Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 14 (1941-1942)

Artikel: Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung.
Autor: Muggli, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14311

Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung

Von H. Muggli, Zürich

1. In einer früheren Arbeit[1]) habe ich den Satz bewiesen:

Wenn die linke Seite der Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung

$$l_0 F(z) + l_1 F'(z) + \cdots + l_\nu F^{(\nu)}(z) + \cdots = g(z) \tag{1.1}$$

so beschaffen ist, daß die Reihe in jedem regulären Punkt jeder analytischen Funktion konvergiert, so gibt es zu jeder Funktion $g(z)$, die in einem endlichen Kreis regulär ist, eine im selben Kreis reguläre Funktion $F(z)$, die die Gleichung (1.1) *erfüllt.*

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie man eine Lösung von (1.1) finden kann, wenn die rechte Seite $g(z)$ in eine Potenzreihe mit dem Mittelpunkt $z = \infty$ entwickelt werden kann. Diese Lösung läßt sich in einer Halbebene durch ein Integral darstellen (Satz II). Unter gewissen Voraussetzungen über die Koeffizienten $l_0, l_1, \ldots, l_\nu, \ldots$ kann man die analytische Fortsetzung von $F(z)$ über diese Halbebene hinaus angeben (Satz III). Unter weiteren Voraussetzungen über die Koeffizienten l_ν führt die Methode im Spezialfall $g(z) = z^{-n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ zur Fortsetzung von $F(z)$ innerhalb des ganzen Existenzbereiches. Dieser besteht aus einem Winkelraum der Öffnung 3π auf der Riemannschen Fläche von $\log z$.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Rektor Saxer für seine zahlreichen Ratschläge bei der endgültigen Redaktion der Arbeit herzlich danken.

2. **Satz I.**

a) *Die Koeffizienten des linearen Operators*

$$\mathfrak{L}\, f(z) = l_0\, f(z) + l_1\, f'(z) + l_2\, f''(z) + \cdots \tag{2.1}$$

seien so beschaffen, daß die erzeugende Funktion

$$L(z) = l_0 + l_1 z + l_2 z^2 + \cdots \tag{2.2}$$

eine ganze transzendente Funktion und ihre Ordnung ϱ kleiner als 1 *ist.*

---

[1]) *Muggli, H.*, Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Comm. Math. Helv., vol. 11, fasc. 2.

b) *Es gebe in der komplexen ζ-Ebene einen vom Nullpunkt ausgehenden Halbstrahl der Richtung Φ mit folgender Eigenschaft: Die Abstände aller Punkte ζ, für welche $L(-\zeta) = 0$ ist, von diesem Halbstrahl besitzen eine positive untere Schranke.*

Dann konvergiert das über diesen Halbstrahl erstreckte Integral[2])

$$\psi_{-n}(z) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty(\Phi)} \frac{e^{-z\zeta} \zeta^{n-1}}{L(-\zeta)}\, d\zeta \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.3}$$

gleichmäßig in bezug auf z in jedem abgeschlossenen Teilbereich der Halbebene

$$\Re(z \cdot e^{i\Phi}) > 0 \ . \tag{2.4}$$

Die durch das Integral (2.3) dargestellte Funktion $\psi_{-n}(z)$ ist in dieser Halbebene regulär und erfüllt dort die Gleichung

$$\mathfrak{L}\,\psi_{-n}(z) = \frac{1}{z^n} \ . \tag{2.5}$$

Der Konvergenzbeweis macht Gebrauch von folgendem

Hilfssatz 1 [3]): *Es sei $L(z)$ eine ganze Funktion der Ordnung ϱ, mit $\varrho < 1$. Um jede ihrer Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots$, die dem absoluten Betrage nach geordnet seien, werde je ein Kreis gelegt, und zwar um die k-te mit dem Radius $|\lambda_k|^{-1}$. Ist nun σ eine beliebige Zahl größer als ϱ und $|\zeta|$ genügend groß, so gilt außerhalb dieser Kreise die Ungleichung*

$$\frac{1}{|L(\zeta)|} < e^{|\zeta|^\sigma} \ . \tag{2.6}$$

Nach Voraussetzung a) kann verlangt werden, daß $\varrho < \sigma < 1$ sei. Liegt der Punkt $\zeta = Re^{i\Phi}$ (R reell und positiv) auf dem Halbstrahl, der die Voraussetzung b) erfüllt, so gilt für $R > R_0$

$$\frac{1}{|L(-R \cdot e^{i\Phi})|} < e^{R^\sigma} \ ; \tag{2.7}$$

aus der Voraussetzung folgt nämlich, daß der Halbstrahl nur endlich viele der Kreisscheiben trifft, auf denen (2.6) falsch sein kann.

---

[2]) Der Richtungswinkel des Integrationsweges steht in Klammern oben neben dem Integralzeichen.

[3]) Vgl. z. B. *Bieberbach*, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II, 2. Auflage, Seite 268.

Betrachten wir nun einen beliebigen abgeschlossenen Teilbereich der Halbebene (2.4). Alle Punkte z dieses Teilbereiches erfüllen die Ungleichung

$$\Re(z e^{i\Phi}) \geqq 2\alpha > 0 \qquad (\alpha \text{ fest}) .$$

Im selben Bereich und für $\zeta = Re^{i\Phi}$, $R > R_1$, gilt wegen (2.7) und $\sigma < 1$ die Abschätzung

$$\left| \frac{e^{-z\zeta}\,\zeta^{n-1}}{L(-\zeta)} \right| < R^{n-1} \exp\,[-\Re(z\,R\,e^{i\Phi}) + R^{\sigma}]$$

$$\leqq R^{n-1} \exp\,[-2\alpha R + R^{\sigma}] < e^{-\alpha R} .$$

Daraus folgt aber, daß das Integral (2.3) im betrachteten Bereich gleichmäßig konvergiert.

Es fehlt noch der Beweis, daß die Differentialgleichung (2.5) erfüllt ist. Er stützt sich auf die Tatsache, daß der lineare Operator $\mathfrak{L}$ „beschränkt" und daher „stetig" ist [4]). Unter der „Beschränktheit" von $\mathfrak{L}$ verstehen wir hier folgendes:

Ist $\mathfrak{K}$ eine abgeschlossene Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt z_0, $F(z)$ eine auf $\mathfrak{K}$ reguläre Funktion, M das Maximum von $F(z)$ auf $\mathfrak{K}$, so gibt es eine nur von $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{K}$, nicht aber von $F(z)$ abhängige Zahl K, derart, daß

$$|\,\mathfrak{L}\,F(z)\,|_{z=z_0} < K\cdot M$$

gilt [5]).

---

[4]) Vgl. *Pólya*, Lücken und Singularitäten von Potenzreihen. Math. Zeitschrift, Bd. 29 (1929), S. 600.

[5]) Der Radius von $\mathfrak{K}$ sei $2\,\delta$. Nach Cauchy gilt

$$|\,F^{(\nu)}(z_0)\,| \leqq \frac{\nu!\,M}{(2\,\delta)^{\nu}} .$$

Nach Voraussetzung a) gilt für $\nu \geqq \nu_0$

$$\nu\,!\,|\,l_\nu\,| < \delta^{\nu} .$$

Es sei

$$\operatorname*{Max}_{0\leqq\nu<\nu_0} \frac{\nu\,!\,|\,l_\nu\,|}{(2\,\delta)^{\nu}} = K' .$$

Daher

$$|\,\mathfrak{L}\,F(z)\,|_{z=z_0} \leqq \sum_{\nu=0}^{\infty} |\,l_\nu F^{(\nu)}(z_0)\,| \leqq \nu_0 M K' + M \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu}}$$

$$\leqq (\nu_0 K' + 2)\cdot M = K M .$$

Dabei sind ν_0 und K' nur von $\mathfrak{L}$ und δ abhängig.

Da der Operator $\mathfrak{L}$ linear ist, folgt aus der Beschränktheit die „Stetigkeit": Wenn die Folge der auf $\mathfrak{K}$ regulären Funktionen $F_i(z)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ auf $\mathfrak{K}$ gleichmäßig konvergiert, so gilt für $z = z_0$, weiter aber auch für jeden inneren Punkt von $\mathfrak{K}$

$$\mathfrak{L} \lim_{i \to \infty} F_i(z) = \lim_{i \to \infty} \mathfrak{L} F_i(z) \quad ^{4)} \, .$$

Diese Eigenschaft von $\mathfrak{L}$ und die Tatsache, daß das Integral (2.3) gleichmäßig konvergiert, rechtfertigen, sofern z ein innerer Punkt der Halbebene

$$\Re(z \cdot e^{i\Phi}) > 0 \tag{2.4}$$

ist, den zweiten Schritt folgender Umformung

$$(n-1)! \; \mathfrak{L} \, \psi_{-n}(z) = \mathfrak{L} \lim_{R \to \infty} \int_0^{R \cdot e^{i\Phi}} \frac{e^{-z\zeta} \zeta^{n-1}}{L(-\zeta)} \, d\zeta$$

$$= \lim_{R \to \infty} \mathfrak{L} \int_0^{R \cdot e^{i\Phi}} \frac{e^{-z\zeta} \zeta^{n-1}}{L(-\zeta)} \, d\zeta = \lim_{R \to \infty} \int_0^{R\, e^{i\Phi}} \sum_{\nu=0}^{\infty} l_\nu (-\zeta)^\nu \, \frac{e^{-z\zeta} \zeta^{n-1}}{L(-\zeta)} \, d\zeta$$

$$= \int_0^\infty e^{-z\zeta} \zeta^{n-1} \, d\zeta = \frac{(n-1)!}{z^n} \, .$$

Das Zeichen $\mathfrak{L}$ darf mit dem Integrationszeichen vertauscht werden, weil die Reihe in der zweiten Zeile auf dem (endlichen!) Integrationsweg gleichmäßig konvergiert und daher gliedweise integriert werden kann.

3. In diesem Abschnitt soll die Gleichung

$$\mathfrak{L} f(z) = g(z) \tag{3.1}$$

gelöst werden, wenn $g(z)$ eine im Punkt $z = \infty$ reguläre Funktion ist, die folgende Potenzreihenentwicklung besitzen möge:

$$g(z) = \frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \cdots + \frac{a_n}{z^{n+1}} + \cdots \, . \tag{3.2}$$

Es liegt nahe als Lösung die Reihe

$$f(z) = a_0 \psi_{-1}(z) + a_1 \psi_{-2}(z) + a_2 \psi_{-3}(z) + \cdots \tag{3.3}$$

anzusetzen; denn wegen (2.5) genügt sie „formal" der Gleichung (3.1). Ersetzen wir die $\psi_{-n}(z)$ durch ihre Integraldarstellung (2.3) und vertauschen wir Integration und Summation, so erhalten wir

$$f(z) = \int_0^{\infty(\Phi)} \frac{e^{-z\zeta}}{L(-\zeta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \zeta^n}{n!}\, d\zeta \tag{3.4}$$

$$= \int_0^{\infty(\Phi)} \frac{e^{-z\zeta}\, G(\zeta)}{L(-\zeta)}\, d\zeta\ ;$$

dabei bedeutet

$$G(\zeta) = a_0 + \frac{a_1}{1!}\zeta + \frac{a_2}{2!}\zeta^2 + \cdots + \frac{a_n}{n!}\zeta^n + \cdots \quad . \tag{3.5}$$

Statt diese Umformungen streng zu rechtfertigen, gehen wir vom Integral (3.4) aus und untersuchen, unter welchen Bedingungen es eine Lösung von (3.1) darstellt. Dabei wird öfters von Definitionen und Sätzen aus der Arbeit „Lücken und Singularitäten von Potenzreihen" von Prof. Pólya Gebrauch gemacht [6]).

Die Potenzreihe (3.2) von $g(z)$ möge für $|z| > t$ konvergieren. Dann konvergiert die mit den selben Konstanten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ gebildete Reihe (3.5) in der ganzen endlichen ζ-Ebene. Ihre Summe $G(\zeta)$ ist eine ganze Funktion, deren Anwachsen den Typus t der Ordnung 1 nicht übersteigt. Die Funktion $g(z)$ wird die Borelsche Transformierte von $G(z)$ genannt [7]).

Um die Eigenschaften von $g(z)$ noch besser berücksichtigen zu können, führen wir das konjugierte Diagramm $\overline{\mathfrak{J}}$ dieser Funktion ein. Man versteht darunter den Durchschnitt aller derjenigen konvexen Bereiche, in deren Außenraum $g(z)$ ausnahmslos regulär ist. Der Bereich $\overline{\mathfrak{J}}$, der selbst auch konvex ist, besitze die Stützfunktion $k(\varphi)$; aus der Definition folgt, daß $k(\varphi) \leqq t$ ist. Es läßt sich zeigen, daß die reelle Funktion $k(-\varphi)$ den Indikator der ganzen Funktion $G(z)$ darstellt; d. h. daß

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{\log |G(R e^{i\varphi})|}{R} = k(-\varphi) \leqq t \tag{3.6}$$

ist [8]). Mit diesen Definitionen läßt sich folgender Satz aussprechen:

---

[6]) *Pólya*, a. a. O.

[7]) *Pólya*, a. a. O., S. 578.

[8]) *Pólya*, a. a. O., S. 585, Sätze II, III, IV.

Satz II.

Es seien die Voraussetzungen a) *und* b) *von Satz I erfüllt. Die Potenzreihe*

$$g(z) = \frac{a_0}{z} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \cdots \tag{3.2}$$

konvergiere für $|z| > t$ *und das konjugierte Diagramm von* $g(z)$ *besitze die Stützfunktion* $k(\varphi)$.

Dann konvergiert das Integral

$$f(z) = \int_0^{\infty(\Phi)} \frac{e^{-z\zeta}\, G(\zeta)}{L(-\zeta)}\, d\zeta\ , \tag{3.4}$$

wo

$$G(\zeta) = a_0 + \frac{a_1}{1!}\zeta + \frac{a_2}{2!}\zeta^2 + \cdots$$

ist, gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich der Halbebene

$$\Re(z\cdot e^{i\Phi}) > k(-\Phi) \tag{3.7}$$

und erfüllt dort die Gleichung

$$\mathfrak{L}\, f(z) = g(z)\ .$$ [9]

(Dies gilt wegen $k(\varphi) \leqq t$ speziell auch für die Halbebene $\Re(z\cdot e^{i\varphi}) > t$). Die Halbebene (3.7) wird von einer Stützgerade des konjugierten Diagrammes $\bar{\mathfrak{J}}$ begrenzt; der Konvergenzbereich liegt daher stets im Äußern des konjugierten Diagrammes.

Der Beweis ist im wesentlichen derselbe wie für Satz I. Wir betrachten einen abgeschlossenen Teilbereich der Halbebene (3.7). Alle z-Werte in diesem Teilbereich erfüllen die Ungleichung

$$\Re(z\cdot e^{i\Phi}) \geqq k(-\Phi) + 3\alpha \tag{3.8}$$

mit $\alpha > 0$. Nach (3.6) gilt für genügend große R

$$|\, G(R\cdot e^{i\Phi})\,| < e^{R[k(-\Phi)+\alpha]}\ . \tag{3.9}$$

Ist wie im Beweis von Satz I $\varrho < \sigma < 1$, so findet man für den Integranden von (3.4) unter Berücksichtigung von (3.8), (3.9) und (2.7) die Abschätzung

$$\left|\frac{e^{-z\zeta}\, G(\zeta)}{L(-\zeta)}\right| < \exp\{\, R\, [-\Re(z\cdot e^{i\Phi}) + k(-\Phi) + \alpha + R^{\sigma-1}]\,\}$$

$$< e^{-\alpha R} \qquad \text{für } \zeta = R\, e^{i\Phi}\ ,\quad R > R_1\ .$$

[9]) Der Form nach findet sich dieser Satz schon bei *Davis*, Linear Operators, S. 296.

Damit ist die gleichmäßige Konvergenz des Integrales (3.4) im betrachteten Bereich bewiesen.

Es bleibt noch (3.1) zu verifizieren; dies geschieht durch folgende Umformung:

$$\mathfrak{L} f(z) = \mathfrak{L} \lim_{R\to\infty} \int_0^{R\cdot e^{i\Phi}} \frac{e^{-z\zeta}\, G(\zeta)}{L(-\zeta)}\, d\zeta$$

$$= \lim_{R\to\infty} \mathfrak{L} \int_0^{R\cdot e^{i\Phi}} \frac{e^{-z\zeta}\, G(\zeta)}{L(-\zeta)}\, d\zeta$$

$$= \int_0^{\infty\,(\Phi)} e^{-z\zeta}\, G(\zeta)\, d\zeta = g(z) \quad .$$

Die ersten drei Schritte wurden schon im Beweis von Satz I gerechtfertigt; in der dritten Zeile steht die Integraldarstellung der Borelschen Transformierten [10]).

4. Nun mögen zwei verschiedene, aber nicht in einer Geraden liegende Halbstrahlen die Voraussetzung b) von Satz I erfüllen. Ihre Richtungswinkel seien Φ_1 und Φ_2; ferner werde

$$0 < \Phi_2 - \Phi_1 < \pi \tag{4.1}$$

vorausgesetzt.

Das Integral (3.4) erstreckt über den Halbstrahl der Richtung Φ_1 soll die Funktion $f_1(z)$, erstreckt über den Halbstrahl der Richtung Φ_2 die Funktion $f_2(z)$ ergeben. Wir wollen untersuchen, welche Beziehung zwischen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ besteht.

Die Halbebenen, in welchen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ durch je ein Integral dargestellt werden, überdecken sich teilweise. Insbesondere konvergieren beide Integrale, wenn der Wert z gleichzeitig die beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned} \Re(z\cdot e^{i\Phi_1}) &\geqq t + 3\,\alpha \\ \Re(z\cdot e^{i\Phi_2}) &\geqq t + 3\,\alpha \end{aligned} \tag{4.2}$$

erfüllt, wobei α eine beliebige positive Zahl sein kann. Ein solcher z-Wert befriedigt wegen (4.1) auch die Ungleichung

$$\Re(z\cdot e^{i\Phi}) \geqq t + 3\,\alpha \ , \tag{4.3}$$

sofern Φ die Ungleichung

[10]) *Pólya,* a. a. O., S. 580.

$$\Phi_1 \leqq \Phi \leqq \Phi_2 \tag{4.4}$$

erfüllt [11]).

Der offene Winkelraum, dem der Punkt ζ dann angehört, wenn $\Phi_1 < \arg \zeta < \Phi_2$ ist, werde mit $S(\Phi_1\,;\,\Phi_2)$ bezeichnet.

Nun betrachten wir folgendes Umlaufintegral:

$$\oint\limits_{\mathfrak{C}_R} \frac{e^{-z\zeta}\, G(\zeta)}{L(-\zeta)}\, d\zeta \tag{4.5}$$

$$= \int\limits_0^{R\cdot e^{i\Phi_1}} \frac{e^{-z\zeta}\, G(\zeta)}{L(-\zeta)}\, d\zeta + \int\limits_{R\cdot e^{i\Phi_1}}^{R\cdot e^{i\Phi_2}} \frac{e^{-z\zeta}\, G(\zeta)}{L(-\zeta)}\, d\zeta + \int\limits_{R\cdot e^{i\Phi_2}}^{0} \frac{e^{-z\zeta}\, G(\zeta)}{L(-\zeta)}\, d\zeta\ .$$

Der geschlossene Integrationsweg $\mathfrak{C}_R$ bestehe aus den beiden Strecken, welche von den Punkten O und $Re^{i\Phi_1}$, O und $Re^{i\Phi_2}$ begrenzt werden, ferner aus dem Kreisbogen vom Mittelpunkt O, der die Endpunkte dieser Strecken miteinander verbindet und in $S(\Phi_1\,;\,\Phi_2)$ verläuft (seine Öffnung ist also kleiner als π). Für irgend einen Punkt $\zeta = Re^{i\Phi}$ auf diesem Kreisbogen gilt (4.4) und infolgedessen wegen (4.3)

$$\Re(z\zeta) = R\,\Re(z\,e^{i\Phi}) \geqq R(t + 3\alpha)\ . \tag{4.3'}$$

Aus (3.6) geht hervor, daß von einem gewissen R an und für alle Werte von Φ die Ungleichung

$$|\,G(R\,e^{i\Phi})\,| < e^{R(t+\alpha)} \tag{4.6}$$

erfüllt ist.

Aus Hilfssatz 1 (siehe Seite 382) folgt

Hilfssatz 2: *Ist σ größer als die Ordnung von $L(\zeta)$, so läßt sich eine Folge von Kreisen vom Mittelpunkt O finden, deren Radien ins Unendliche wachsen, und auf welchen*

---

[11]) Setzen wir $z = re^{i\varphi}$, so wird

$$\begin{aligned} \Re(z\,e^{i\Phi_1}) &= r\cos(\varphi + \Phi_1) \geqq t + 3\alpha \\ \Re(z\,e^{i\Phi_2}) &= r\cos(\varphi + \Phi_2) \geqq t + 3\alpha\ . \end{aligned} \tag{4.2}$$

Wäre

$$\Re(z\,e^{i\Phi}) = r\cos(\varphi + \Phi) < t + 3\alpha\ ,$$

so hätte $\cos(\varphi + \Phi)$ im Intervall $\Phi_1 < \Phi < \Phi_2$ ein Minimum, was wegen (4.1), (4.2) und $t \geqq 0$ nicht möglich ist.

$$\frac{1}{|L(-\zeta)|} < e^{|\zeta|^\sigma} \tag{4.7}$$

gilt [12]).

Bezeichnet R den Radius eines solchen Kreises, und ist dieser genügend groß, so erhält man auf Grund von (4.3′), (4.6), (4.7) und $\varrho < \sigma < 1$ für das zweite Integral rechts in (4.5) die Abschätzung

$$\left|\int\limits_{R\cdot e^{i\Phi_1}}^{R\cdot e^{i\Phi_2}} \frac{e^{-z\zeta}\, G(\zeta)}{L(-\zeta)}\, d\zeta\right| < \pi R \exp\{R[-(t+3\alpha)+R^{\sigma-1}+(t+\alpha)]\} < e^{-\alpha R}\ .$$

Es gibt also eine ins Unendliche wachsende Folge von R-Werten R_1, $R_2, \ldots, R_k, \ldots$, für welche das zweite Integral rechts in (4.5) gegen Null konvergiert. Gleichzeitig konvergiert das erste Integral gegen $f_1(z)$, das dritte gegen $-f_2(z)$. Durchläuft also R die genannte Folge von Werten, so gilt

$$f_1(z) - f_2(z) = \lim_{k\to\infty} \oint\limits_{\mathfrak{C}_{R_k}} \frac{e^{-z\zeta}\, G(\zeta)}{L(-\zeta)}\, d\zeta\ . \tag{4.8}$$

Wir setzen nun voraus, daß die Funktion $L(-\zeta)$ in $S(\Phi_1; \Phi_2)$ nur endlich viele Nullstellen besitzt. Dann ist das Integral rechts in (4.8) für genügend große k unabhängig von k. Berechnet man es mit Hilfe der Residuenmethode, so findet man, daß $f_1(z) - f_2(z)$ eine ganze Funktion ist. Dies bedeutet, daß $f_1(z)$ und $f_2(z)$ den gleichen Existenzbereich haben; d. h. daß $f_1(z)$ über die Halbebene

$$\Re(z\cdot e^{i\Phi_1}) > k(-\Phi_1) \tag{4.9}$$

hinaus in der ganzen Halbebene

$$\Re(z\cdot e^{i\Phi_2}) > k(-\Phi_2) \tag{4.10}$$

fortsetzbar ist.

Wir betrachten weiter noch folgenden Fall: Die Funktion $L(-\zeta)$ besitze in $S(\Phi_1; \Phi_2)$ zwar unendlich viele Nullstellen, im komplementären Winkelraum $S(\Phi_2; \Phi_1 + 2\pi)$, dessen Öffnung wegen (4.1) größer als π

[12]) Die Durchmesser $2|\lambda_k|^{-1}$ der Kreise um die Nullstellen von $L(z)$, auf denen (4.7) eventuell falsch ist (s. S. 382), besitzen eine endliche Summe. Weil nämlich die Ordnung von $L(z)$ kleiner 1 ist, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{-1}$ (vgl. z. B. *Bieberbach*, a. a. O., S. 243). Es ist daher möglich, eine Folge von Kreisen um O anzugeben, deren Radien ins Unendliche wachsen, und die die erwähnten Kreise um die Nullstellen nicht treffen, auf denen also (4.7) ausnahmslos gilt.

ist, dagegen nur endlich viele. Dann weiß man von der Funktion $f_1(z) - f_2(z)$ nur, daß sie in dem den Halbebenen (4.9) und (4.10) gemeinsamen Gebiet regulär ist, $f_1(z)$ läßt sich im allgemeinen nicht in der ganzen Halbebene (4.10) fortsetzen.

Integrieren wir aber in (3.4) über einen Halbstrahl der Richtung Φ_3, mit $\Phi_2 < \Phi_3 < \Phi_1 + 2\pi$, $\Phi_3 - \Phi_2 < \pi$, $\Phi_1 + 2\pi - \Phi_3 < \pi$, so folgt aus dem oben Gesagten, daß man $f_1(z)$ unmittelbar in die Halbebene $\Re(z e^{i\Phi_3}) > k(-\Phi_3)$ fortsetzen kann, von hier aus in die Halbebene (4.10). Es sind also $f_1(z)$ und $f_2(z)$ bis auf eine ganze Funktion zwei verschiedene Zweige ein und derselben Funktion.

Betrachten wir die Richtung Φ_1 als fest, die Richtung Φ_2 als variabel innerhalb des Bereiches, für welchen unsere Überlegungen gültig sind, so gelangen wir zu den Aussagen des folgenden Satzes:

Satz III.

Die Voraussetzung a) *von Satz I sei erfüllt. Es sei* $L(0) \neq 0$ *und es gebe einen Winkelraum* $S(\Psi_1; \Psi_2)$, $\Psi_1 < \Psi_2$, *derart, daß* $L(-\zeta)$ *nur an endlich vielen Stellen* ζ *in* $S(\Psi_1; \Psi_2)$ *verschwindet.*

Das konjugierte Diagramm $\mathfrak{J}$ *von* $g(z)$ *besitze die Stützfunktion* $k(\Phi)$.

a) *Dann stellt das Integral*

$$f_1(z) = \int_0^{\infty(\Phi_1)} \frac{e^{-z\zeta} G(\zeta)}{L(-\zeta)} d\zeta \tag{4.11}$$

integriert über einen Halbstrahl in $S(\Psi_1; \Psi_2)$, *auf welchem* $L(-\zeta)$ *nie Null wird, in der Halbebene*

$$\Re(z \cdot e^{i\Phi_1}) > k(-\Phi_1) \tag{4.9}$$

eine Funktion dar, welche die Gleichung

$$\mathfrak{L} f(z) = g(z) \tag{3.1}$$

erfüllt.

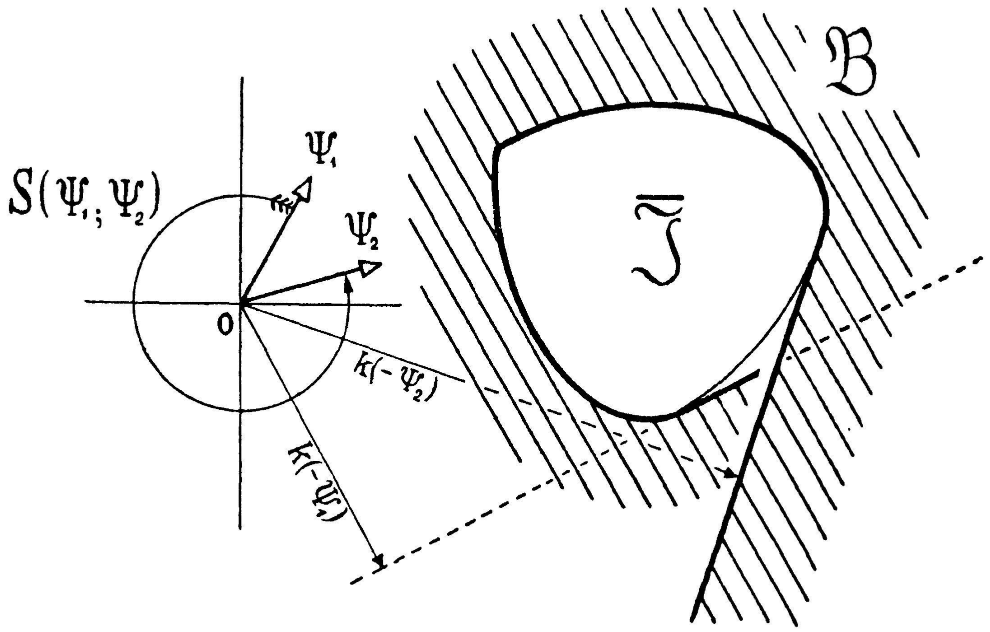
b) *Die durch* (4.11) *dargestellte Funktion* $f_1(z)$ *ist über die Halbebene* (4.9) *hinaus fortsetzbar, und zwar mindestens innerhalb des Summenbereiches* $\mathfrak{B}$ *aller Halbebenen*

$$\Re(z \cdot e^{i\Phi}) > k(-\Phi) \quad \text{mit} \quad \Psi_1 < \Phi < \Psi_2 .$$

Dabei sind zwei dieser Halbebenen mit $\Phi = \Phi'$ *und* $\Phi = \Phi''$ *dann und nur dann als zusammenhängend anzusehen, wenn der innerhalb* $S(\Psi_1; \Psi_2)$ *gemessene Winkel zwischen den Halbstrahlen der Richtung* Φ' *und* Φ'' *kleiner als* π *ist.*

Der Bereich $\mathfrak{B}$ ist einfach zusammenhängend aber nicht mehr schlicht, sobald $\Psi_2 - \Psi_1$ größer als π ist. Im allgemeinen wird $\mathfrak{B}$ von einem Randstück von $\bar{\mathfrak{J}}$ und zwei Halbstrahlen, die $\bar{\mathfrak{J}}$ berühren, begrenzt (vgl. Fig.).

Der Bereich $\mathfrak{B}$ wird im allgemeinen nicht den Existenzbereich von $f_1(z)$ darstellen. Daß dies jedoch unter speziellen Voraussetzungen der Fall sein kann, zeigt der folgende Satz IV.



5. **Satz IV.** *Die erzeugende Funktion $L(z)$ des Operators $\mathfrak{L}$ erfülle die Voraussetzung* a) *von Satz I; die dem abs. Betrage nach geordneten Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots$ von $L(z)$ erfüllen für $k \geqq k_0$ folgende Bedingungen*[13]:

a) *Die λ_k liegen alle auf der negativen reellen Achse,*

b) *die λ_k sind einfache Nullstellen,*

c) $$\lim_{k \to \infty} \text{inf.} \, |\lambda_k - \lambda_{k+1}| > 0 \; .$$

Auf dem Halbstrahl der Richtung Φ, $\Phi \neq 0$, sei $L(-\zeta)$ nie Null. Dann besteht der Existenzbereich der durch

$$f(z) = \frac{1}{(n-1)\,!} \int_0^{\infty (\Phi)} \frac{e^{-z\zeta}\, \zeta^{n-1}}{L(-\zeta)}\, d\zeta \tag{5.1}$$

dargestellten Lösung der Differentialgleichung

$$\mathfrak{L}\, f(z) = \frac{1}{z^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{5.2}$$

[13]) Aus der Voraussetzung a) von Satz I folgt, daß die Funktion $L(z)$ unendlich viele Nullstellen besitzt.

aus zwei Exemplaren der rechten Halbebene ($\Re z > 0$) *und einem Exemplar der linken Halbebene* ($\Re z < 0$). *Die Halbebenen sind so aneinander zu heften, daß sie zusammen einen Winkelraum von der Oeffnung* 3π *auf der Riemannschen Fläche von* $\log z$ *ergeben.*

Aus Satz III geht hervor, daß $f(z)$ im beschriebenen Bereich wirklich regulär ist ($\Psi_1 = 0$, $\Psi_2 = 2\pi$, $k(-\Phi) \equiv 0$, $G(\zeta) = \zeta^{n-1}$).

Über der rechten Halbebene liegen zwei Blätter des Bereiches; die zugehörigen Zweige der Funktion $f(z)$ seien $f_1(z)$ und $f_2(z)$. Man erhält $f_1(z)$ bis auf eine zu addierende ganze Funktion, wenn man in (5.1) über den Halbstrahl der Richtung $\Phi_1 = -\delta < 0$ integriert, $f_2(z)$ analog, wenn man $\Phi_2 = \delta > 0$ setzt; dabei ist δ so klein zu wählen, daß alle Nullstellen von $L(-\zeta)$, die in $S(-\delta;\delta)$ liegen, reell sind; dann sind $f_1(z)$ und $f_2(z)$ unabhängig von δ.

Durch Ausrechnung der Residuen erhält man aus (4.8)

$$f_1(z) - f_2(z) = E(z) - \frac{2\pi i}{(n-1)!} \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{(-\lambda_k)^{n-1}}{L'(\lambda_k)} e^{z\lambda_k}, \tag{5.3}$$

wo $E(z)$ eine ganze Funktion bedeutet. Wir zeigen, daß die rechts stehende Dirichletsche Reihe für $\Re z > 0$ konvergiert.

Dazu müssen wir auf Hilfssatz 1 zurückgreifen (s. S. 382). Die Radien $|\lambda_k|^{-1}$ der Kreise um die Nullstellen λ_k konvergieren mit wachsendem k gegen Null; die Abstände der Nullstellen dagegen bleiben nach Voraussetzung c) unseres Satzes oberhalb einer positiven Schranke. So werden also von einem gewissen $k = k_1$ an ($k_1 \geqq k_0$) die Mittelpunkte zweier benachbarten Nullstellen von diesen Kreisen nicht bedeckt. Durch diese Mittelpunkte können wir daher die Kreise um O legen, von denen in Hilfssatz 2 die Rede ist. Damit treffen wir für die Integrationswege $\mathfrak{C}_{R_k}$ in (4.8) die Festsetzung

$$R_k = \frac{1}{2}(\lambda_k + \lambda_{k+1}) \quad \text{für} \quad k \geqq k_1 .$$

Die Folge der Integrale über die $\mathfrak{C}_{R_k}$ ist von $k = k_1$ an identisch mit der Folge der Teilsummen der Reihe in (5.3) vermehrt um $E(z)$. Also konvergiert diese Reihe, sobald (4.8) gilt; dies ist der Fall für z in $S(-\pi/2+\delta;\pi/2-\delta)$ mit beliebig kleinem δ, d. h. für $\Re z > 0$.

Weiter zeigen wir, daß die Reihe in (5.3) für $\Re z < 0$ divergiert. Die Ordnung der Funktion $L'(z)$ ist wie die von $L(z)$ kleiner als 1. Hat man $\Re z < -\alpha < 0$, so gelten für $k \geqq k_2 \geqq k_0$ folgende Abschätzungen

$$|L'(\lambda_k)| < e^{\alpha|\lambda_k|}$$

$$\Re(z\lambda_k) = \Re(-z|\lambda_k|) > \alpha|\lambda_k|$$

$$\left|\frac{\lambda_k^{n-1}}{L'(\lambda_k)} e^{z\lambda_k}\right| > |\lambda_k|^{n-1} .$$

Die dritte Ungleichung besagt, daß die betrachtete Reihe in der linken Halbebene nicht absolut konvergiert.

Die Ordnung der Funktion $L(z)$ ist kleiner als 1. Infolgedessen sind ihre Nullstellen λ_k so verteilt, daß

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{|\lambda_k|} = 0 \tag{5.5}$$

gilt [14]).

Daraus folgt, daß für die Dirichletsche Reihe in (5.3) die Konvergenzgrenze mit der Grenze der absoluten Konvergenz zusammenfällt [15]). Dies kann nur die imaginäre Achse sein.

Die Beziehung (5.5), die Voraussetzung c) unseres Satzes und die Divergenz der untersuchten Reihe in der linken Halbebene stellen die Voraussetzungen eines Satzes von Carlson und Landau dar [16]). Dieser sagt aus, daß die Konvergenzgerade unserer Dirichletschen Reihe zugleich die natürliche Grenze der durch sie dargestellten Funktion ist.

Wir haben also gefunden, daß die Funktion

$$\Delta f(z) = f_1(z) - f_2(z) ,$$

welche für $\Re z > 0$ definiert ist, nicht über die imaginäre Achse fortgesetzt werden kann. Nun läßt sich aber $f_1(z)$ über die positive imaginäre Achse fortsetzen; dann ist aber eine Fortsetzung von $f_2(z) = f_1(z) - \Delta f(z)$ über die positive imaginäre Achse unmöglich. Analog schließt man, daß $f_1(z)$ nicht über die negative imaginäre Achse fortsetzbar ist.

(Eingegangen den 4. Dezember 1941.)

---

[14]) Vgl. z. B. *Bieberbach*, a. a. O., S. 243.

[15]) Vgl. z. B. *Hardy*, The General Theory of Dirichlet's Series, S. 9.

[16]) *Carlson, F.* und *Landau, E.*, Neuer Beweis und Verallgemeinerung des Fabryschen Lückensatzes. Göttinger Nachrichten 1921, S. 184—188.