Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 14 (1941-1942)

Artikel: Sur une classe de transformations différentielles dans l'espace à trois dimensions. II.

Autor: Ostrowski, Alexandre

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14297

Sur une classe de transformations différentielles dans l'espace à trois dimensions. II.

Par Alexandre Ostrowski, Bâle

CHAPITRE II

Transformations R et Transformations de contact

§ 7. Représentation des transformations R sans intégration, à partir d'une correspondance de rang 1

32. Soit T une transformation R. En exprimant x, y_1, y_2 comme fonctions de $\varrho, \xi, \eta_1, \eta_2$ et en éliminant ϱ, on obtient un système de deux équations entre les 6 variables $\xi, \eta_1, \eta_2, x, y_1, y_2$:

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1(\xi, \eta_1, \eta_2, x, y_1, y_2) = 0 \ , \\ \Omega_2(\xi, \eta_1, \eta_2, x, y_1, y_2) = 0 \ , \end{aligned}\right\} \qquad (32,1)$$

que nous appellerons *équations directrices* de T. Ces équations définissent une *correspondance* entre les espaces S et Σ, telle que les points de Σ correspondant aux différents éléments de ligne passant par un point $P(x, y_1, y_2)$ de S forment une courbe donnée par (32,1), et de même à un point général de Σ correspond par (32,1) une courbe de S; une telle correspondance sera appelée dans la suite une *correspondance de rang 1.* Or, puisqu'il n'existe pas d'autres relations entre nos 6 variables, indépendantes de (32,1), chaque relation linéaire entre les différentielles de ces 6 variables doit être de la forme

$$\left.\begin{aligned} (\lambda_1 \Omega'_{1\xi} + \lambda_2 \Omega'_{2\xi}) d\xi + (\lambda_1 \Omega'_{1\eta_1} + \lambda_2 \Omega'_{2\eta_1}) d\eta_1 + \cdots + \\ + (\lambda_1 \Omega'_{1y_2} + \lambda_2 \Omega'_{2y_2}) dy_2 = 0 \ . \end{aligned}\right\} \qquad (32,2)$$

Mais la relation (13,5) devient, en posant $\mu = \dfrac{1}{m}$,

$$m\varepsilon d\eta_1 - m\alpha d\eta_2 - m\beta d\xi - e dy_1 + a dy_2 + b dx = 0 \ , \qquad (32,3)$$

où α, β, a, b, m peuvent être exprimés en fonctions de $\xi, \eta_1, \eta_2, x, y_1, y_2$. On a donc en choisissant convenablement les fonctions λ_1 et λ_2

$$\lambda_1 \Omega'_{1v_1} + \lambda_2 \Omega'_{2v_1} = -e \quad , \tag{32,4}$$
$$\lambda_1 \Omega'_{1v_2} + \lambda_2 \Omega'_{2v_2} = a \quad , \tag{32,5}$$
$$\lambda_1 \Omega'_{1x} + \lambda_2 \Omega'_{2x} = b \quad , \tag{32,6}$$
$$\lambda_1 \Omega'_{1\eta_1} + \lambda_2 \Omega'_{2\eta_1} = m\varepsilon \quad , \tag{32,7}$$
$$\lambda_1 \Omega'_{1\eta_2} + \lambda_2 \Omega'_{2\eta_2} = -m\alpha \,, \tag{32,8}$$
$$\lambda_1 \Omega'_{1\xi} + \lambda_2 \Omega'_{2\xi} = -m\beta \,, \tag{32,9}$$

33. Les 6 relations (32,4)—(32,9) permettent en général de retrouver la transformation T à partir du système (32,1), si l'on suppose la forme ds connue. En effet, on obtient en éliminant λ_1 et λ_2 des trois équations (32,4)—(32,6), et en remplaçant e, a, b par leurs expressions en r, x, y_1, y_2:

$$\Omega \equiv \Delta_3 b + \Delta_2 a - \Delta_1 e = 0 \,, \tag{33,1}$$

où l'on a

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \Omega'_{1v_2} & \Omega'_{2v_2} \\ \Omega'_{1x} & \Omega'_{2x} \end{vmatrix} \,, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \Omega'_{1x} & \Omega'_{2x} \\ \Omega'_{1v_1} & \Omega'_{2v_1} \end{vmatrix} \,, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \Omega'_{1v_1} & \Omega'_{2v_1} \\ \Omega'_{1v_2} & \Omega'_{2v_2} \end{vmatrix} \,. \tag{33,2}$$

Si alors (33,1), *considérée comme équation en* ξ, η_1, η_2, *peut être combinée avec les équations* (32,1) *pour les valeurs générales des* r, x, y_1, y_2, *de sorte que ces trois équations soient résolubles par rapport à* ξ, η_1, η_2, on tirera d'elles ξ, η_1, η_2 en fonctions de r, x, y_1, y_2.

En substituant ces valeurs et celles des λ_1, λ_2 dans les trois équations (32,7) — (32,9), on arrive à exprimer ϱ en fonction de r, x, y_1, y_2. En effet, si la valeur de $m\varepsilon$, obtenue de (32,7) est $\neq 0$, on aura $\varepsilon = 1$ et l'on exprimera α et β en fonctions de r, x, y_1, y_2. Si l'expression de α, obtenue de cette façon, est indépendante des expressions des ξ, η_1, η_2, on aura évidemment $\alpha = \varrho$, et β pourra être exprimé en fonction de ϱ, ξ, η_1, η_2. $d\sigma$ appartiendra au type I. Et si α est exprimable par ξ, η_1, η_2, on aura évidemment affaire à une forme $d\sigma$ du type II. Alors on exprimera $\varrho = \beta$ en fonction de r, x, y_1, y_2 au moyen des relations (32,9) et (32,7). Enfin, si la valeur de $m\varepsilon$, obtenue de (32,7) est $= 0$, notre $d\sigma$ appartient au type III, et la valeur de $\varrho = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ s'obtiendra des relations (32,8), (32,9). — Nous avons maintenant à analyser la condition portant sur (33,1).

34. Puisque les équations (32,1) proviennent d'une transformation R donnée, il est clair que (33,1) est *compatible* avec (32,1).

Nous avons donc à nous demander, s'il est possible, pour une transformation R donnée, de choisir les équations (32,1) de sorte que l'équation (33,1) ne soit pas satisfaite pour chaque valeur de r, en vertu de (32,1).

Dans ce qui suit, nous appelons *transformation singulière* chaque transformation R pour laquelle, pour chaque choix de couples équivalents d'équations $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$, où Ω_1 et Ω_2 sont supposées douées de dérivées continues du premier et du second ordre, l'équation (33,1) est satisfaite en vertu de (32,1).

Or, on pourra en tous cas représenter le résultat d'élimination de r et de ϱ dans une forme résolue par rapport à deux des trois variables x, y_1, y_2. Nous pouvons donc supposer dès le début, que le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} \Omega'_{1y_1} & \Omega'_{1y_2} & \Omega'_{1x} \\ \Omega'_{2y_1} & \Omega'_{2y_2} & \Omega'_{2x} \end{pmatrix} \tag{34,1}$$

reste $= 2$ pour le point général du lieu géométrique donné par (32,1).

Alors, il est facile de voir que, si b ne se réduit pas à un polynôme linéaire en r (ds est alors une forme adjointe du type I):

$$\left.\begin{aligned} & ds = dy_1 - r\,dy_2 - f\,dx \\ & \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \neq 0 \ , \quad \text{en vertu de (32,1)} \ , \end{aligned}\right\} \tag{34,2}$$

(33,1) n'est pas satisfaite en vertu de (32,1) pour chaque valeur de r. En effet, dans le cas contraire, on aurait en dérivant (33,1) par rapport à r: $\Delta_3 f'_r + \Delta_2 = 0$. Mais alors, f'_r étant variable avec r, on aurait $\Delta_3 = \Delta_2 = 0$ et Δ_1 reste d'après notre hypothèse $\neq 0$ en vertu de (32,1). Alors l'équation (33,1) se réduit à $\Delta_1 = 0$, et, cette équation n'étant pas satisfaite identiquement en vertu de (32,1), les expressions (14,1) des ξ, η_1, η_2 en fonctions de x, y_1, y_2, r seraient indépendantes de r. Notre transformation serait ponctuelle, contrairement à l'hypothèse formulée au § 1.

35. Considérons maintenant la transformation R, T_0, donnée par

$$y_1 = \eta_1, \quad y_2 = \eta_2, \quad x = X(\varrho, \xi, \eta_1, \eta_2), \quad r = \varrho \tag{35,1}$$

et correspondant aux formes adjointes

$$ds = dy_1 - r\,dy_2 \ , \qquad d\sigma = d\eta_1 - \varrho\, d\eta_2 \ . \tag{35,2}$$

Ici on a naturellement à supposer que

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} \neq 0 \ , \qquad \frac{\partial X}{\partial \varrho} \neq 0 \ . \tag{35,3}$$

Je dis que T_0 est une transformation singulière.

En effet, si une fonction $\Omega(y_1, \eta_1, y_2, \eta_2, x, \xi)$, douée de dérivées continues du premier et du second ordre, devient 0 pour $y_1 = \eta_1, y_2 = \eta_2$, on obtient, en appliquant à chacune les deux parenthèses de droite dans la décomposition

$$\Omega = \{\Omega - \Omega(y_1, y_1, y_2, \eta_2, x, \xi)\} + \{\Omega(y_1, y_1, y_2, \eta_2, x, \xi)\}$$

le théorème des accroissements finis, une représentation de la forme

$$\Omega = L(y_1 - \eta_1) + M(y_2 - \eta_2) ,$$

où les dérivées de L et M du premier ordre restent continues. Donc, pour notre T_0, les fonctions Ω_1, Ω_2 auront en tous cas la forme

$$\Omega_\nu = L_\nu(y_1 - \eta_1) + M_\nu(y_2 - \eta_2) , \qquad \nu = 1, 2 ,$$

où L_1, L_2, M_1, M_2 possèdent des dérivées continues du premier ordre. Mais alors, en éliminant λ_1, λ_2 des (32,4) — (32,6) pour ces Ω_ν et pour la forme adjointe ds (35,2), on obtient un déterminant, dont la dernière ligne sera la suivante:

$$L'_{1x}(y_1 - \eta_1) + M'_{1x}(y_2 - \eta_2) \ ; \ L'_{2x}(y_1 - \eta_1) + M'_{2x}(y_2 - \eta_2) \ ; \ 0 \ ;$$

l'équation (33,1) est donc satisfaite identiquement pour $y_1 = \eta_1, y_2 = \eta_2$.

36. Nous allons maintenant montrer que *chaque transformation singulière se réduit à une transformation du type* T_0, (35,1), *correspondant aux formes adjointes* (35,2), *par transformations ponctuelles dans les espaces* S *et* Σ. Montrons d'abord, qu'une transformation singulière conserve cette propriété, si l'on effectue des transformations ponctuelles dans les espaces S et Σ.

Pour l'espace Σ, c'est évident, puisque les dérivées dans (33,2) ne se rapportent qu'aux variables x, y_1, y_2.

Soit de l'autre côté

$$y_1 = y_1^*(X, Y_1, Y_2) \ , \ y_2 = y_2^*(X, Y_1, Y_2) \ , \ x = x^*(X, Y_1, Y_2) \ , \qquad (36,1)$$

une transformation ponctuelle dont naturellement le Jacobien Δ est $\neq 0$. D'après les calculs du n° 17, la forme adjointe ds se transforme en

$$E\,dY_1 - A\,dY_2 - B\,dX = M\,dS \ , \qquad (36,2)$$

où dS est la forme adjointe transformée et

$$\left.\begin{aligned}
E &= \quad e\frac{\partial y_1}{\partial Y_1} - a\frac{\partial y_2}{\partial Y_1} - b\frac{\partial x}{\partial Y_1}\,, \\
A &= -e\frac{\partial y_1}{\partial Y_2} + a\frac{\partial y_2}{\partial Y_2} + b\frac{\partial x}{\partial Y_2}\,, \\
B &= -e\frac{\partial y_1}{\partial X} + a\frac{\partial y_2}{\partial X} + b\frac{\partial x}{\partial X}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{36,3}$$

Mais alors le déterminant correspondant à (33,1) devient, en négligeant un facteur $\neq 0$, $\neq \infty$:

$$\begin{vmatrix} \Omega'_{1Y_1} & \Omega'_{2Y_1} & -E \\ \Omega'_{1Y_2} & \Omega'_{2Y_2} & A \\ \Omega'_{1X} & \Omega'_{2X} & B \end{vmatrix} = \Delta \begin{vmatrix} \Omega'_{1v_1} & \Omega'_{2v_1} & -e \\ \Omega'_{1v_2} & \Omega'_{2v_2} & a \\ \Omega'_{1x} & \Omega'_{2x} & b \end{vmatrix} . \tag{36,4}$$

Donc ce déterminant s'annule en vertu de $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ pour chaque valeur de r, et la transformation résultante est encore singulière.

37. De l'autre côté, comme nous l'avons vu à la fin du n⁰ 19, chaque forme adjointe du premier type, où b est linéaire et entier en r, est équivalente, par une transformation ponctuelle, à la forme adjointe $dy_1 - rdx$, qui est de son côté équivalente à $dy_1 - rdy_2$, la permutation de x et y_2 étant une transformation ponctuelle. Il en résulte d'après le résultat du n⁰ 34 qu'une transformation singulière T^* se réduit par une transformation ponctuelle à une transformation R singulière T', pour laquelle la forme adjointe ds devient

$$dy_1 - rdy_2\,. \tag{37,1}$$

Soit maintenant (32,1) un couple d'équations directrices, correspondant à T'. L'expression $\Delta_2 r - \Delta_1$ s'annulant en vertu de (32,1) pour chaque valeur de r, on a évidemment

$$\Delta_2 = \Delta_1 = 0 \tag{37,2}$$

en vertu de (32,1). Donc, si le rang de la matrice (34,1) reste 2 dans le point général de (32,1), on a $\Delta_3 \neq 0$, et les équations (32,1) peuvent être résolues par rapport à y_1 et y_2. On peut donc écrire ces deux équations dans la forme

$$y_1 - T_1(x, \xi, \eta_1, \eta_2) = 0 \quad , \quad y_2 - T_2(x, \xi, \eta_1, \eta_2) = 0\,. \tag{37,3}$$

Mais alors, il résulte de (37,2) que T'_{1x} et T'_{2x} s'annulent dans le point général de (37,3), donc identiquement. On obtient donc

$$y_1 = T_1(\xi, \eta_1, \eta_2)\,, \qquad y_2 = T_2(\xi, \eta_1, \eta_2)\,,$$

où T_1 et T_2 sont naturellement deux fonctions indépendantes des ξ, η_1, η_2. En effectuant une transformation ponctuelle dans Σ, on peut faire les fonctions T_1, T_2 respectivement égales à η_1, η_2. Alors les équations (32,1) deviennent

$$y_1 = \eta_1\,, \qquad y_2 = \eta_2\,. \tag{37,4}$$

En exprimant x par ϱ, ξ, η_1, η_2, on obtient

$$x = X(\varrho, \xi, \eta_1, \eta_2)\,, \tag{37,5}$$

et (37,1) se transforme en $d\eta_1 - r d\eta_2$, donc on a $r = \varrho$.

Mais alors X doit contenir effectivement ξ et n'est certainement pas indépendant de ϱ, T n'étant pas une transformation ponctuelle. Donc on a

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} \neq 0 \quad , \quad \frac{\partial X}{\partial \varrho} \neq 0 \quad ,$$

et la transformation T' devient une transformation du type T_0, considéré au n° 35.

38. Il est facile à caractériser géométriquement les correspondances (32,1) déduites des transformations singulières. Généralement, aux points de Σ correspondent ∞^3 courbes de S. Or, pour la correspondance (37,4), on n'obtient que ∞^2 courbes de S, qui correspondent aux points (ξ, η_1, η_2), et il en est évidemment de même pour chaque transformée de la correspondance (37,4) par transformations ponctuelles, c'est-à-dire pour chaque correspondance déduite des transformations singulières. Supposons inversement que, pour la correspondance (32,1), aux points (ξ, η_1, η_2) ne correspondent que ∞^2 courbes L dans S. Alors les points de Σ auxquels correspond une courbe particulière L, forment eux-mêmes une courbe Λ dans Σ. Et à chaque point de Σ situé sur Λ, correspond L, en vertu de notre correspondance. Nous appellerons les correspondances (32,1), jouissant de cette propriété, *correspondance intransitives*.

Or, en introduisant des nouvelles coordonnées dans S et Σ, on peut faire de sorte, que les lignes L, Λ deviennent des droites ($y_1 =$ const.; $y_2 =$ const.); ($\eta_1 =$ const.; $\eta_2 =$ const.), dès lors, en effectuant une transformation entre les η_1, η_2, on obtient $y_1 = \eta_1$, $y_2 = \eta_2$, c'est-à-dire (37,4).

Enfin, si les équations (32,1) possèdent la forme (37,4), il résulte de

(33,1): $b = 0$. Donc la forme (37,1) est la seule qui puisse être combinée avec (37,4).

En rassemblant les résultats de ce paragraphe, on obtient:

Théorème V: Chaque transformation R, sauf les transformations singulières, peut être déduite d'un couple convenable (32,1) *de ses équations directrices en résolvant les équations* (32,4) — (32,9).

Les transformations singulières peuvent être caractérisées par la propriété qu'elles sont, par des transformations ponctuelles dans Σ et S, équivalentes à une transformation du type (35,1) *correspondant aux formes adjointes* (35,2).

Pour qu'une correspondance (32,1) *soit déduite d'une transformation singulière, il est nécessaire et suffisant qu'elle soit intransitive. Une correspondance intransitive C ne peut être combinée qu'avec les formes adjointes qui proviennent de* (37,1) *par les transformations ponctuelles transformant* (37,4) *en C, et ne se déduit que des transformations singulières dans lesquelles se transforment les transformations* (35,1) *par ces transformations ponctuelles.*

§ 8. Formation des transformations R à partir d'une correspondance de rang 1, donnée à priori

39. Le but principal de ce paragraphe est de montrer qu'en appliquant les calculs du n⁰ 33 à un système de deux équations

$$\Omega_\nu(x, y_1, y_2, \xi, \eta_1, \eta_2) = 0\,, \qquad \nu = 1, 2, \tag{39,1}$$

et à une forme adjointe *ds*, *données à priori*, on obtient en général une transformation R.

Quant aux équations (39,1), nous supposons qu'elles définissent une correspondance entre S et Σ, de sorte qu'à un point général de l'un de ces espaces corresponde une courbe dans l'autre. Plus précisément, nous faisons les hypothèses suivantes:

1) Les équations (39,1) sont, pour un point général de Σ, résolubles par rapport à un couple convenable des trois variables x, y_1, y_2, pour la valeur générale de la troisième de ces trois variables. Le même fait subsiste, si l'on interchange les espaces S et Σ.

2) Les fonctions Ω_1, Ω_2 sont douées de dérivées continues du premier ordre pour le point général P de chacun de nos espaces, et pour le point général de la courbe qui correspond à P dans l'autre.

3) Chacune des deux matrices

$$\begin{pmatrix} \Omega'_{1y_1} & \Omega'_{2y_1} \\ \Omega'_{1y_2} & \Omega'_{2y_2} \\ \Omega'_{1x} & \Omega'_{2x} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \Omega'_{1\eta_1} & \Omega'_{2\eta_1} \\ \Omega'_{1\eta_2} & \Omega'_{2\eta_2} \\ \Omega'_{1\xi} & \Omega'_{2\xi} \end{pmatrix} \tag{39,2}$$

conserve le rang 2 pour le point général P de chacun de nos espaces, et pour le point général de la courbe qui correspond à P dans l'autre.

40. Nous allons d'abord analyser la „transitivité“ de la correspondance (39,1). La définition de l'intransitivité, donnée au n⁰ 38, revient à ce que les équations (39,1) peuvent être supposées dans la forme „séparée“

$$\Phi_\nu(\xi, \eta_1, \eta_2) = F_\nu(x, y_1, y_2)\,, \qquad \nu = 1, 2\,. \tag{40,1}$$

Si la correspondance (39,1) n'est pas intransitive, elle sera appelée *transitive.*

Pour déduire la condition d'existence d'*une* relation (40,1), résolvons (39,1) par rapport à deux des trois variables ξ, η_1, η_2. Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait

$$\eta_\nu = \eta_\nu(\xi, x, y_1, y_2)\,, \qquad \nu = 1, 2\,.$$

Alors une relation (40,1) représente une relation entre F, η_1, η_2 en fonctions de x, y_1, y_2, en considérant ξ comme un paramètre. Donc, le Jacobien de η_1, η_2, F par rapport à x, y_1, y_2 s'annule identiquement en ξ, x, y_1, y_2.

Réciproquement, si cette dernière condition est satisfaite, il existe une relation entre F, η_1, η_2, dans laquelle ξ entre comme paramètre, et en résolvant cette relation par rapport à F, on obtient une relation de la forme (40,1).

Or, en calculant, au moyen des équations (39,1) les dérivées partielles de η_1, η_2 par rapport à x, y_1, y_2 et en introduisant ces valeurs dans l'équation $\dfrac{\partial(\eta_1, \eta_2, F)}{\partial(x, y_1, y_2)} = 0$, on obtient par un calcul immédiat la condition $\dfrac{\partial(\Omega_1, \Omega_2, F)}{\partial(x, y_1, y_2)} = 0$, c'est-à-dire

$$\Delta_1 F'_{y_1} + \Delta_2 F'_{y_2} + \Delta_3 F'_x = 0\,. \tag{40,2}$$

Donc, pour qu'il soit possible de déduire des (39,1) une relation de la forme (40,1), il est nécessaire et suffisant que F satisfasse à l'équation linéaire (40,2), en vertu des équations (39,1).

41. Maintenant, pour que (39,1) soit intransitive, il est évidemment nécessaire et suffisant que l'équation linéaire (40,2) possède *deux intégrales indépendantes* F_1, F_2 qui ne dépendent pas de ξ, η_1, η_2. Mais alors, $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ sont proportionnels, en vertu de (39,1), aux trois Jacobiens de ces deux intégrales, donc à trois fonctions indépendantes, en ξ, η_1, η_2.

Réciproquement, si l'on peut mettre, en vertu de (39,1), l'équation (40,2) sous la forme

$$T(D_1 F'_{y_1} + D_2 F'_{y_2} + D_3 F'_x) = 0 \ , \tag{41,1}$$

où D_1, D_2, D_3 ne dépendent pas de ξ, η_1, η_2, l'équation linéaire $D_1 F'_{y_1} + D_2 F'_{y_2} + D_3 F'_x = 0$ possède deux intégrales indépendantes qui ne dépendent naturellement pas de ξ, η_1, η_2. Donc:

Une condition nécessaire et suffisante pour que la correspondance (39,1) *soit intransitive est, que les quotients des $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ deviennent, en vertu de* (39,1), *trois fonctions indépendantes, en ξ, η_1, η_2.*

Il résulte immédiatement du résultat obtenu:

Une condition nécessaire et suffisante pour que (39,1) *soit intransitive est qu'il existe deux relations :*

$$P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3 = 0 \ , \qquad Q_1 \Delta_1 + Q_2 \Delta_2 + Q_3 \Delta_3 = 0 \ ,$$

où les P_ν et *Q_ν ne dépendent que de x, y_1, y_2 et où le rang de la matrice*

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \end{pmatrix}$$

est = 2. — Deux relations linéaires jouissant de cette propriété seront appelées dans la suite „*essentiellement différentes entre elles*“.

En particulier, (39,1) est intransitif, si deux des trois déterminants $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ s'annulent.

De l'autre côté, si (39,1) est transitif, il peut très bien exister, en vertu de (39,1), *une* relation

$$P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + P_3 \Delta_3 = 0 \ , \tag{41,2}$$

où P_1, P_2, P_3 sont indépendants de ξ, η_1, η_2. La correspondance (39,1) sera alors appelée *faiblement transitive dans l'espace S.*

Il est facile d'interpréter géométriquement la relation (41,2) en termes de la correspondance (39,1). Pour un point général (ξ, η_1, η_2) de Σ, les cosinus directeurs α, β, γ de la tangente à la courbe (39,1) dans un point correspondant (x, y_1, y_2) de S sont évidemment proportionnels aux déterminants $\Delta_3, \Delta_1, \Delta_2$. De l'autre côté, l'équation de Pfaff

$$P_3 dx + P_1 dy + P_2 dy_2 = 0 \tag{41,3}$$

définit un élément de surface passant par (x, y_1, y_2). Et l'équation (41,2) dit que toutes les courbes (39,1) de S passant par le point (x, y_1, y_2) sont tangentes à l'élément de surface (41,3).

Quant aux conditions d'existence pour une relation (41,2) on peut les déduire facilement, en éliminant au moyen de (39,1) deux des trois variables ξ, η_1, η_2 de $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, et en formant le Wronskien des fonctions résultantes par rapport à la troisième variable. Mais on n'obtient ainsi qu'une condition relativement compliquée.

42. Pour déduire de la correspondance (39,1) une transformation R, on écrira les équations (32,4) — (32,9) et l'on procédera comme au n° 33. L'élimination de λ_1 et λ_2 des trois équations (32,4) — (32,6) conduit à l'équation (33,1). Supposons que la condition suivante soit satisfaite:

1) *On peut tirer de* (33,1) *et* (39,1) *les valeurs de* ξ, η_1, η_2 *en fonctions des* r, x, y_1, y_2, *et l'une au moins de ces valeurs dépend effectivement de* r.

En substituant ces valeurs et celles de λ_1, λ_2 dans les équations (32,7) — (32,9), on pourra identifier $\varepsilon, \alpha, \beta$ avec les coefficients d'une forme adjointe $d\sigma$, si les deux conditions suivantes sont satisfaites avec 1):

2) *Les expressions de* ξ, η_1, η_2 *en fonctions des* r, x, y_1, y_2 *sont indépendantes.*

3) *Pour deux des expressions de gauche dans* (32,7) — (32,9), *convenablement choisies, le quotient est une fonction de* r, x, y_1, y_2, *qui ne peut pas être exprimée en fonction de* ξ, η_1, η_2 *seuls.*

Si les trois conditions indiquées sont satisfaites, on parvient toujours à une transformation R pour laquelle les équations (39,1) sont un couple d'équations directrices.

43. Quant à la *deuxième* des trois conditions du numéro précédent, on montre facilement qu'elle est toujours satisfaite avec la première.

En effet, supposons qu'il existe une relation

$$\Phi(\xi, \eta_1, \eta_2) = 0$$

entre les valeurs de ξ, η_1, η_2 tirées des équations (33,1) et (39,1). On peut alors, en introduisant des coordonnées convenables dans l'espace Σ, supposer que cette relation se réduise à

$$\xi = 0 . \tag{43,1}$$

De l'autre côté, on peut supposer, d'après les hypothèses du n⁰ 39, que les équations (39,1) sont données dans la forme résolue par rapport à deux des trois variables x, y_1, y_2, par exemple:

$$y_\nu - \Omega_\nu^* (x, \xi, \eta_1, \eta_2) = 0 , \qquad \nu = 1, 2 . \tag{43,2}$$

Mais alors, puisque (43,1) et (43,2) sont compatibles, on a:

$$y_\nu = \Omega_\nu^* (x, 0, \eta_1, \eta_2) , \qquad \nu = 1, 2 . \tag{43,3}$$

Ce couple d'équations n'est assurément pas résoluble par rapport à η_1, η_2, puisque dans le cas contraire η_1 et η_2 seraient indépendants de r. Donc, le Jacobien de Ω_1^* et Ω_2^* par rapport à η_1 et η_2 s'annule identiquement en x, η_1 et η_2. Il en résulte une relation identique entre x, Ω_1^* et Ω_2^*, donc en vertu de (43,3), entre x, y_1 et y_2:

$$F(x, y_1, y_2) = 0 . \tag{43,4}$$

Mais alors, si (43,4) est une conséquence des équations (39,1) et (33,1), ce système n'est assurément résoluble par rapport à ξ, η_1, η_2 que dans l'hypothèse (43,4), ce qui est contraire à la première des conditions du numéro précédent.

44. Nous allons maintenant analyser la *première* des conditions énumérées au n⁰ 42, à savoir celle qui se rapporte à l'équation (33,1). Pour pouvoir arriver aux critères maniables sans faire des hypothèses trop spéciales sur *la nature fonctionnelle* des fonctions Ω_ν, nous allons poser la question sous une forme différente.

Une forme adjointe ds sera appelée *régulière relativement à la correspondance* (39,1), si elle possède la propriété suivante:

Exprimons au moyen des équations (39,1) *deux des trois variables* ξ, η_1, η_2, *choisies convenablement, en fonctions de la troisième de ces variables que nous appelons* η, *et de* x, y_1, y_2. *Introduisons ces valeurs dans l'expression* Ω *en* (33,1) *et désignons respectivement par*

$$\Omega^* = \Delta_3^* b + \Delta_2^* a - \Delta_1^* e \tag{44,1}$$

et par Δ_1^*, Δ_2^*, Δ_3^* *ce que deviennent* Ω, Δ_1, Δ_2, Δ_3 *après cette substitution.*

Alors, Ω^* contient effectivement chacune des deux variables η et r et ne peut pas être décomposé en produit $F_1(\eta)\,F_2(r)$ des deux fonctions $F_1(\eta), F_2(r)$ dont la première est indépendante de r et la seconde indépendante de η.

Si une forme adjointe ds n'est pas régulière relativement à (39,1), elle sera appelée *singulière relativement à* (39,1). On a alors la relation identique:

$$\Delta_3^* b + \Delta_2^* a - \Delta_1^* e = F_1(\eta) F_2(r) \ . \qquad (44,2)$$

Naturellement, si ds est régulière relativement à (39,1), il n'en résulte pas encore dans tous les cas que la première condition du n⁰ 42 soit satisfaite. L'équation $\Omega^* = 0$ pourrait très bien ne pas posséder de racines en η pour les valeurs générales de r. Mais elle permet certainement d'exprimer η en fonction de r, si par exemple les fonctions Ω_ν sont algébriques — en admettant naturellement des solutions imaginaires. Dans le cas des fonctions Ω_ν transcendantes, la discussion ultérieure dépend déjà des propriétés spéciales de ces fonctions, qui doivent être spécifiées dans chaque cas particulier.

On peut donc dire que *la condition „algébriquement complète" pour que la première condition du n⁰* 42 *soit satisfaite, est que ds soit régulière relativement à* (39,1).

45. Il s'agit maintenant de trouver toutes les formes adjointes singulières relativement à la correspondance (39,1).

Tout d'abord, il résulte de la relation (36,4), où Δ est indépendant de r, ξ, η_1, η_2, que par une transformation ponctuelle dans l'espace S, les formes singulières se transforment en formes singulières et vice versa. De même, il suit immédiatement de la définition des formes singulières que par une transformation ponctuelle dans l'espace Σ aussi, les formes singulières se transforment en formes singulières et vice versa.

Il en résulte que pour une correspondance intransitive, toutes les formes adjointes sont singulières. En effet, par transformations ponctuelles dans les espaces S et Σ, les équations directrices d'une correspondance intransitive (39,1) peuvent être transformées en

$$\eta_1 - y_1 = 0 \,, \qquad \eta_2 - y_2 = 0 \,.$$

Mais alors, l'expression Ω^* en (44,1) se réduit à une fonction qui ne dépend ni de η_1, ni de η_2, ni de ξ, quelle que soit la forme adjointe ds.

Nous admettrons donc dans la discussion suivante que (39,1) est transitive et nous allons démontrer d'abord que, *si* (39,1) *possède des formes adjointes singulières, la correspondance* (39,1) *est faiblement transitive dans* S, c'est-à-dire qu'*il existe une relation identique :*

$$P_1 \Delta_1^* + P_2 \Delta_2^* + P_3 \Delta_3^* = 0 \ , \tag{45,1}$$

où P_1, P_2, P_3 *ne dépendent que de* x, y_1, y_2 *et l'un au moins des coefficients* P_1, P_2, P_3 *ne s'annule pas identiquement.*

Supposons d'abord que $F_2(r)$ dans (44,2) s'annule identiquement. Alors, on obtient de (44,2) pour $r = r_1$ et $r = r_2$, $r_1 \neq r_2$, deux relations de la forme (45,1), essentiellement différentes entre elles. En effet, l'une des deux grandeurs $- a, e$ est toujours identique à 1. De l'autre côté, l'une des deux grandeurs a, b est toujours identique à r, et devient dans nos deux relations égale à $r_1, r_2 \neq r_1$.

Mais alors, d'après ce que nous avons dit au n⁰ 42, la correspondance (39,1) est intransitive. Nous pouvons donc admettre dans la suite que $F_2(r)$ ne s'annule pas identiquement.

Ecrivons la relation (44,2) pour une valeur r_0 de r, telle que $F_2(r_0) \neq 0$, et désignons les valeurs correspondantes de $a, b, F_2(r)$ respectivement par a_0, b_0, f_0. On obtient

$$\Delta_3^* b_0 + \Delta_2^* a_0 - \Delta_1^* e = F_1(\eta) f_0 \ .$$

En éliminant $F_1(\eta)$ entre cette relation et la relation (44,2), on obtient

$$(b_0 F_2(r) - b f_0) \Delta_3^* + (a_0 F_2(r) - a f_0) \Delta_2^* - e(F_2(r) - f_0) \Delta_1^* = 0 . \tag{45,2}$$

Or, s'il existe une valeur r_1 de r pour laquelle $F_2(r) \neq f_0$, l'un des deux derniers coefficients dans (45,2) reste $\neq 0$ pour $r = r_1$, puisque ou bien e, ou bien $- a$ a la valeur 1. Si de l'autre côté, on a pour chaque valeur de r: $F_2(r) = f_0$, il résulte de (45,2), en divisant par f_0:

$$(b_0 - b) \Delta_3^* + (a_0 - a) \Delta_2^* = 0 \ ,$$

et dans cette relation l'un des coefficients reste $\neq 0$ pour $r = r_1 \neq r_0$, puisque ou bien a, ou bien b est identique à r.

Donc, la relation (45,2) se réduit dans tous les cas à une relation (45,1),

C. Q. F. D.

Nous allons maintenant montrer que *dans une forme adjointe singulière* correspondant à la correspondance (39,1), *le coefficient* b *est un polynome au plus linéaire en* r, c'est-à-dire qu'*une forme singulière est toujours axiale.* Il suffit évidemment de considérer le cas d'une forme du type I, on pourra donc faire $e = 1$, $a = r$. Or, d'après ce que nous avons dit au n⁰ 41, la relation (45,2) ne peut, pour aucune valeur de r, être essentiellement différente de la relation (45,1). Il en résulte que l'on a pour un M convenablement choisi:

$$b_0F_2(r) - bf_0 = MP_3, \quad r_0F_2(r) - rf_0 = MP_2, \quad F_2(r) - f_0 = MP_1, \quad (45{,}3)$$

donc, en éliminant de ces trois relations $F_2(r)$, f_0 et M:

$$\begin{vmatrix} b & P_3 & b_0 \\ r & P_2 & r_0 \\ 1 & P_1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ . \qquad (45{,}4)$$

Or, l'une au moins des deux grandeurs P_1, P_2 ne s'annule pas identiquement, puisque dans le cas contraire on aurait des deux dernières équations (45,3): $r = r_0$. Donc, on peut choisir r_0 de sorte que $P_2 - r_0P_1$ ne s'annule pas. Mais alors on obtient de (45,4) une expression de b, qui est au plus linéaire en r, C. Q. F. D.

46. Nous allons maintenant démontrer que *la condition nécessaire et suffisante pour que ds soit singulière par rapport à* (39,1) *est que l'axe de ds soit situé dans l'élément de surface*

$$P_3\,dx + P_1dy_1 + P_2dy_2 = 0$$

correspondant à la relation (45,1).

Il résulte d'abord de (44,2), b étant au plus linéaire en r, que $F_2(r)$ peut être écrit dans la forme

$$F_2(r) = C(x, y_1, y_2)r + D(x, y_1, y_2) \ . \qquad (46{,}1)$$

Supposons maintenant que ds soit du type I, on a alors

$$a = r, \quad e = 1, \quad b = A(x, y_1, y_2)r + B(x, y_1, y_2)$$

et la relation (44,2) se réduit, en comparant les coefficients des différentes puissances de r, aux deux relations

$$A\Delta_3^* + \Delta_2^* = CF_1 \ , \quad B\Delta_3^* - \Delta_1^* = DF_1 \ ,$$

dont on peut toujours déduire $F_1(\eta)$, si la relation

$$(AD - BC)\,\Delta_3^* + D\Delta_2^* + C\Delta_1^* = 0 \ ,$$

obtenue en éliminant F_1, est satisfaite. Donc, en vertu de (45,1), il existe une fonction $M(x, y_1, y_2)$, telle que

$$AD - BC = MP_3, \quad D = MP_2, \quad C = MP_1,$$

et la condition nécessaire et suffisante pour que D et C puissent être déduites de ces trois relations est:

$$P_3 - P_2 A + P_1 B = 0 \; .$$

Or, eu égard aux expressions (11,7) des cosinus directeurs de l'axe de ds, cette relation se réduit à

$$\alpha_0 P_3 + \beta_0 P_1 + \gamma_0 P_2 = 0 \; , \tag{46,2}$$

conformément à notre assertion.

Si ds appartient au type II, on a

$$b = r, \quad a = c(x, y_1, y_2), \quad e = 1$$

et la relation (44,2) conduit aux deux relations

$$\Delta_3^* = CF_1 \; , \; c\Delta_2^* - \Delta_1^* = DF_1 \; ,$$

donc, en éliminant F_1:

$$D\Delta_3^* - cC\Delta_2^* + C\Delta_1^* = 0$$

et, en comparant avec (45,1):

$$D : -cC : C = P_3 : P_2 : P_1 \; ,$$

d'où la relation $cP_1 + P_2 = 0$, qui se réduit en vertu de (11,7) à (46,2).

Enfin, dans le cas III:

$$b = -r, \quad a = 1, \quad e = 0,$$

on obtient de (44,2):

$$-\Delta_3^* = CF_1 \; , \; \Delta_2^* = DF_1 \; , \; D\Delta_3^* + C\Delta_2^* = 0 \; ,$$

donc, en comparant avec (45,1): $P_1 = 0$, ce qui réduit en vertu de (11,7), dans ce cas aussi, à (46,2), et notre assertion est complètement démontrée.

Relevons enfin que, dans certains cas, même une forme adjointe *régulière* relativement à (39,1) peut conduire à une transformation R qui ne se réduit pas complètement à une transformation ponctuelle, mais, étant multiforme, possède des composantes qui se réduisent aux transformations ponctuelles. Pour cela il est nécessaire et suffisant que l'identité suivante, analogue à l'identité (44,2), ait lieu:

$$\Delta_3^* b + \Delta_2^* a - \Delta_1^* e = F_1(\eta) F_2(\eta, r) \; , \tag{46,3}$$

où $F_1(\eta)$ contient effectivement η, mais est indépendant de r et ne divise pas toutes les trois expressions Δ_ν^*, tandis que $F_2(\eta, r)$ contient effectivement les deux variables η et r, et ne possède plus de facteurs du type $F_1(\eta)$.

Dans ce cas on pourrait obtenir, en résolvant l'équation $F_1(\eta) = 0$, une transformation ponctuelle, tandis que la résolution de l'équation $F_2(\eta, r) = 0$ conduit à une transformation R ne se réduisant pas à une transformation ponctuelle.

On peut montrer que l'identité (46,3) est, en général, réalisable pour chaque correspondance (39,1), même pour celles qui ne sont pas faiblement transitives dans S, en choisissant convenablement la forme axiale ds (Cf. n⁰ 63).

47. Passons maintenant à la *troisième* des conditions énoncées au n⁰ 42. Supposons que cette condition ne soit pas satisfaite pour la forme adjointe ds, c'est-à-dire que les 3 expressions de gauche dans les relations (32,7)—(32,9) soient proportionnelles, en vertu des équations (32,1), (32,4)—(32,6), aux trois fonctions de ξ, η_1, η_2:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 \Omega'_{1\eta_1} + \lambda_2 \Omega'_{2\eta_1} &= \kappa E(\xi, \eta_1, \eta_2) \,, \\ \lambda_1 \Omega'_{1\eta_2} + \lambda_2 \Omega'_{2\eta_2} &= -\kappa A(\xi, \eta_1, \eta_2) \,, \\ \lambda_1 \Omega'_{1\xi} + \lambda_2 \Omega'_{2\xi} &= -\kappa B(\xi, \eta_1, \eta_2) \,, \end{aligned}\right\} \qquad (47,1)$$

où les fonctions E, A, B sont indépendantes des x, y_1, y_2, r. Alors, en éliminant de ces trois équations λ_1, λ_2, κ:

$$\begin{vmatrix} \Omega'_{1\xi} & \Omega'_{2\xi} & B \\ \Omega'_{1\eta_1} & \Omega'_{2\eta_1} & -E \\ \Omega'_{1\eta_2} & \Omega'_{2\eta_2} & A \end{vmatrix} = 0 \qquad (47,2)$$

Désignons la relation (47,2) par

$$T(x, y_1, y_2;\ \xi, \eta_1, \eta_2) = 0 \,. \qquad (47,3)$$

Nous avons vu que cette relation est une conséquence des cinq relations (32,1), (32,4) — (32,6), c'est-à-dire qu'elle est satisfaite pour chaque système $(x, y_1, y_2;\ \xi, \eta_1, \eta_2)$, tel qu'il existe trois nombres λ_1, λ_2, r satisfaisant à ces 5 relations. Or, on peut supposer que les relations (32,1) soient résolues par rapport à deux des trois variables ξ, η_1, η_2, p. ex.

par rapport à η_1, η_2. Alors nos cinq relations deviennent, après l'élimination des λ_1, λ_2, en notation du n⁰ 44:

$$\eta_\nu = \omega_\nu(\xi\,;\, x, y_1, y_2)\,, \qquad \nu = 1, 2, \tag{47,4}$$

$$\Delta_3^* b + \Delta_2^* a - \Delta_1^* e = 0 \;. \tag{47,5}$$

En introduisant les expressions (47,4) dans (47,3), on obtient la relation

$$t(\xi;\, x, y_1, y_2) = 0\,, \tag{47,6}$$

qui doit être satisfaite en vertu de la relation (47,5).

Or, supposons que les deux premières conditions du n⁰ 42 soient satisfaites, donc en particulier que ds soit une forme adjointe régulière relativement à la correspondance (32,1).

Alors on a en particulier pour ξ une relation

$$\xi = U(r, x, y_1, y_2)\,,$$

où U dépend effectivement de r, puisque dans le cas contraire, d'après (47,4), η_1, η_2 seraient aussi indépendants de r.

Donc, en résolvant cette relation par rapport à r:

$$r = R(\xi, x, y_1, y_2)\,, \tag{47,7}$$

et la relation (47,6), valable en vertu de (47,7), l'est identiquement. Donc, (47,2) est valable en vertu de (32,1) et *notre correspondance est faiblement transitive dans l'espace* Σ.

48. Supposons inversement que la correspondance (32,1) soit faiblement transitive dans Σ. Les expressions A, B, E dans la relation (47,2) sont, à un facteur de proportionnalité près, univoquement déterminées, la correspondance (32,1) étant transitive. Or, ceci permet généralement de déterminer les formes ds pour lesquelles la condition dont il s'agit ici, n'est pas satisfaite. En effet, dans ce cas on peut remplacer les équations (32,7) — (32,9) par les trois équations (47,1). En supposant les deux équations (32,1) résolues p. ex. par rapport à η_1, η_2:

$$\eta_\nu - \omega_\nu(\xi, x, y_1, y_2) = 0\,, \qquad \nu = 1, 2\,, \tag{48,1}$$

les 6 équations (32,4) — (32,9) deviennent, pour $m = -\kappa$:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1\,\omega'_{1y_1} + \lambda_2\,\omega'_{2y_1} &= \quad e\,,\\ \lambda_1\,\omega'_{1y_2} + \lambda_2\,\omega'_{2y_2} &= -a\,,\\ \lambda_1\,\omega'_{1x} + \lambda_2\,\omega'_{2x} &= -b\,, \end{aligned}\right\} \tag{48,2}$$

$$\lambda_1 = -\kappa E \quad , \quad \lambda_2 = \kappa A \quad , \quad \lambda_1 \omega'_{1\xi} + \lambda_2 \omega'_{2\xi} = -\kappa B \; , \tag{48,3}$$

tandis que la relation (47,2) devient ici

$$B = E\,\omega'_{1\xi} - A\,\omega'_{2\xi} \; . \tag{48,4}$$

Ici, la troisième des relations (48,3) résulte des valeurs de λ_1, λ_2 en vertu de (48,4), et les 3 relations (48,2) se réduisent aux trois relations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} A\,\omega'_{2y_1} - E\,\omega'_{1y_1} &= \frac{e}{\kappa} \; , \\ A\,\omega'_{2y_2} - E\,\omega'_{1y_2} &= -\frac{a}{\kappa} \; , \\ A\,\omega'_{2x} - E\,\omega'_{1x} &= -\frac{b}{\kappa} \; . \end{aligned}\right\} \tag{48,5}$$

De ces trois relations il résulte que les expressions e, a, b, donc la forme ds, conduisant à notre cas d'exception sont univoquement déterminées.

Quant à l'existence de ds, il est clair que, si l'un des quotients des trois expressions de gauche en (48,5) ne peut pas être exprimé par x, y_1, y_2 seuls, on peut toujours trouver une forme ds satisfaisant aux relations (48,5). Il suffit en effet de procéder comme aux nos 25 et 26.

De l'autre côté, si les trois expressions de gauche en (48,5) sont proportionnelles aux trois fonctions P_1, P_2, P_3 ne dépendant que de x, y_1, y_2, il résulte la relation

$$\begin{vmatrix} \omega'_{2y_1} & \omega'_{1y_1} & P_1 \\ \omega'_{2y_2} & \omega'_{1y_2} & P_2 \\ \omega'_{2x} & \omega'_{1x} & P_3 \end{vmatrix} = 0 \; ,$$

donc notre correspondance est faiblement transitive dans l'espace S.

On voit donc que, si notre correspondance n'est pas faiblement transitive dans S aussi, notre cas d'exception se présente pour une seule forme adjointe ds.

Supposons enfin que la correspondance (39,1) soit faiblement transitive relativement à deux espaces S et Σ. Alors, d'après un théorème de S. Lie[4]), on peut réduire, par des transformations ponctuelles dans les espaces S et Σ les deux équations (39,1) à la forme

$$\eta_1 = y_1 \; , \qquad \eta_2 = \omega(x, y_1, y_2, \xi) \; ,$$

---

[4]) Cf. S. Lie, Oeuvres complètes, T. II², p. 809, No. 28.

de sorte que (48,4) soit satisfait pour $E = 1$, $A = B = 0$. Mais alors il résulte de (48,5):

$$e = 1 , \qquad a = b = 0 .$$

Il n'existe donc pas dans ce cas de forme adjointe ds pour laquelle la troisième condition du n° 42 *ne soit pas satisfaite.*

§ 9. Réduction des transformations R aux transformations de contact de rang 1

49. Comme nous avons vu au n° 32, à une transformation R, T, se rattache une correspondance (32,1) de rang 1 entre S et Σ, qui fait correspondre au point général de S une courbe de Σ, et vice versa. Or, cette correspondance (32,1) définit de son côté une *transformation de contact de rang* 1 qu'on obtient des formules

$$\Omega_\nu(x, y_1, y_2;\ \xi, \eta_1, \eta_2) = 0 , \qquad \nu = 1, 2 , \tag{49,1}$$

$$\left.\begin{aligned} -p &= \frac{W'_x}{W'_{y_1}} , & -\pi &= \frac{W'_\xi}{W'_{\eta_1}} , \\ -q &= \frac{W'_{y_2}}{W'_{y_1}} , & -\kappa &= \frac{W'_{\eta_2}}{W'_{\eta_1}} , \end{aligned}\right\} \quad W = \lambda_1 \Omega_1 + \lambda_2 \Omega_2 \tag{49,2}$$

$$p = \frac{dy_1}{dx} , \quad q = \frac{dy_1}{dy_2} ; \quad \pi = \frac{d\eta_1}{d\xi} , \quad \kappa = \frac{d\eta_1}{d\eta_2} , \tag{49,3}$$

en éliminant λ_1, λ_2, et en résolvant par rapport aux variables ξ, η_1, η_2, π, κ, ainsi que par rapport aux variables x, y_1, y_2, p, q, Toutefois, les fonctions Ω_1, Ω_2 doivent satisfaire à la condition que cette résolution soit possible. Cette condition se réduit d'après S. Lie à ce que tous les éléments de surface (x, y_1, y_2, p, q), satisfaisant à (49,1), (49,2), après l'élimination de λ_1, λ_2, n'appartiennent pas au même champ d'éléments de surface, défini par une équation différentielle aux dérivées partielles.

50. Nous allons d'abord montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que, la correspondance C (49,1) étant donnée, les équations (49,1), (49,2) soient résolubles par rapport à ξ, η_1, η_2 pour un choix convenable de Ω_1, Ω_2, est que C soit transitive.

En effet, on peut représenter C par deux équations résolues par rapport à deux des trois variables ξ, η_1, η_2, choisies convenablement. Supposons, pour fixer les idées, que C soit donnée par les équations

$$\eta_\nu = \eta_\nu^* (\xi, x, y_1, y_2) \quad , \qquad \nu = 1, 2 . \tag{50,1}$$

Ces deux équations doivent être résolubles par rapport à deux des trois variables x, y_1, y_2. Donc, un des trois déterminants

$$\Delta_3^0 = \begin{vmatrix} \eta'_{1v_1} & \eta'_{2v_1} \\ \eta'_{1v_2} & \eta'_{2v_2} \end{vmatrix} \;, \; \Delta_1^0 = \begin{vmatrix} \eta'_{1v_2} & \eta'_{2v_2} \\ \eta'_{1x} & \eta'_{2x} \end{vmatrix} \;, \; \Delta_2^0 = \begin{vmatrix} \eta'_{1x} & \eta'_{2x} \\ \eta'_{1v_1} & \eta'_{2v_1} \end{vmatrix} \tag{50,2}$$

ne s'annule pas identiquement. Donc, en éliminant λ_1 et λ_2 des deux premières équations (49,2), l'équation résolvante peut être écrite dans la forme

$$\Delta_3^0 p + \Delta_2^0 q - \Delta_1^0 = 0 \ . \tag{50,3}$$

Supposons qu'il soit impossible de tirer ξ de cette équation en fonction de p, q. — Dans certains cas exceptionnels, il pourrait être possible de tirer de l'équation (50,3) la valeur de ξ, en fonction de x, y_1, y_2. Mais alors on obtiendrait une transformation ponctuelle, et les transformations de cette espèce restent ici hors de considération. — On a à considérer deux cas:

a) Supposons que l'on ait identiquement $\Delta_3^0 \equiv \Delta_2^0 \equiv 0$. Mais ceci, puisque Δ_1^0 ne s'annule pas identiquement, n'est possible que si

$$\eta'_{1v_1} \equiv \eta'_{2v_1} \equiv 0 \ .$$

On obtient alors, en résolvant (50,1) par rapport à x, y_2, deux équations de la forme

$$x = x^*(\xi, \eta_1, \eta_2) \ , \qquad y_2 = y_2^*(\xi, \eta_1, \eta_2) \ ,$$

et C est intransitive.

b) L'un au moins des deux déterminants Δ_3^0, Δ_2^0 ne s'annule pas identiquement. Supposons, pour fixer les idées, que ce soit Δ_3^0. Alors on obtient entre p et q la relation

$$p = -\frac{\Delta_2}{\Delta_3}\, q + \frac{\Delta_1}{\Delta_3} \equiv A q + B \ . \tag{50,4}$$

Or, si l'expression de droite dépendait effectivement de ξ, on pourrait tirer de (50,1) ξ en fonction de p et q, contrairement à notre hypothèse. Donc A et B ne dépendent que de x, y_1, y_2, et notre assertion résulte de la condition déduite au n^0 41.

On obtient donc deux équations de la forme

$$V_\nu(x, y_1, y_2) = \Phi_\nu(\xi, \eta_1, \eta_2) \ , \qquad \nu = 1, 2, \tag{50,5}$$

qui peuvent remplacer les équations (49,1).

51. Supposons de l'autre côté que C soit intransitive, c'est-à-dire puisse être défini par deux équations de la forme (50,5). Alors chaque couple (49,1) d'équations représentant C peut être écrit dans la forme

$$\Omega_\nu \equiv \Lambda_\nu(V_1 - \Phi_1) + M_\nu(V_2 - \Phi_2) \quad , \quad \nu = 1, 2,$$

où $\Lambda_1, \Lambda_2, M_1, M_2$ sont des fonctions de $x, y_1, y_2, \xi, \eta_1, \eta_2$. Puisque (50,5) est valable pour C, les équations (49,2), relatives à p, q, se réduisent aux suivantes:

$$p = -\frac{\kappa_1 V'_{1x} + \kappa_2 V'_{2x}}{\kappa_1 V'_{1y_1} + \kappa_2 V'_{2y_1}} \;,\; q = -\frac{\kappa_1 V'_{1y_2} + \kappa_2 V'_{2y_2}}{\kappa_1 V'_{1y_1} + \kappa_2 V'_{2y_1}} \;, \tag{51,1}$$

en posant

$$\lambda_1 \Lambda_1 + \lambda_2 \Lambda_2 = \kappa_1 \quad , \quad \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 = \kappa_2 \,.$$

Or, en éliminant κ_1, κ_2 de (51,1), on obtient

$$\begin{vmatrix} V'_{1x} & V'_{2x} & p \\ V'_{1y_2} & V'_{2y_2} & q \\ V'_{1y_1} & V'_{2y_1} & -1 \end{vmatrix} = 0 \;,$$

et cette relation n'est pas satisfaite identiquement en (x, y_1, y_2, p, q), V_1 et V_2 étant deux fonctions indépendantes en x, y_1, y_2.

Donc, *pour que les équations* (49,1), (49,2) *soient résolubles par rapport à* ξ, η_1, η_2, *il est nécessaire et suffisant que la correspondance C soit transitive*[5]).

Il en résulte en particulier que, dès que les équations (49,1), (49,2) sont résolubles par rapport à ξ, η_1, η_2, elles sont aussi résolubles par rapport à x, y_1, y_2, ce qui est un résultat général, valable d'après S. Lie pour un nombre quelconque de variables et un nombre quelconque d'équations directrices.

En particulier, d'après ce que nous avons dit au n° 38, à la correspondance, définie par une transformation R du premier ordre, se rattache toujours une transformation de contact, si cette transformation R n'est pas singulière.

Posons maintenant, si C est transitif, pour les expressions des ξ, η_1, η_2, tirées de (49,1) et (49,2):

$$\xi = \Xi(x, y_1, y_2, p, q) \;, \quad \eta_\mu = H_\mu(x, y_1, y_2, p, q) \;, \quad \mu = 1, 2. \tag{51,2}$$

52. Soit ds une forme adjointe du type I ou II, donnée par (12,4) avec $e = 1$. On obtient alors les expressions de ξ, η_1, η_2, correspondant à (32,1), en résolvant (49,1) et les trois équations (32,4) — (32,6) par rapport à ξ, η_1, η_2.

---

[5]) C'est un cas spécial d'un théorème général. Cf. A. Ostrowski, Mathematische Miszellen XIX, Zur integrallosen Bestimmung der Berührungstransformationen vom Range 1. Verh. Nat. Ges. Basel (1941), LII, pp. 35—39.

Pour cela, il suffit évidemment de remplacer dans les équations (49,2) p, q respectivement par b, a. On obtient donc de (51,2)

$$\xi = \Xi(x, y_1, y_2, b, a), \qquad \eta_\mu = \Xi_\mu(x, y_1, y_2, b, a), \qquad \mu = 1, 2, \tag{52,1}$$

où l'on doit naturellement remplacer r par son expression en fonction de p_1, p_2, tirée de la relation

$$p_1 - ap_2 - b = 0 \tag{52,2}$$

Or, on a d'après (52,2) pour un élément de ligne $dy_1 = p_1 dx$, $dy_2 = p_2 dx$:

$$dy_1 - a dy_2 - b dx = 0\ . \tag{52,3}$$

De l'autre côté, on a pour un élément de surface aux coordonnées p, q:

$$dy_1 - p dx - q dy_2 = 0\ . \tag{52,4}$$

Donc, l'élément de ligne satisfaisant à (52,3) pour une valeur de r, est situé sur l'élément de surface, donné par (52,4) pour

$$p = b\ , \qquad q = a\ . \tag{52,5}$$

Les équations (52,5) définissent, si l'on varie x, y_1, y_2, r dans a, b, un champ de ∞^4 éléments de surface, correspondant pour un ds du type I à l'équation différentielle

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = f\left(\frac{\partial y_1}{\partial y_2}\ ,\ y_1\ ,\ y_2\ ,\ x\right)\ , \tag{52,6}$$

et pour une forme du type II à l'équation différentielle

$$\frac{\partial y_1}{\partial y_2} = c\,(x\ ,\ y_1\ ,\ y_2)\ . \tag{52,7}$$

On obtient donc le point ξ, η_1, η_2, correspondant à l'élément de ligne

$$(x, y_1, y_2, p_1, p_2)\ , \tag{52,8}$$

en déterminant dans le champ (52,5) l'élément de surface

$$(x, y_1, y_2, p, q)\ , \tag{52,9}$$

dans lequel est situé (52,8), et en cherchant le point de Σ, correspondant à (52,9) en vertu de la transformation de contact (49,2).

53. Si la forme adjointe ds est du type III, on arrive à un résultat analogue, en permutant y_2 et y_1. On obtient donc dans ce cas la transformation R, en appliquant au champ d'éléments de surface, rattaché à l'équation

$$\frac{\partial y_2}{\partial y_1} = 0 \ , \tag{53,1}$$

la transformation de contact déduite de (49,1) et (49,2) en y permutant y_1 et y_2.

D'ailleurs, pour traiter tous les trois types des formes adjointes de la même façon, il suffirait d'utiliser, au lieu de la transformation de contact définie par (49,1), (49,2), la transformation *homogène* de contact se rattachant à la correspondance (49,1).

Réciproquement, soit T une transformation de contact de rang 1, déduite de la correspondance (49,1). Soit D un champ d'éléments de surface dans S. A ce champ correspond une équation différentielle aux dérivées partielles de premier ordre d'un des trois types I, II, III du n⁰ 11, donc une forme adjointe ds.

En appliquant T au champ D, on obtient *généralement* un champ Δ d'éléments de surface de Σ auquel correspond une forme adjointe $d\sigma$.

Or, en faisant correspondre à chaque élément de ligne dt de S l'élément de surface $d\tau$ de D sur lequel dt est situé, et à $d\tau$ le point (ξ, η_1, η_2) de Σ qui lui correspond en vertu de T, on obtient évidemment une correspondance entre l'ensemble des éléments de ligne de S et l'espace Σ, qui est *en général* une transformation R.

En effet, il suffit pour obtenir cette transformation R de remplacer les équations (49,2) par les équations (32,4) — (32,6).

54. Toutefois, nous avons encore à discuter les conditions sous lesquelles, la correspondance (49,1) définissant une transformation de contact T, on obtient, en appliquant T à un champ donné D d'éléments de surface, une transformation R au sens du n⁰ 53.

Pour cela il est nécessaire

1) qu'on obtienne par T, des ∞^4 éléments de surface de D un ensemble Δ de ∞^4 éléments de surface dans Σ ;

2) que les ∞^4 éléments de surface de Δ se repartissent sur ∞^3 points de Σ de sorte que par le point général de Σ passent ∞^1 éléments de surface de Δ ;

3) que la transformation obtenue ne soit pas une transformation ponctuelle, c'est-à-dire qu'aux ∞^1 éléments de surface de D passant par le

point général de S, correspondent ∞^1 éléments de surface de Δ qui se repartissent sur ∞^1 points de Σ.

On peut ordonner les conditions de 1), 2), 3), différemment en exigeant:

I) que les images des éléments de surface de D par T passent par le point général de Σ;

II) que les images des éléments de surface de D passant par le point général de S, passent par ∞^1 points de Σ.

III) que l'ensemble d'images des éléments de surface de D par T contienne ∞^4 éléments de surface de l'espace Σ.

55. Les conditions I), II) sont respectivement équivalentes aux conditions 2), 1) du n⁰ 42. Donc, d'après le n⁰ 43, la condition I) est satisfaite avec la condition II).

Quant à la condition II), le résultat de la discussion des nos 46—48 peut être interprété géométriquement en utilisant quelques résultats de S. Lie[6]), qui se rattachent à la correspondance (32,1).

A un point général P de S correspond par (32,1) une courbe $\lambda(P)$ de Σ. A chaque point de $\lambda(P)$ — donc à chaque élément de ligne de $\lambda(P)$ — correspond une courbe passant par P, donc un élément de ligne passant par P. A la correspondance (32,1) se rattache donc une correspondance entre deux ensembles k respectivement κ des ∞^4 éléments de ligne dans les espaces S et Σ. Les éléments de ligne de k passant par un point général P de S y forment un „*cône élémentaire*“. Les images de ces ∞^1 éléments de ligne dans l'ensemble κ s'ordonnent le long d'une courbe $\lambda(P)$ qui est la courbe (32,1) correspondant au point P. Et cela reste vrai si l'on interchange les espaces S et Σ. L'existence d'une relation du type (41,2), c'est-à-dire la transitivité faible est d'après n⁰ 41 équivalent avec la dégénération des cônes élémentaires dans l'espace correspondant. Dans ce cas, le cône élémentaire appartenant à un point P de S se réduit à l'élément de surface (41,3) passant par P.

Le résultat de la discussion des n^{os} 46—48 peut être énoncé comme il suit:

La condition II) *est toujours satisfaite, sauf dans le cas où*

1) *le cône élémentaire appartenant au point général P de S dégénère en élément de surface* (41,3) *et*

2) *la forme adjointe ds est axiale et son axe pour le point général P de S appartient à l'ensemble k.*

---

[6]) Cf. S. Lie, Liniengeometrie und Berührungstransformationen, Oeuvres complètes, T. II², pp. 640—688.

On peut se demander si l'on n'obtient pas de T une transformation ponctuelle déjà dès que l'axe de ds appartient à l'ensemble k, même si le cône élémentaire ne dégénère pas. En effet, si dl est l'axe de ds, passant par le point général P de S, les éléments de surface du champ D passant par P tournent autour de dl. Mais alors, si $d\lambda$ est l'élément de ligne de κ correspondant à dl, au faisceau d'éléments de surface tournant autour de dl correspond par notre correspondance le faisceau d'éléments de surface tournant autour de $d\lambda$. Donc au point P correspond le point π de Σ situé sur $d\lambda$.

Or, il est vrai qu'on obtient de cette façon une transformation ponctuelle entre S et Σ. Mais cette transformation n'est pas la transformation complète, la correspondance entre les éléments de surface de D et leurs images dans Σ *n'étant pas uniforme*. En effet, chaque élément de surface passant par dl contient, *si le cône élémentaire n'est pas dégénéré*, et p. ex. algébrique, encore d'autres éléments de ligne dont les images dans κ sont différents de $d\lambda$ et ne passent pas par π. Donc, dans ce cas la transformation ponctuelle n'est qu'une composante de la transformation R totale, obtenue en appliquant T au champ D. Ceci correspond au cas de l'identité (46,3).

Quant à la condition III), elle est évidemment équivalente à la troisième condition du n° 42. On obtient donc de la discussion des n^{os} 47 et 48 le résultat suivant:

Supposons que les conditions I) et II) soient satisfaites. Alors:

α) *si le cône élémentaire dans le point général de Σ n'est pas dégénéré, la condition III) est toujours satisfaite;*

β) *si les cônes élémentaires dans les points généraux de S et de Σ sont dégénérés, la condition III) est toujours satisfaite;*

γ) *si le cône élémentaire est dégénéré dans le point général de Σ et ne l'est pas dans le point général de S, il existe exactement un champ D d'éléments de surface pour lequel la condition III) n'est pas satisfaite.*

§ 10. Transformations R et transformations de contact du rang 2. Le théorème fondamental

56. Rappelons qu'il existe dans l'espace à trois dimensions *deux classes* de transformations de contact, sans compter celles dérivées des transformations ponctuelles:

a) les transformations de contact dites de rang 1, engendrées d'après les formules (49,1) — (49,3) par une correspondance de rang 1 faisant correspondre à chaque point de l'un des deux espaces une courbe de l'autre; et

b) les transformations de contact, dites de rang 2, engendrées par une correspondance (de rang 2)

$$\Omega(x, y_1, y_2, \xi, \eta_1, \eta_2) = 0 \tag{56,1}$$

faisant correspondre à un point de S une surface de Σ et à un point de Σ une surface de S.

On obtient la transformation de contact engendrée par (56,1) moyennant les formules

$$\left.\begin{aligned} p &= -\frac{\Omega'_x}{\Omega'_{y_1}}, \quad \pi = -\frac{\Omega'_\xi}{\Omega'_{\eta_1}}, \\ q &= -\frac{\Omega'_{y_2}}{\Omega'_{y_1}}, \quad \kappa = -\frac{\Omega'_{\eta_2}}{\Omega'_{\eta_1}}, \end{aligned}\right\} \tag{56,2}$$

où

$$p = \frac{\partial y_1}{\partial x} = -\frac{\cos(n, x)}{\cos(n, y_1)}, \quad q = \frac{\partial y_1}{\partial y_2} = -\frac{\cos(n, y_2)}{\cos(n, y_1)}$$

sont les coordonnées de direction d'un élément de surface dans S passant par (x, y_1, y_2), s'exprimant comme il est indiqué par les cosinus directeurs de la normale, et π, κ jouent le rôle analogue dans Σ. (Pour les éléments de surface parallèles à l'axe des x, resp. à l'axe des ξ, on permutera les variables dans les formules (56,1), (56,2), ou bien l'on introduira des *coordonnées homogènes de direction.*)

Toutefois, pour que la correspondance (56,1) puisse conduire à une transformation de contact, cette correspondance doit satisfaire, outre les conditions immédiates de continuité et de dérivabilité, à la condition que les équations (56,1) et (56,2) permettent d'exprimer ξ, η_1, η_2 en fonctions de x, y_1, y_2, p, q et, de même, x, y_1, y_2 en fonctions de $\xi, \eta_1, \eta_2, \pi, \kappa$. Cette condition se réduit d'après S. Lie[7]) à ce que la fonction Ω ne satisfait pas à une certaine équation différentielle.

57. Les résultats des §§ 7—9 permettent de pressentir le théorème fondamental suivant:

VI. A) *Soit T_c une transformation de contact entre S et Σ par laquelle un champ D d'éléments de surface de S se transforme dans un champ Δ d'éléments de surface de Σ. Soient ds respectivement $d\sigma$ les formes adjointes dans S, Σ, correspondant aux champs D, Δ. Faisons correspondre à un élément de ligne*

---

[7]) Cf. S. Lie, Oeuvres complètes, T. II², pp. 704 — 705.

général dl de S l'élément de surface de D dans lequel dl est situé, et à cet élément de surface le point correspondant de Σ. On obtient de cette façon une transformation R, T_r, entre S et Σ, aux formes adjointes ds et $d\sigma$.

B) *Réciproquement, soit T_r une transformation R entre S et Σ correspondant aux formes adjointes ds, $d\sigma$. Soient D, Δ les champs d'éléments de surface dans S, Σ, correspondant respectivement à ds, $d\sigma$. Alors, il existe une transformation de contact T_c entre S et Σ transformant D en Δ, qui conduit à la transformation T_r d'après la règle contenue dans la première partie de ce théorème.*

La partie A) de ce théorème a déjà été démontrée aux §§ 8, 9 pour les transformations de contact de rang 1. Quant à la partie B), sa démonstration est contenue dans les résultats des §§ 7, 9 pour le cas où T_r n'est pas une transformation singulière. Et nous avons même vu que dans ce cas T_c peut être choisie comme une transformation de contact du rang 1.

Il nous reste encore à traiter les transformations de contact de rang 2. Dans cette discussion il ne sera plus nécessaire de traiter en détail les cas d'exception dont nous avons eu à nous occuper dans les §§ 8, 9.

58. Supposons que les hypothèses de la partie A) du théorème VI soient satisfaites pour une transformation T_c de rang 2, donnée par les formules (56,1), (56,2). En permutant convenablement les variables, on pourra supposer que les formes adjointes ds, $d\sigma$ soient toutes les deux du type I:

$$ds = dy_1 - r\,dy_2 - f\,dx \quad ; \quad f = f(r, x, y_1, y_2) ,$$

$$d\sigma = d\eta_1 - \varrho\, d\eta_2 - \varphi\, d\xi \quad ; \quad \varphi = \varphi(\varrho, \xi, \eta_1, \eta_2) .$$

On exprime les coordonnées de direction p, q pour les éléments de surface de D au moyen du paramètre r par les formules

$$q = r , \quad p = f(r, x, y_1, y_2)$$

et, de même, pour les éléments de surface de Δ en introduisant le paramètre ϱ:

$$\kappa = \varrho , \quad \pi = \varphi(\varrho, \xi, \eta_1, \eta_2) .$$

Donc, les équations

$$\frac{\Omega'_{y_2}}{\Omega'_{y_1}} = -r , \quad \frac{\Omega'_{x}}{\Omega'_{y_1}} = -f , \quad \frac{\Omega'_{\eta_2}}{\Omega'_{\eta_1}} = -\varrho , \quad \frac{\Omega'_{\xi}}{\Omega'_{\eta_1}} = -\varphi , \quad (58,1)$$

combinées avec (56,1) permettent d'exprimer ϱ, ξ, η_1, η_2 en fonctions des r, x, y_1, y_2 et vice versa. On en obtient pour ds et $d\sigma$;

$$ds = \frac{\Omega'_{y_2}}{\Omega'_{y_1}}\, dy_2 + \frac{\Omega'_x}{\Omega'_{y_1}}\, dx + dy_1 \ ,$$

$$d\sigma = \frac{\Omega'_{\eta_2}}{\Omega'_{\eta_1}}\, d\eta_2 + \frac{\Omega'_\xi}{\Omega'_{\eta_1}}\, d\xi + d\eta_1 \ ,$$

et, d'après (56,1)

$$\Omega'_{y_1}\, ds + \Omega'_{\eta_1}\, d\sigma = d\Omega = 0 \ ,$$

$$d\sigma = -\frac{\Omega'_{y_1}}{\Omega'_{\eta_1}}\, ds \ . \tag{58,2}$$

A notre transformation de contact T_c correspond donc en effet une transformation entre les espaces aux 4 dimensions (x, y_1, y_2, r), $(\xi, \eta_1, \eta_2, \varrho)$, satisfaisant à la relation (58,2) et engendrant d'après le théorème I, une transformation R, T_r. Soit maintenant

$$dl = (dx, dy_1, dy_2)$$

un élément de ligne passant par (x, y_1, y_2). La condition que dl soit situé dans l'élément de surface aux coordonnées de direction p, q, est: $dy_1 - p dx - q dy_2 = 0$, donc, si cet élément de surface appartient au champ D:

$$ds = dy_1 - r dy_2 - f(r, x, y_1, y_2) dx = 0 \ . \tag{58,3}$$

Or, si r est déterminé par la relation (58,3), on a un élément de surface t de D auquel correspond l'élément de surface de Δ passant par (ξ, η_1, η_2). Pour la valeur du paramètre ϱ correspondant à τ, on a d'après (58,2)

$$d\sigma = 0 \ .$$

Donc, les valeurs de ξ, η_1, η_2 obtenues par la règle de la partie A) du théorème VI sont en effet celles données par T_r, et la partie A) du théorème VI est démontrée.

59. Pour démontrer la partie B) du théorème VI, il suffit, d'après les n^{os} 35—37, de supposer que la transformation T_r soit la transformation singulière donnée par

$$y_1 = \eta_1, \quad y_2 = \eta_2, \quad x = X(\varrho, \xi, \eta_1, \eta_2), \quad r = \varrho \ , \tag{59,1}$$

et correspondant aux formes adjointes

$$ds = dy_1 - r dy_2 \ , \quad d\sigma = d\eta_1 - \varrho d\eta_2 \ , \tag{59,2}$$

où

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} \neq 0 \ , \quad \frac{\partial X}{\partial \varrho} \neq 0 \ .$$

Tirons ϱ de la troisième des équations (59,1):

$$\varrho = R(x, \xi, \eta_1, \eta_2)\,, \qquad R'_x \neq 0\,,$$

et posons

$$\Omega \equiv \left(y_2 - \eta_2 - \frac{y_1 - \eta_1}{R}\right) \frac{1}{R'_x} = 0\ . \tag{59,3}$$

On a, en appliquant la transformation de contact engendrée par (59,3) au champ d'éléments de surface correspondant à notre ds, pour $f = 0$, d'après les deux premières des équations (58,1):

$$\frac{\Omega'_{y_2}}{\Omega'_{y_1}} = -r\ , \qquad \frac{\Omega'_x}{\Omega'_{y_1}} = 0\ ,$$

$$-\frac{\dfrac{1}{R'_x}}{\dfrac{1}{R\,R'_x}} = -r\ , \qquad -\frac{R''_{xx}}{R'_x}\,\Omega + \frac{y_1 - \eta_1}{R^2} = 0\ ,$$

donc, d'après (59,3):

$$r = R = \varrho\,, \quad y_1 - \eta_1 = 0\,, \quad y_2 - \eta_2 = 0\,,$$

c'est-à-dire, exactement la transformation (59,1). Il résulte maintenant évidemment de la partie A) du théorème VI que les deux dernières équations (58,1) sont satisfaites pour $\varphi = 0$, c'est-à-dire pour $d\sigma$, puisque ds se transforme en $d\sigma$ par T_r, et la démonstration du théorème VI est terminée.

60. Il est facile, pour une transformation R, T_r, déduite d'une transformation de contact de rang 2, d'obtenir les équations (32,1) de la correspondance de rang 1 qui lui est adjointe. En effet, on peut supposer que ds soit du type I. Mais alors, en éliminant r des deux premières équations (58,1), on a évidemment

$$\Omega = 0\ , \quad \frac{\Omega'_x}{\Omega'_{y_1}} + f\left(-\frac{\Omega'_{y_2}}{\Omega'_{y_1}}\,, x\,, y_1\,, y_2\right) = 0\ , \tag{60,1}$$

et aucune de ces deux équations ne peut être une conséquence de l'autre, puisque dans le cas contraire, il serait impossible d'exprimer ξ, η_1, η_2 en fonctions de r, x, y_1, y_2. —

De l'autre côté, nous avons vu que chaque transformation R, sauf les transformations singulières, peut être obtenue au moyen d'une transformation de contact de rang 1. Il est donc naturel de se demander, si l'on peut obtenir chaque transformation R, T_r, au moyen d'une transformation de contact de rang 2. Supposons, ce qui est permis, que le ds correspondant soit du type I et que T_r ne soit pas singulière. Alors, il suffit de trouver une fonction $\Omega(x, y_1, y_2, \xi, \eta_1, \eta_2)$, telle que les deux équations (60,1) soient équivalentes aux deux équations (32,1) appartenant à T_r. En posant pour Ω:

$$\Omega = \Omega_1 + \mu\Omega_2\,, \tag{60,2}$$

où μ est à choisir convenablement comme une fonction de x, y_1, y_2, ξ, η_1, η_2, on obtient pour la deuxième équation (60,1):

$$\begin{gathered} F(\mu\,, x\,, y_1\,, y_2\,, \xi\,, \eta_1\,, \eta_2) \equiv \\ \equiv \frac{\Omega'_{1x} + \mu\Omega'_{2x}}{\Omega'_{1y_1} + \mu\Omega'_{2y_1}} + f\left(-\frac{\Omega'_{1y_2} + \mu\Omega'_{2y_2}}{\Omega'_{1y_1} + \mu\Omega'_{2y_1}}\,, x\,, y_1\,, y_2\right) = 0\,. \end{gathered} \tag{60,3}$$

Il suffit donc de trouver une constante $\tau \neq 0$ de sorte que l'équation

$$F(\mu, x, y_1, y_2, \xi, \eta_1, \eta_2) + \tau\Omega_2 = 0 \tag{60,4}$$

puisse être résolue par rapport à μ.

61. Or, en formant la dérivée de l'expression de gauche en (60,4) par rapport à μ, on a après multiplication par $(\Omega'_{1y_1} + \mu\Omega'_{2y_1})^2$:

$$\begin{gathered} (\Omega'_{2x}\Omega'_{1y_1} - \Omega'_{2y_1}\Omega'_{1x}) - \\ - (\Omega'_{2y_2}\Omega'_{1y_1} - \Omega'_{2y_1}\Omega'_{1y_2})\, f'_r\left(-\frac{\Omega'_{1y_2} + \mu\Omega'_{2y_2}}{\Omega'_{1y_1} + \mu\Omega'_{2y_1}}\,,\ x\,, y_1\,, y_2\right) \end{gathered} \tag{61,1}$$

c'est-à-dire, la dérivée par rapport à r du déterminant

$$- \begin{vmatrix} \Omega'_{1y_1} & \Omega'_{2y_1} & -e \\ \Omega'_{1y_2} & \Omega'_{2y_2} & r \\ \Omega'_{1x} & \Omega'_{2x} & f \end{vmatrix}\,, \tag{61,2}$$

dans laquelle on a remplacé r par $-\dfrac{\Omega'_{1y_2} + \mu\Omega'_{2y_2}}{\Omega'_{1y_1} + \mu\Omega'_{2y_1}}$.

Si la transformation T_r n'est ni singulière, ni ponctuelle, la dérivée de (61,2) par rapport à r ne s'annule pas, d'après le n° 34, au point général de (32,1). Donc, si

$$\Omega'_{2y_2}\Omega'_{1y_1} - \Omega'_{2y_1}\Omega'_{1y_2} \tag{61,3}$$

ne s'annule pas en vertu de (32,1), l'expression (61,1) ne s'annule pas identiquement en μ, x, y_1, y_2, ξ, η_1, η_2.

De l'autre côté, si (61,3) s'annule en vertu de (32,1), (61,1) se réduit à

$$\Omega'_{2x}\Omega'_{1v_1} - \Omega'_{2v_1}\Omega'_{1x} ,$$

ce qui ne s'annule pas dans le point général de (32,1), puisque dans le cas contraire, (61,2) serait indépendant de r.

Soient μ_0 et

$$(x^{(0)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \xi^{(0)}, \eta_1^{(0)}, \eta_2^{(0)}) \tag{61,4}$$

choisis de sorte que Ω_2, F, F'_μ restent $\neq 0$. Pour ces valeurs l'équation (60,4) peut être résolue par rapport à τ. La valeur résultante de la constante $\tau \neq 0$, $\neq \infty$ étant une fois fixée, l'équation (60,4) peut être alors résolue par rapport à μ dans le voisinage total du point (61,4). Les équations (58,1) correspondant à notre choix de Ω, peuvent évidemment être résolues, combinées avec $\Omega = 0$, puisque ces équations sont équivalentes aux équations correspondantes du n^0 32.

Nous pouvons donc énoncer comme **complément au théorème fondamental :**

Chaque transformation R peut être engendrée par une transformation de contact de rang 2. *Chaque transformation R, sauf les transformations singulières, peut être engendrée par une transformation de contact de rang* 1.

62. Nous avons vu qu'aux transformations R transformant ds en $d\sigma$, correspondent des transformations de contact transformant le champ D correspondant à ds en le champ Δ correspondant à $d\sigma$, donc aussi transformant les équations différentielles aux dérivées partielles du premier ordre attachée à ds et $d\sigma$, l'une dans l'autre. Le théorème III se réduit donc maintenant au théorème que, deux équations différentielles aux dérivées partielles du premier ordre étant données, il existe toujours une transformation de contact transformant l'une dans l'autre. C'est le fait qu'exprime S. Lie en disant que les équations différentielles aux dérivées partielles du premier ordre ne possèdent pas des invariants pour le groupe de toutes les transformations de contact. De ce résultat de S. Lie résulte donc une nouvelle démonstration du théorème III.

En particulier, en réduisant une équation différentielle aux dérivées partielles du premier ordre en deux variables indépendantes, $T = 0$, à l'équation $\frac{\partial y_1}{\partial x} = 0$, on obtient évidemment une solution générale de l'équation $T = 0$. Notre procédé de démonstration du théorème III, développé aux nos 20—23, contient donc une méthode de résolution de l'équation générale $T = 0$.

Quant au résultat déduit aux nos. 60, 61, il permet évidemment de préciser un peu le résultat de S. Lie, mentionné plus haut. En effet, il en résulte que, si $T_1 = 0$ et $T_2 = 0$ sont deux équations aux dérivées partielles du premier ordre en deux variables indépendantes, on peut toujours transformer $T_1 = 0$ en $T_2 = 0$, aussi bien par une transformation de contact du rang 1 que par une transformation de contact de rang 2.

Il est vrai que dans l'énoncé du n^0 61 les transformations singulières forment un cas exceptionnel. Mais dans ce cas, il s'agit des équations

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = 0 \ , \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} = 0 \ ,$$

et l'on vérifie aisément que ces deux équations se transforment l'une dans l'autre par les transformations de contact de rang 1 dont les deux fonctions directrices, Ω_1, Ω_2, satisfont, en vertu de (32,1), à la condition

$$\frac{\partial(\Omega_1 \, , \, \Omega_2)}{\partial(x \, , \, \xi)} = 0 \ .$$

§ 11. Exemples

63. *Exemple I.* Nous partons de la correspondance suivante

$$\Omega_1 \equiv \eta_1 - y_1 = 0 \quad , \qquad \Omega_2 \equiv \eta_2 - y_2 + x\xi = 0 \ . \tag{63,1}$$

Les équations (49,2) de la transformation de contact qui correspond à (63,1), deviennent ici

$$p = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\xi \ , \quad q = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad , \quad \pi = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x \quad , \quad \kappa = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \ ,$$

donc:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -\frac{p}{q} \ , \ \eta_1 = y_1 \ , \ \eta_2 = y_2 + x\frac{p}{q} \ , \ \pi = xq \ , \ \kappa = q \ . \\ x &= \frac{\pi}{\kappa} \ , \ y_1 = \eta_1 \ , \ y_2 = \eta_2 + \xi\frac{\pi}{\kappa} \ , \ p = -\xi\kappa \ , \ q = \kappa \ . \end{aligned}\right\} \tag{63,2}$$

La correspondance (63,1) est *transitive* et en particulier faiblement transitive dans chacun des espaces S, Σ.

On obtient donc de (63,1), d'après la théorie générale du § 8, pour chaque ds non-axiale une transformation R. Ce résultat se vérifie immédiatement dans notre cas. Les valeurs des déterminants Δ_1, Δ_2, Δ_3 étant respectivement 0, ξ, 1, l'équation (33,1) devient ici

$$b + \xi a = 0 \ . \tag{63,3}$$

Donc, pour qu'on puisse tirer de cette équation ξ en fonction de r, variable avec r, il est nécessaire et suffisant que

$$1. \quad a \neq 0 \;, \quad 2. \left(\frac{b}{a}\right)'_r \neq 0 \;. \tag{63,4}$$

Dans le cas où $a \neq 0$, mais $\dfrac{b}{a} = -f(x, y_1, y_2)$ est indépendant de r, on tire de nos relations une transformation ponctuelle entre S et Σ :

$$\xi = f(x, y_1, y_2) \,, \quad \eta_1 = y_1, \quad \eta_2 = y_2 - x f(x, y_1, y_2) \,, \tag{63,5}$$

si toutefois le Jacobien de cette transformation reste $\neq 0$.

Or, ce Jacobien est $f f'_{y_2} + f'_x$. Si cette expression s'annule, on a évidemment le long d'une ligne de niveau de la fonction f dans le plan des x, y_2 : $-\dfrac{f'_x}{f'_{y_2}} = f$. Ces lignes de niveau sont des droites au coefficient angulaire f. Il en résulte qu'on obtient l'intégrale générale de l'équation différentielle aux dérivées partielles $f f'_{y_2} + f'_x = 0$ en résolvant par rapport à f l'équation

$$y_2 - f x = F(y_1, f) \,, \tag{63,6}$$

où F est une fonction arbitraire de ses deux arguments.

Donc, on obtient une transformation ponctuelle si ds est une forme

$$dy_1 - r dy_2 + r f(x, y_1, y_2) dx \,, \qquad f f'_{y_2} + f'_x \neq 0 \;. \tag{63,7}$$

On obtient alors par un calcul facile $\varrho = -r$ et

$$d\sigma = d\eta_1 - \varrho d\eta_2 - \varrho x d\xi \;.$$

De l'autre côté, la relation (45,1) entre $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ correspond ici aux valeurs $P_1 = 1$, $P_2 = P_3 = 0$, donc, d'après le n° 46, l'axe d'une forme ds singulière doit être situé dans l'élément de surface $dy_1 = 0$, c'est-à-dire être orthogonal à l'axe des y_1. Or, d'après (11,7)[8]), ceci se réduit à $a \equiv 0$ pour une forme singulière du type II et $\dfrac{b}{a} = \dfrac{b}{r} \equiv A(x, y_1, y_2)$ pour les formes singulières du type I, conformément aux conditions (63,4).

64. *Exemple II.* La correspondance

$$\Omega_1 \equiv \eta_1 - y_1 + 2x\xi = 0 \,, \qquad \Omega_2 \equiv \eta_2 - y_2 + x^2\xi^2 = 0 \tag{64,1}$$

[8]) Notons une faute d'impression dans la formule (11,7) p. 174, où, au lieu de C, il faut lire c.

n'est pas *faiblement transitive dans S*. En effet, les valeurs des déterminants Δ_ν sont ici:

$$\Delta_1 = 2\xi\,, \qquad \Delta_2 = 2x\xi^2\,, \qquad \Delta_3 = 1\,,$$

et une relation

$$2P_1(x, y_1, y_2)\xi + 2xP_2(x, y_1, y_2)\xi^2 + P_3(x, y_1, y_2) = 0$$

ne peut subsister en vertu de (64,1), donc identiquement, que si $P_1 \equiv P_2 \equiv P_3 \equiv 0$. Les équations (49,2) deviennent ici

$$-p = \frac{2\lambda_1\xi + 2\lambda_2 x\xi^2}{-\lambda_1}\,, \quad -q = \frac{-\lambda_2}{-\lambda_1}\,,$$
$$-\pi = \frac{2\lambda_1 x + 2\lambda_2 x^2\xi}{\lambda_1}\,, \quad -\kappa = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\,.$$

Donc, en posant $t = x\xi$, on obtient pour la transformation de contact engendrée par (64,1):

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{t}{x}\,,\ \eta_1 = y_1 - 2t\,,\ \eta_2 = y_2 - t^2\,,\ \kappa = q\,,\ \pi = 2qxt - 2x\,,\\ x &= \frac{t}{\xi}\,,\ y_1 = \eta_1 + 2t\,,\ y_2 = \eta_2 + t^2\,,\ q = \kappa\,,\ p = -2\kappa\xi t + 2\xi\,,\end{aligned}\right\} \qquad (64,2)$$

où t est à tirer, suivant le cas, de l'une des deux équations

$$2qt^2 - 2t + px = 0\,, \qquad 2\kappa t^2 - 2t - \pi\xi = 0\,. \qquad (64,3)$$

D'après notre théorie générale, on obtient de la transformation (64,2), en l'appliquant à chaque champ d'éléments de surface dans S, une transformation R. Toutefois, t dépendant d'une équation quadratique, il serait possible qu'à une *branche de valeurs de t* corresponde une transformation R se réduisant à une transformation ponctuelle. Nous avons vu au n^0 45 que ce cas se présente pour un champ linéaire d'éléments de surface, dont l'axe est situé dans le cône élémentaire de S, défini par la correspondance (64,1).

65. Pour notre correspondance, ces cas sont faciles à caractériser directement. Nous avons à déterminer les champs D d'éléments de surface, pour lesquels la première équation (64,3) possède une solution indépendante de p, q.

Supposons que D soit déterminé par une relation

$$p = f(q, x, y_1, y_2)\,.$$

On obtient alors pour un $t = t(x, y_1, y_2)$ la relation

$$2qt^2 - 2t + xf(q) = 0 \,, \tag{65,1}$$

identique en q, x, y_1, y_2. En dérivant par rapport à q, on a

$$2t^2 = -xf'_q(q, x, y_1, y_2) \,,$$

donc f'_q est indépendant de q et l'on obtient

$$f(q, x, y_1, y_2) \equiv A(x, y_1, y_2)q + B(x, y_1, y_2) \,.$$

Il résulte alors de (65,1):

$$t = \frac{x B(x, y_1, y_2)}{2} \;, \quad 2t^2 + xA(x, y_1, y_2) = 0 \;,$$

donc, en particulier,

$$xB^2 + 2A = 0 \,, \tag{65,2}$$

comme condition pour D. L'équation (65,1) se réduit alors à

$$2qt^2 - 2t + xB - \frac{x^2 B^2 q}{2} \equiv (2t - xB)\,(qt + \frac{xqB}{2} - 1) = 0$$

et possède, en plus de la racine $t = \dfrac{xB}{2}$ indépendante de q, la racine

$$t = -\frac{xB}{2} + \frac{1}{q}$$

qui conduit à une transformation R ne se réduisant pas à une transformation ponctuelle.

Notre champ D correspond évidemment à la forme adjointe ds du type I:

$$ds = dy_1 - r\,dy_2 + \frac{B}{2}\,(xBr - 2)\,dx \;, \tag{65,3}$$

où B est une fonction arbitraire en x, y_1, y_2.

Pour une forme adjointe du type II, q s'exprime en fonction de $c(x, y_1, y_2)$ par x, y_1, y_2. Mais dans ce cas, la relation

$$2c(x, y_1, y_2)t^2 - 2t + px = 0$$

ne peut évidemment posséder une racine finie, indépendante de p, et le cas d'un ds du type II est impossible.

Le cas de la forme ds du type III se réduit enfin en permutant y_1 et y_2 au cas II, est donc également impossible.

Quant à la forme (65,3), on obtient par (11,7) pour les cosinus directeurs de son axe

$$\alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0 = 1 : B : \frac{x B^2}{2} . \qquad (65,4)$$

Pour vérifier que cet axe est situé sur le cône élémentaire qui se rattache d'après le n⁰ 55 à notre correspondance, déduisons l'équation de ce cône. On obtient les équations des courbes (64,1) correspondant aux différents points de Σ et passant par un point fixe (x, y_1, y_2) de S, en éliminant η_1 et η_2 des 4 équations

$$\begin{aligned} &\eta_1 - Y_1 + 2X\xi = 0 , \qquad &&\eta_2 - Y_2 + X^2\xi^2 = 0 , \\ &\eta_1 - y_1 + 2x\xi = 0 , \qquad &&\eta_2 - y_2 + x^2\xi^2 = 0 , \end{aligned}$$

où X, Y_1, Y_2 sont des coordonnées courantes. On obtient

$$Y_1 - y_1 - 2\xi (X - x) = 0 , \quad Y_2 - y_2 - (X^2 - x^2)\xi^2 = 0, \qquad (65,5)$$

on a donc dans le point (x, y_1, y_2) pour les différentielles dx, dy_1, dy_2 le long d'une courbe correspondant à une valeur de ξ :

$$dx : dy_1 : dy_2 = 1 : 2\xi : 2x\xi^2 , \qquad (65,6)$$

et l'équation de notre cône élémentaire est

$$2\frac{dy_2}{dx} - x\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2 = 0 . \qquad (65,7)$$

Il est maintenant évident que pour $\xi = B$ l'élément de ligne caractérisé par (65,4) est situé sur le cône (65,7).

66. *Exemple III.* Considérons maintenant la correspondance de rang 2

$$\Omega \equiv x\xi + y_1\eta_1 + y_2\eta_2 - 1 = 0 \qquad (66,1)$$

qui se réduit évidemment à la polarité par rapport à la sphère-unité. On obtient immédiatement par les formules (56,2) la transformation de contact qui s'y rattache:

$$\left.\begin{aligned} &\eta_1 = \frac{1}{y_1 - xp - y_2 q} , \quad \xi = -\frac{p}{y_1 - xp - y_2 q} , \\ &\eta_2 = -\frac{q}{y_1 - xp - y_2 q} , \quad \pi = -\frac{x}{y_1} , \quad \kappa = -\frac{y_2}{y_1} , \end{aligned}\right\} \qquad (66,2)$$

$$
\left.\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{\eta_1 - \xi\pi - \eta_2\kappa}\,, \quad x = -\frac{\pi}{\eta_1 - \xi\pi - \eta_2\kappa}\,, \\
y_2 &= -\frac{\kappa}{\eta_1 - \xi\pi - \eta_2\kappa}\,, \quad p = -\frac{\xi}{\eta_1}\,, \quad q = -\frac{\eta_2}{\eta_1}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{66,3}
$$

A une forme adjointe ds du type I correspond le champ d'éléments de surface défini par $p = f(q, x, y_1, y_2)$. En introduisant ici les valeurs de p, q, x, y_1, y_2 données par (66,3), on obtient la relation

$$
\frac{\xi}{\eta_1} + f\left(-\frac{\eta_2}{\eta_1}, \frac{-\pi}{\eta_1 - \xi\pi - \eta_2\kappa}, \frac{1}{\eta_1 - \xi\pi - \eta_2\kappa}, \frac{-\kappa}{\eta_1 - \xi\pi - \eta_2\kappa}\right) = 0\,, \tag{66,4}
$$

qui définit le champ correspondant Δ d'éléments de surface dans Σ. La forme adjointe $d\sigma$ qui se rattache à Δ est du type I, si l'on peut tirer π de (66,4) en fonction de π, ξ, η_1, η_2. $d\sigma$ est du type II, si (66,4) ne définit que κ en fonction de ξ, η_1, η_2.

Enfin, si l'expression de gauche dans (66,4) ne dépend ni de π ni de κ, on obtient en (66,4) une relation entre ξ, η_1, η_2, et à notre ds ne correspond aucune transformation R. Nous allons déterminer les fonctions $f(q, x, y_1, y_2)$ pour lesquelles se présente ce cas d'exception.

Tout d'abord, toutes les fonctions f indépendantes de x, y_1, y_2, appartiennent à cette classe.

Supposons maintenant que f ne soit pas indépendant de toutes les trois variables x, y_1, y_2. Alors, en dérivant $f(q, x, y_1, y_2)$ par rapport à π et κ on obtient en utilisant les formules (66,3):

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{y_1}\,\frac{\partial f}{\partial \pi} &= \xi(y_1 f'_{y_1} + y_2 f'_{y_2} + x f'_x) - f'_x\,, \\
\frac{1}{y_1}\,\frac{\partial f}{\partial \kappa} &= \eta_2(y_1 f'_{y_1} + y_2 f'_{y_2} + x f'_x) - f'_{y_2}\,.
\end{aligned} \tag{66,5}
$$

Donc, si ni π ni κ n'entrent effectivement dans (66,4), on a

$$
y_1 f'_{y_1} + y_2 f'_{y_2} + x f'_x = \frac{f'_x}{\xi} = \frac{f'_{y_2}}{\eta_2}\,.
$$

Introduisons ici les expressions de ξ et η_2 tirées de (66,2). On obtient pour $p = f(q, x, y_1, y_2)$:

$$\frac{y_1 f'_{y_1} + y_2 f'_{y_2} + x f'_x}{y_1 - x f - y_2 q} = -\frac{f'_x}{f} = -\frac{f'_{y_2}}{q} ,$$

ce qui est équivalent au système

$$f'_x + f f'_{y_1} = 0 \quad , \quad f'_{y_2} + q f'_{y_1} = 0 \ . \tag{66,6}$$

Il résulte de la seconde des équations (66,6), que f est une fonction $\varphi(q, x, u)$ des trois expressions q, x, $u = y_1 - q y_2$. Mais alors, la première équation (66,6) se réduit à

$$\varphi'_x + \varphi \varphi'_u = 0 \ .$$

Or, cette équation, aux notations près, a été déjà résolue au n⁰ 63. On obtient sa solution de celle de l'équation (63,6) en y remplaçant y_2 par u, y_1 par q et f par φ. Donc, en introduisant l'expression de u, les fonctions $f(q, x, y_1, y_2)$ cherchées s'obtiennent en résolvant par rapport à f l'équation

$$y_1 - q y_2 - x f = F(f, q) , \tag{66,7}$$

où F est à considérer comme une fonction arbitraire des deux arguments indiqués.

En particulier, les équations (66,6) ne sont évidemment jamais satisfaites, si f est indépendant de q, sauf dans le cas déjà exclu, où f est aussi indépendant de x, y_1, y_2.

Donc, notre cas d'exception ne se présente pas, si f est indépendant de q sans être constant. On voit donc, en permutant les variables que, si *ds* appartient au type II, la condition nécessaire et suffisante pour qu'à ce *ds* corresponde une transformation R engendrée par (66,1), est que c ne soit pas une constante. Enfin, puisque pour $f \equiv 0$ la transformation R est impossible, on voit, en permutant les variables, qu'à la forme *ds* du type III ne correspond aucune transformation R.

Notre discussion permet évidemment de former toutes les équations différentielles aux dérivées partielles en deux variables indépendantes, auxquelles la transformation par polaires réciproques n'est pas applicable.

(Reçu le 3 octobre 1940.)