gilt:

*Korollar: Gibt es auf $A$ ein Zweifeld, so ist $\mathfrak{R}(L) \approx \mathfrak{R}(A \times S)$.*

Es läßt sich, im wesentlichen mit den hier schon angewandten Methoden, zeigen: Auch im Falle $\chi \neq 0$ ist die Struktur des Homologierings $\mathfrak{R}(L)$ ganz durch $\mathfrak{R}(A)$ und das Verhalten der zweiten Stiefelschen Klasse bestimmt. Dabei spielt die zweite Stiefelsche Klasse nur für die multiplikative Struktur eine Rolle.

(Eingegangen den 12. Juni 1941.)

# LITERATURVERZEICHNIS

[1]) *H. Seifert,* Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume, Acta math. 60 (1932). Bei den von uns betrachteten Faserungen werden keine „Ausnahmefasern" im Sinne von Seifert zugelassen.

[2]) *J. Feldbau,* C. R. 208 (1939).

[3]) *H. Samelson,* Über Sphären, die als Gruppenräume auftreten, Comm. math. helv. 13 (1941).

[4]) *H. Whitney,* Sphere-spaces, Rec. math. de Moscou 1 (1936), Bull. Amer. math. soc. 43 (1937).

[5]) *H. Whitney,* On the theory of sphere-bundles, Proc. Nat. Acad. of Sci. USA. 26 (1940).

[6]) *J. W. Alexander,* On the connectivity ring of an abstract space, Annals of math. 37 (1936).

[7]) *H. Whitney,* On products in a complex, Annals of math. 39 (1938).

[8]) *H. Hopf,* Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, Crelle Journal 163 (1930).

[9]) *H. Hopf,* Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension, Fund. math. 25 (1935).

[10]) *H. Freudenthal,* Zwei Bemerkungen zu Homologietheorie, Comp. math. 5 (1938).

[11]) *E. Stiefel,* Richtungsfelder und Fernparallelismus in $n$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Comm. math. helv. 8 (1935).

[12]) *H. Freudenthal,* Alexanderscher und Gordonscher Ring und ihre Isomorphie, Annals of math. 38 (1937).

[13]) *H. Freudenthal,* Zum Hopfschen Umkehrungshomomorphismus, Annals of math. 38 (1937).

[14]) *H. Whitney,* Topological properties of differentiable manifolds, Bull. Amer. math. soc. 43 (1937).

[15]) *H. Hopf,* Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, Math. Annalen, 104 (1931).