

|                     |   |
|---------------------|---|
| <b>Zeitschrift:</b> | Commentarii Mathematici Helvetici   |
| <b>Herausgeber:</b> | Schweizerische Mathematische Gesellschaft   |
| <b>Band:</b>        | 14 (1941-1942)  |
| <b>Artikel:</b>     | Über eine Beziehung zwischen geschlossenen Lie'schen Gruppen und diskontinuierlichen Bewegungsgruppen euklidischer Räume und ihre Anwendung auf die Aufzählung der einfachen Lie'schen Gruppen. |
| <b>Autor:</b>       | Stiefel, E.   |
| <b>DOI:</b>         | <a href="https://doi.org/10.5169/seals-14310">https://doi.org/10.5169/seals-14310</a>   |

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über eine Beziehung zwischen geschlossenen Lie'schen Gruppen und diskontinuierlichen Bewegungsgruppen euklidischer Räume und ihre Anwendung auf die Aufzählung der einfachen Lie'schen Gruppen

Von E. STIEFEL, Zürich

Die *Killing-Cartan*'sche Klassifikation der einfachen Lie'schen Gruppen wurde in letzterer Zeit von mehreren Autoren<sup>1)</sup> vereinfacht durch Benutzung von geometrischen Methoden; es wurde dabei hauptsächlich die Tatsache verwendet, daß man dem zur Gruppe gehörenden Lie'schen Ring eine Vektorfigur eines euklidischen Raumes zuordnen kann, welche die wichtige Eigenschaft besitzt, bei einer endlichen von Spiegelungen erzeugten Gruppe  $\Phi^*$  in sich überzugehen. Überdies muß  $\Phi^*$  gewisse zahlentheoretische Bedingungen erfüllen.

Hier soll nun gezeigt werden, daß diese merkwürdigen Ganzahligkeitsbedingungen ihren Grund einfach darin haben, daß  $\Phi^*$  die „Kristallklasse“ einer diskontinuierlichen Bewegungsgruppe  $\Gamma$  repräsentiert, d. h., daß  $\Phi^*$  ein Gitter invariant läßt. Wir werden zeigen, daß zu jeder halbeinfachen Lie'schen Gruppe eine diskontinuierliche durch Spiegelungen erzeugte Gruppe  $\Gamma$  gehört und daß umgekehrt jede Gruppe  $\Gamma$  eine Familie von im kleinen isomorphen Lie'schen Gruppen liefert.

Die Aufzählung der halbeinfachen Lie'schen Gruppen wird damit eine Aufgabe der Kristallographie.

Um diese Erkenntnis zu gewinnen, muß aber der infinitesimale Standpunkt grundsätzlich aufgegeben werden. Wir legen daher unseren Betrachtungen eine *geschlossene* halbeinfache Lie'sche Gruppe zugrunde und werden topologische Methoden anwenden, und zwar die Theorie der maximalen Abel'schen Untergruppe in einer geschlossenen Lie'schen Gruppe, wie sie von *H. Hopf* entwickelt wurde. Von der infinitesimalen Theorie benötigen wir aber einige Resultate.

Dabei zeigt es sich nun, daß  $\Gamma$  nicht nur eine Familie von im kleinen isomorphen Lie'schen Gruppen bestimmt, sondern überdies eine Übersicht über alle Gruppen der Familie enthält. Ist einmal eine Gruppe  $G$

<sup>1)</sup> *H. Weyl, B. L. van der Waerden, E. Witt* (man vgl. das Literaturverzeichnis am Schluß).

in der Familie ausgewählt, so lassen sich aus  $\Gamma$  mehrere „globale“ Eigenschaften von  $G$  ablesen, so z. B. das Zentrum von  $G$  und die topologische Fundamentalgruppe von  $G$ .

Auch bei der Definition der Gruppe  $\Gamma$ , welche zu einer gegebenen Lie'schen Gruppe  $G$  gehört, werden wir nicht den Lie'schen Ring von  $G$  benutzen, sondern  $\Gamma$  mit Hilfe gewisser innerer Automorphismen von  $G$  erklären.

In § 1 ist diese Konstruktion von  $\Gamma$  an einem speziellen Beispiel auseinandergesetzt, in § 2 dann für eine beliebige Gruppe  $G$  durchgeführt. Dabei wird ein „Diagramm“ von  $G$  benutzt, das in § 2 Nr. 4 eingeführt ist, und dessen wesentliche Eigenschaften in § 2 Nr. 9, 10 zusammengestellt sind. In § 4 wird die Beziehung zur infinitesimalen Theorie hergestellt und dann werden isomorphe Gruppen untersucht. Die diesbezüglichen Resultate sind in Nr. 4, 5, 6 zusammengefaßt. § 5 enthält einen Bericht über die Aufstellung aller Gruppen  $\Gamma$ .

Zum Begriff der Halbeinfachheit einer Lie'schen Gruppe sei noch bemerkt, daß eine geschlossene Lie'sche Gruppe bekanntlich<sup>2)</sup> dann und nur dann halbeinfach ist, wenn ihr Zentrum diskret, also eine endliche Gruppe ist. Diese Tatsache werden wir im folgenden stillschweigend benutzen.

## § 1. Die unitäre Gruppe in drei Variablen als Beispiel

Bevor wir zu beliebigen geschlossenen Lie'schen Gruppen übergehen, sollen die wesentlichen Züge der angekündigten Verwandtschaft an einem Beispiel aufgezeigt werden. Wir wählen als Gruppe  $G$  die Gruppe der dreireihigen unitären Matrizen mit der Determinante  $+1$ . In der Cartan'schen Aufzählung trägt sie den Namen  $A_2$ . Als topologischer Raum ist  $G$  geschlossen und von der Dimension  $n = 8$ .

1. In  $G$  gilt bekanntlich das Hauptachsensatz: Zu jeder Matrix  $x \in G$  existiert eine Matrix  $a \in G$ , so daß  $axa^{-1}$  Diagonalgestalt hat:

$$axa^{-1} = \begin{pmatrix} e^{ix_1} & & 0 \\ & e^{ix_2} & \\ 0 & & e^{ix_3} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

wobei also

$$x_1 + x_2 + x_3 \equiv 0 \pmod{1}, \quad (2)$$

---

<sup>2)</sup> (7) § 55, speziell p. 282, C. (Die Nummern der Fußnoten beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.)

wenn an Stelle von  $2\pi$  die Zahl 1 als Winkelmaß benutzt wird. Soll eine Matrix  $x$  dem Zentrum  $Z$  von  $G$  angehören, so ist  $axa^{-1} = x$  und daher hat  $x$  die Diagonalgestalt (1). Überdies muß aber gelten

$$x_1 \equiv x_2 \equiv x_3 \equiv \frac{1}{3} \pmod{1} . \quad (3)$$

Das Zentrum besteht also aus den Matrizen  $(\varepsilon e)$ , wo  $e$  die Einheitsmatrix und  $\varepsilon$  eine dritte Einheitswurzel bedeutet.  $Z$  ist endlich, also  $G$  halbeinfach.

2. Sämtliche Diagonalmatrizen (1) bilden eine *Abel'sche Untergruppe*  $T$  von  $G$ , die  $Z$  enthält. Die Eigenschaften von  $T$  treten am besten hervor, wenn  $x_1, x_2, x_3$  als cartesische Koordinaten in einem dreidimensionalen Raum  $R^3$  gedeutet werden (Fig. 1).  $g^3$  sei das Gitter der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten. Ein Element  $t$  von  $T$  ist dann etwa gegeben durch einen Punkt der Ebene

$$R^2: \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0 ,$$

wobei aber zwei nach dem Gitter  $g^3$  kongruente Punkte der Ebene  $R^2$  zu identifizieren sind. Die Ebene  $R^2$  ist Gitterebene von  $g^3$ , und zwar ist das ebene Gitter  $g^2$ , welches ihr durch  $g^3$  aufgeprägt wird, hexagonal (Fig. 2).

Unitäre Gruppe  $A_2$

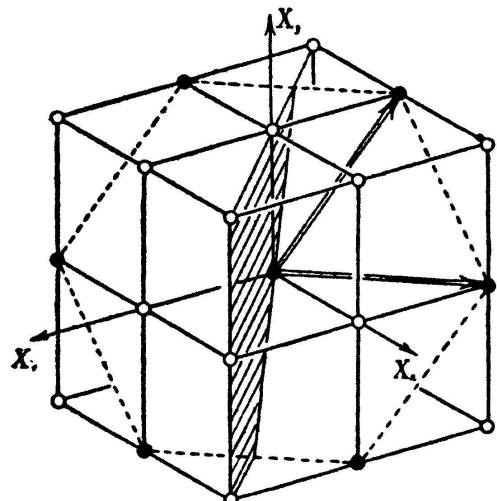


Fig. 1

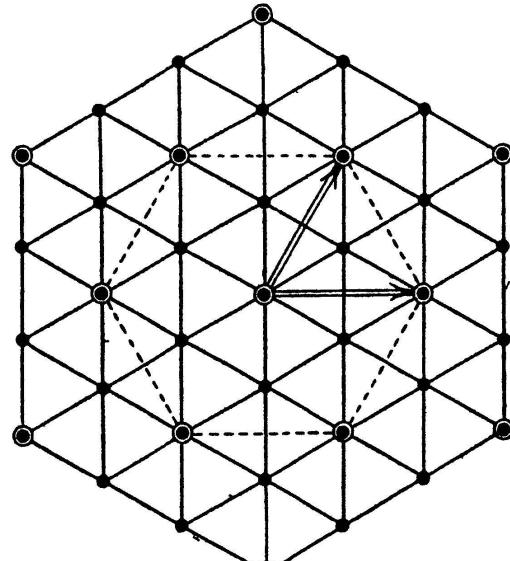


Fig. 2

Denken wir uns die nach  $g^2$  äquivalenten Punkte von  $R^2$  identifiziert, so erhalten wir eine Torusfläche.  $T$  ist also als topologischer Raum ein Torus.

Die Gruppenmultiplikation innerhalb  $T$  ist im Raum  $R^3$  oder auch in der Ebene  $R^2$  die gewöhnliche Vektoraddition. Im Sinne der gruppen-

theoretischen Struktur ist also die Lie'sche Gruppe  $T$  das direkte Produkt aus zwei eindimensionalen geschlossenen Gruppen (Kreisdrehungsgruppen). Ein derartiges direktes Produkt aus zwei oder allgemeiner endlich vielen Kreisdrehungsgruppen nennen wir im folgenden durchwegs ein *Toroid*.

Um in der Lie'schen Gruppe  $T$  Parameter einzuführen, kann man so vorgehen: Man wähle zwei primitive Vektoren  $e_1, e_2$  des Gitters  $g^2$  als Grundvektoren eines schiefen Koordinatensystems in der Ebene  $R^2$  und es seien  $\omega_1, \omega_2$  die Koordinaten.

Die Multiplikation der Gruppenelemente  $(\omega_1, \omega_2)$  und  $(\omega'_1, \omega'_2)$  ergibt dann das Element  $(\omega_1 + \omega'_1, \omega_2 + \omega'_2)$ . Wir nennen  $\omega_1, \omega_2$  die „Drehwinkel“ des Toroids.

Wenn ein Element  $x$  von  $G$  mit allen Elementen von  $T$  vertauschbar ist, so hat  $x$  selbst Diagonalgestalt, gehört also  $T$  an. Das Toroid  $T$  ist also in dem Sinne *maximal*, daß es nicht eigentlich in einer anderen Abel'schen Untergruppe von  $G$  enthalten ist.

3. Im folgenden sei  $a$  ein beliebiges aber festes Element aus  $G$  und  $t$  durchlufe alle Diagonalmatrizen, d. h. alle Elemente von  $T$ . Der innere Automorphismus von  $G$ :

$$x \rightarrow a^{-1} x a \quad (4)$$

wird im allgemeinen  $T$  in ein anderes Toroid überführen; wir interessieren uns aber jetzt speziell für diejenigen  $a$ , für welche der zugehörige Automorphismus das Toroid  $T$  invariant lässt. In diesem Fall bewirkt er einen Automorphismus  $\varphi_a$  von  $T$  in sich. Sämtliche  $\varphi_a$  bilden eine Gruppe  $\Phi$  von Transformationen von  $T$  in sich. Die Einführung dieser Gruppe  $\Phi$  bildet das Fundament der weiteren Untersuchungen. Es ist noch zu bemerken, daß sämtliche Elemente  $a$ , welche einer Nebengruppe von  $T$  angehören, denselben Automorphismus von  $T$  ergeben. Nehmen wir in unserem Beispiel etwa

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} e^{ix_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{ix_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{ix_3} \end{pmatrix},$$

so erhalten wir

$$a^{-1} t a = \begin{pmatrix} e^{ix_2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{ix_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{ix_3} \end{pmatrix},$$

$\varphi_a$  besteht also in der Vertauschung von  $x_1$  und  $x_2$ . Allgemein enthält  $\Phi$  alle Permutationen der drei Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$ . Weitere Trans-

formationen kann es aber in  $\Phi$  nicht geben, denn bei einem inneren Automorphismus (4) von  $G$  bleiben die Eigenwerte der Matrizen invariant, also können sich die Elemente in der Hauptdiagonalen unserer Matrix  $t$  höchstens untereinander vertauschen.  $\Phi$  ist also endliche Gruppe von der Ordnung 6.

Im Raum  $R^3$  ist die Vertauschung von  $x_1$  und  $x_2$  die Spiegelung an der Ebene  $x_1 - x_2 = 0$  und in der Ebene  $R^2$  die Spiegelung an einer vertikalen Achse durch den Nullpunkt, der das Einselement  $e$  von  $G$  darstellt (Fig. 2). Da aber die Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  nur  $(\text{mod } 1)$  bestimmt sind, können wir statt dieser Spiegelachse ebensogut eine zu ihr nach dem Gitter  $g^2$  äquivalente Achse nehmen. Wir erhalten so drei Scharen  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  von parallelen äquidistanten Spiegelungsachsen, welche eine Einteilung der Ebene  $R^2$  in lauter gleichseitige Dreiecke ergeben. Die Spiegelungen an diesen Achsen müssen natürlich als Transformationen von  $T$  in sich das Gitter  $g^2$  invariant lassen, erzeugen also eine *diskontinuierliche Gruppe  $\Gamma$*  von kongruenten Abbildungen der euklidischen Ebene  $R^2$ .

$\Gamma$  ist nun die zur Lie'schen Gruppe  $G$  gehörige euklidische Bewegungsgruppe. Sie trägt in der Kristallographie<sup>3)</sup> die Bezeichnung  $C_{3v}^2$ ; ihre Kristallklasse wird gerade durch unsere Gruppe  $\Phi$  repräsentiert. Die in  $\Gamma$  enthaltene Untergruppe  $\gamma$  der Translationen ist zufällig identisch mit der Gruppe der Translationen des Gitters  $g^2$ ; es wird sich aber später zeigen, daß dies bei anderen Lie'schen Gruppen nicht der Fall zu sein braucht. Die Gesamtheit aller Spiegelungsachsen nennen wir das **Diagramm** der Lie'schen Gruppe  $G$ ; es hat zusammengefaßt folgende Eigenschaften:

- a) Die Spiegelungen an den Achsen des Diagramms erzeugen eine diskontinuierliche Bewegungsgruppe  $\Gamma$ .
- b) Das Diagramm ist invariant gegenüber  $\Gamma$ .

Es sei noch ausdrücklich erwähnt, daß das Gitter  $g^2$  nicht zum Diagramm gerechnet wird; wir werden im Gegenteil später verschiedene Gitter in ein und dasselbe Diagramm einlagern.

**4.** Das Zentrum  $Z$  von  $G$  ist Untergruppe von  $T$ . Es wird daher in  $R^2$  durch ein Punktgitter  $g_Z^2$  dargestellt, welches eine Verfeinerung von  $g^2$  ist. Nun besteht  $g_Z^2$  aus allen *Knotenpunkten* des Diagramms, d. h. aus den Punkten, in denen sich drei Spiegelachsen schneiden. Gemäß der

---

<sup>3)</sup> Zur Kristallographie vgl. man (8).

Gleichung (3) am Anfang dieses Paragraphen muß nämlich ein Element des Zentrums drei Gleichungen von der Form

$$x_1 - x_2 = m_1, \quad x_2 - x_3 = m_2, \quad x_3 - x_1 = m_3$$

erfüllen, wobei  $m_1, m_2, m_3$  ganze Zahlen sind. Diese drei Gleichungen stellen im  $R^3$  drei Ebenen dar, welche aus  $R^2$  gerade drei Spiegelachsen schneiden. Andererseits erkennt man auch direkt, daß ein Element von  $Z$  gegenüber  $\Phi$  invariant sein muß, also der zugehörige Punkt in  $R^2$  bei jeder Operation von  $\Gamma$  in einen in bezug auf das Gitter  $g^2$  äquivalenten Punkt übergehen muß. Diese Eigenschaft haben aber nur die Knotenpunkte des Diagramms.

## § 2. Konstruktion der euklidischen Raumgruppe zu einer geschlossenen halbeinfachen Lie'schen Gruppe.

Das Ziel dieses Abschnitts ist die Definition und Untersuchung einer analogen endlichen Gruppe  $\Phi$  im Fall einer beliebigen geschlossenen zusammenhängenden Lie'schen Gruppe  $G$ . Die Halbeinfachheit von  $G$  wird zunächst noch nicht verlangt. Dabei werden wir von Ergebnissen ausgehen, die von *H. Hopf*<sup>4)</sup> stammen und in der folgenden Nr. 1 kurz zusammengestellt sind.

1. Eine abgeschlossene und *zusammenhängende* Abel'sche Untergruppe von  $G$  ist ein **Toroid**  $T$ , also ein direktes Produkt aus endlich vielen eindimensionalen geschlossenen Gruppen (Kreisdrehungsgruppen). Ein Toroid  $T$ , das ein vorgegebenes Gruppenelement  $a$  enthält, kann wie folgt konstruiert werden: Es existiert<sup>5)</sup> in  $G$  eine einparametrische zusammenhängende Untergruppe  $H$ , welche durch  $a$  läuft. Die abgeschlossene Hülle von  $H$  ist zusammenhängende abgeschlossene Abel'sche Untergruppe von  $G$ , also ein Toroid  $T$ , welches  $H$  und damit auch  $a$  enthält.

Ist ein Element  $a$  von  $G$  mit allen Elementen eines Toroids  $T$  vertauschbar, so gibt es sicher eine Abel'sche Lie'sche Untergruppe  $H$ , welche  $a$  und  $T$  enthält, nämlich z. B. die abgeschlossene von  $a$  und  $T$  erzeugte Gruppe. Schärfer gilt nun aber<sup>6)</sup>, daß sogar der Zusammenhang von  $H$  gefordert werden kann, also:

**Satz 1:** *Ist  $a \in G$  mit allen Elementen eines Toroids  $T$  vertauschbar, so gibt es in  $G$  ein Toroid, welches  $a$  und  $T$  enthält.*

---

<sup>4)</sup> (4) Nr. 17—27.

<sup>5)</sup> (4) Nr. 17.

<sup>6)</sup> Beweis in (4) Nr. 23.

Ein Toroid  $T$  heißt **maximal**, wenn es nicht in einem höherdimensionalen Toroid enthalten ist. Es ergibt sich daher sofort:

**Satz 2:** *Ist  $a \in G$  mit allen Elementen eines maximalen Toroids  $T$  vertauschbar, so liegt  $a$  in  $T$ .*

Im folgenden wird nun ein maximales Toroid  $T_0$  in  $G$  ausgezeichnet; seine Dimension sei  $l$ . Ein Element  $t$  von  $T_0$  nennen wir **regulär**, wenn jedes Toroid, auf dem  $t$  liegt, in  $T_0$  enthalten ist. Mit  $N_t$  bezeichnen wir den **Normalisator** von  $t$ ; er besteht definitionsgemäß aus allen mit  $t$  vertauschbaren Elementen von  $G$ . Die zusammenhängende Komponente  $N'_t$  von  $N_t$ , welche das Einselement  $e$  von  $G$  enthält, ist als abgeschlossene Untergruppe von  $G$  eine Lie'sche Gruppe und  $T_0$  ist auch maximales Toroid in  $N'_t$ .

Für ein reguläres Element  $t$  gilt:  $N'_t = T_0$ . Dies folgt so: Ist  $b \in N'_t$ , so existiert ein in  $N'_t$  maximales Toroid  $T$ , welches  $b$  enthält und dessen Elemente also (da sie in  $N_t$  liegen) mit  $t$  vertauschbar sind. Nach Satz 2, angewandt auf die Gruppe  $N'_t$ , ist also  $t \in T$  und daher nach Definition der Regularität  $T \in T_0$  und somit  $b \in T_0$ .

Ein **singuläres** Element  $t$  hingegen soll definitionsgemäß außer auf  $T_0$  noch auf einem in  $T_0$  nicht enthaltenen Toroid  $T$  liegen. Da  $T_0$  und  $T$  in  $N'_t$  enthalten sind, muß die Dimension von  $N_t$  größer als  $l$  sein. Es folgt daher die Charakterisierung der singulären Elemente nach *H. Hopf*:

**Satz 3:** *Ein Element  $t \in T_0$  ist regulär oder singulär, je nachdem sein Normalisator die Dimension  $l$  von  $T_0$  oder höhere Dimension hat.*

Auf einem Toroid  $T$  gibt es immer ein „erzeugendes“ Element  $t$  mit folgender Eigenschaft: Die von  $t$  erzeugte Untergruppe von  $T$  ist überall dicht in  $T$ , d. h. ihre abgeschlossene Hülle bezüglich  $T$  ist mit  $T$  identisch<sup>7)</sup>.

2.  $T_0$  sei wieder das ausgezeichnete maximale Toroid in  $G$  von der Dimension  $l$ . Es sei  $a$  ein festes Element von  $G$  und der zugehörige innere Automorphismus

$$x \rightarrow a^{-1}xa$$

lässe  $T_0$  invariant, bewirke also einen Automorphismus  $\varphi_a$  von  $T_0$  in sich. Um die Gruppe  $\Phi$  dieser Automorphismen zu diskutieren, verwenden wir eine Methode, die wohl von *A. Weil*<sup>8)</sup> zum erstenmal angegeben wurde und auch von *H. Hopf* und *H. Samelson*<sup>9)</sup> benutzt wird: Wir

<sup>7)</sup> Dies folgt aus dem Approximationssatz von Kronecker, man vgl. etwa (6).

<sup>8)</sup> (10).

<sup>9)</sup> (5).

fassen jede Nebengruppe  $xT_0$  von  $T_0$  in  $G$  als Punkt  $X$  eines Raumes  $W$  auf, der auf natürliche Weise vermittelst des Umgebungs begriffes in  $G$  zu einem topologischen Raum gemacht wird. Der Raum  $W$  ist dann wie  $G$  geschlossen. Dem Einselement  $e$  von  $G$  entspricht ein spezieller Punkt  $E$  von  $W$ . Vermöge der Definition

$$f_a(X) = (ax)T_0$$

gehört zu jedem Gruppenelement  $a$  eine Transformation  $f_a$  von  $W$  in sich;  $G$  ist also Transformationsgruppe des *Wirkungsraumes*  $W$ . Die „Isotropiegruppe“ von  $W$  besteht definitionsgemäß aus den Elementen  $a$ , für welche gilt

$$f_a(E) = E ;$$

sie ist mit  $T_0$  identisch. Aus der Tatsache, daß  $T_0$  zusammenhängend ist, schließt man leicht, daß  $W$  ein *orientierbarer Raum* ist.

Man kann nun jeder Operation  $\varphi$  der Gruppe  $\Phi$  eindeutig einen Punkt von  $W$  zuordnen gemäß folgender Vorschrift: Es sei  $\varphi = \varphi_a$ , dann soll der zugeordnete Punkt die Nebengruppe  $A = aT_0$  sein. Es ist zu zeigen, daß  $A$  nicht von der Wahl von  $a$  abhängt. Sei also

$$\varphi_a = \varphi_b \quad \text{oder} \quad a^{-1}ta = b^{-1}tb \quad \text{für alle } t \in T_0 .$$

Das Element  $ba^{-1}$  ist also mit allen Elementen von  $T_0$  vertauschbar und gehört daher nach Satz 2 zu  $T_0$ . Die beiden Elemente  $a$  und  $b$  gehören also in der Tat derselben Nebengruppe an.

Ist  $M$  die Bildmenge von  $\Phi$  bei dieser Zuordnung, so ist  $\Phi$  ein-eindeutig auf  $M$  abgebildet. Es gilt nun:

**Satz 4:** *Sei  $t_0$  ein erzeugendes Element von  $T_0$ . Dann ist  $M$  identisch mit der Menge der Fixpunkte der Abbildung  $f_{t_0}$  von  $W$  in sich.*

**Beweis a).** Sei wieder  $\varphi = \varphi_a$  und

$$\varphi(t_0) = t'_0, \quad \text{also} \quad a^{-1}t_0a = t'_0 .$$

Somit:

$$f_{t_0}(A) = t_0aT_0 = aT_0 = A ,$$

$A$  ist also Fixpunkt.

b) Sei  $A$  Fixpunkt und  $a$  ein Element aus dieser Nebenklasse. Aus  $f_{t_0}(A) = A$  folgt

$$t_0aT_0 = aT_0 \quad \text{oder} \quad a^{-1}t_0a \in T_0 .$$

Da  $t_0$  erzeugendes Element von  $T_0$  ist, gilt die letzte Relation nicht nur für  $t_0$ , sondern für alle Elemente von  $T_0$  und daher läßt der zu  $a$  gehörige Automorphismus von  $G$  das Toroid  $T_0$  invariant.

Wir werden den jetzt bewiesenen Satz 4 später verwenden, um mit Hilfe der Fixpunktsätze der Topologie die Existenz gewisser Transformation in  $\Phi$  herzuleiten.

3. In einer genügend kleinen Umgebung  $U(e)$  der Einheit  $e$  von  $G$  lassen sich *kanonische Koordinaten* (erster Art) einführen<sup>10)</sup>. Ist  $n$  die Dimension von  $G$  und  $\xi$  ein Element von  $U(e)$ , so seien seine Koordinaten  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ . Der innere Automorphismus

$$x \rightarrow a^{-1}xa \quad (1)$$

ist für Elemente aus  $U(e)$  eine lineare Transformation:

$$(a^{-1} \xi a)_i = \sum_{k=1}^n s_{ik} \xi_k . \quad (2)$$

Ihre Matrix sei:

$$S_a = (s_{ik}) .$$

Die Matrizen  $S_a$  ergeben eine Darstellung unserer Gruppe durch lineare Transformationen, die **adjungierte Darstellung**, oder nach *Lie* die adjungierte lineare Gruppe. Da  $G$  eine geschlossene kompakte Gruppe ist, können wir nach einem bekannten Satz von *H. Weyl*<sup>11)</sup> das Koordinatensystem so wählen, daß sämtliche Matrizen  $S_a$  *orthogonal* werden.

Jetzt betrachten wir wieder unser maximales Toroid  $T_0$  von der Dimension  $l$ . Der Durchschnitt von  $T_0$  mit  $U(e)$  ist durch lineare Gleichungen in  $\xi_1, \dots, \xi_n$  gegeben, also kurz gesagt ein Stück einer  $l$ -dimensionalen Ebene  $R^l$ ; die Gruppenmultiplikation in diesem Durchschnitt ist die Vektoraddition in  $R^l$ . Durch eine orthogonale Koordinatentransformation können wir erreichen, daß die  $l$  ersten Grundvektoren unseres Koordinatensystems in  $R^l$  zu liegen kommen. Ist  $t$  ein Element von  $T_0$ , so läßt der zugehörige Automorphismus jedes Element von  $T_0$  fest, und daher muß die lineare Transformation  $S_t$  jeden Punkt von  $R^l$  fest lassen. Sie hat daher die Gestalt

$$S_t = \begin{pmatrix} E_l & 0 \\ 0 & S'_t \end{pmatrix} , \quad (3)$$

wo  $E_l$  die  $l$ -reihige Einheitsmatrix bedeutet. Die  $(n-l)$ -reihigen Matrizen

---

<sup>10)</sup> (7), speziell Kapitel VI.

<sup>11)</sup> (7), Seite 110.

$S'_t$  sind alle miteinander vertauschbar; wir können also durch eine orthogonale Koordinatentransformation (welche die  $l$  ersten Grundvektoren nicht ändert) erreichen, daß alle  $S'_t$  die bei orthogonalen Matrizen übliche Diagonalgestalt haben, also je nachdem ob  $(n-l)$  gerade oder ungerade ist:

$$S_t = \begin{pmatrix} E_t & & & \\ & D_1 & & 0 \\ & & D_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & D_m \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad S_t = \begin{pmatrix} E_t & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & D_1 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & D_m \end{pmatrix}, \quad (4)$$

dabei bedeutet  $D_j$  ein Kästchen von der Form

$$D_j = \begin{pmatrix} \cos \vartheta_j(t) & -\sin \vartheta_j(t) \\ \sin \vartheta_j(t) & \cos \vartheta_j(t) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Die Annahme  $(n-l)$  ungerade führt aber sofort auf einen Widerspruch. Denn dann würde gemäß (4) die lineare Transformation  $S_t$  einen Punkt  $\xi$ , welcher in  $U(e)$  auf der  $(l+1)$ -ten Koordinatenachse liegt, fest lassen;  $\xi$  wäre also mit allen Elementen von  $T_0$  vertauschbar und würde nach Satz 2 auf  $T_0$  liegen, was nicht der Fall ist. Es ist daher  $(n-l)$  immer gerade:

$$n - l = 2m. \quad (6)$$

Aus demselben Grund kann keine der Funktionen  $\vartheta_j(t)$  identisch verschwinden, da sonst wieder in der Hauptdiagonalen von  $S_t$  unterhalb  $E_t$  die Zahl 1 auftreten würde.

Die Winkelfunktionen  $\vartheta_j(t)$  sind natürlich nur  $(\text{mod } 1)$  bestimmt; wir können sie aber in  $U(e)$  eindeutig machen, wenn wir verlangen, daß sie stetig sind und für  $t = e$  verschwinden. Sind  $\tau$  und  $\tau'$  zwei Elemente auf  $T_0$  und in  $U(e)$ , so hat  $(\tau\tau')$  die Koordinaten  $(\tau_i + \tau'_i)$  und da für ein festes  $j$  die Matrizen  $D_j$  eine Darstellung von  $T_0$  bilden, folgt:

$$\vartheta_j(\tau_1 + \tau'_1, \dots, \tau_l + \tau'_l) = \vartheta_j(\tau_1, \dots, \tau_l) + \vartheta_j(\tau'_1, \dots, \tau'_l).$$

Daher ist  $\vartheta_j(\tau)$  eine *Linearform* in den Koordinaten von  $\tau$ . Wir werden später sehen, daß die  $2m$  Linearformen  $\pm i\vartheta_j(\tau)$  die *Wurzeln* der Gruppe  $G$  im Sinne der Lie'schen Theorie sind.

Wie in Nr. 1 sei jetzt  $N_t$  der Normalisator des Elements  $t$  aus  $T_0$ . Seine Elemente  $\xi$ , welche in  $U(e)$  liegen, sind dadurch charakterisiert, daß sie bei der linearen Transformation  $S_t$  fest bleiben; mit anderen

Worten: die Dimension von  $N_t$  ist gleich der Dimension der Ebene der Fixpunkte von  $S_t$ ; letztere ist aber die Vielfachheit des Eigenwertes (+ 1) der Matrix  $S_t$ . Wir finden daher zunächst unter Berücksichtigung von (4):

**Satz 5:** *Sind für ein spezielles Element  $t \in T_0$  genau  $\nu$  der Funktionen  $\vartheta_j(t) \equiv 0 \pmod{1}$ , so ist die Dimension des Normalisators  $N_t$  gleich  $(l + 2\nu)$ .*

Daraus und aus Satz 3 folgt noch:

**Korollar:** *Das Element  $t \in T_0$  ist dann und nur dann singulär, wenn für mindestens ein  $j$  gilt  $\vartheta_j(t) \equiv 0 \pmod{1}$ , d. h. wenn  $\nu \geq 1$  ist. Die Zahl  $\nu$  nennen wir auch die **Ordnung** des singulären Elements  $t$ .*

Ist  $\varphi_a$  eine Transformation von  $\Phi$ , lässt also der Automorphismus

$$x \rightarrow a^{-1} x a$$

$T_0$  invariant, so ergibt  $S_a$  eine orthogonale Transformation  $\varphi_a^*$  der Ebene  $R^l$  in sich. Offenbar ist die Zuordnung

$$\varphi_a \rightarrow \varphi_a^*$$

eine (einstufig) isomorphe Abbildung von  $\Phi$  auf eine Gruppe  $\Phi^*$  von orthogonalen Transformationen in  $R^l$ . Kurz gesagt ist  $\varphi_a^*$  die Transformation, welche durch  $\varphi_a$  in der „Tangentialebene“  $R^l$  induziert wird. Die Transformationen  $\varphi_a$  lassen das Einselement  $e$  fest und daher die Bewegungen  $\varphi_a^*$  den Nullpunkt unseres kanonischen Koordinatensystems.  $\Phi^*$  ist daher eine Gruppe von Drehungen und vielleicht Drehspiegelungen in  $R^l$ .

**4.**  $R^l$  selbst kann als Abel'sche Gruppe aufgefaßt werden, wenn man die Vektoraddition als Gruppenkomposition nimmt. Da die beiden Gruppen  $R^l$  und  $T_0$  in  $U(e)$  übereinstimmen, ist  $R^l$  Überlagerungsgruppe von  $T_0$ ; es existiert also eine natürliche homomorphe Abbildung von  $R^l$  auf  $T_0$ . Der Kern dieses Homomorphismus, d. h. das Urbild von  $e$ , ist eine diskrete Untergruppe von  $R^l$ , also ein  $l$ -dimensionales Punktgitter  $g^l$ .

Die Gruppe  $\Phi^*$  muß dieses Gitter invariant lassen und ist somit als Gruppe von Symmetrien eines Gitters eine endliche Gruppe. Somit ist auch  $\Phi$  *endliche Gruppe*.

Ist  $\tau$  ein Punkt in  $R^l$ , so sind also die Werte der Linearformen  $\vartheta_j(\tau)$  erklärt; es sei  $t$  das Element von  $T_0$ , welches zu  $\tau$  gehört, dann gilt:

$$\vartheta_j(\tau) \equiv \vartheta_j(t) \pmod{1}, \quad 1 \leq j \leq m, \quad (7)$$

es gehören also nach dem Korollar zu Satz 5 genau diejenigen Punkte  $\tau$  zu singulären Elementen von  $T_0$ , für die mindestens eine der Linearformen z. B.  $\vartheta_1(\tau) \equiv 0 \pmod{1}$  wird.

Nach Nr. 3 ist  $\vartheta_1(\tau)$  nicht identisch Null und daher gibt die Bedingung  $\vartheta_1(\tau) \equiv 0 \pmod{1}$  eine Schar  $\sigma_1$  von  $(l-1)$ -dimensionalen Ebenen im  $R^l$ :

$$\sigma_1: \quad \vartheta_1(\tau) = c,$$

wobei  $c$  alle ganzen Zahlen durchläuft. Die Ebenen der Schar sind parallel und folgen sich in gleichen Abständen, wir nennen sie **singuläre Ebenen**. Im ganzen ergeben sich  $m$  Scharen  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$  singulärer Ebenen; sie bilden das **Diagramm**<sup>12)</sup> von  $G$ .

$t$  ist also dann und nur dann singuläres Element von  $T_0$ , wenn  $\tau$  auf einer singulären Ebene liegt.

Jede Operation  $\varphi$  von  $\Phi$  führt reguläre Elemente von  $T_0$  in reguläre und singuläre in singuläre über. Dies folgt einfach daraus, daß  $\varphi$  die Wirkung eines inneren Automorphismus von  $G$  auf  $T_0$  ist. *Daher muß die Gruppe  $\Phi^*$  das Diagramm invariant lassen.*

Im folgenden brauchen wir noch einige Eigenschaften der singulären Ebenen, die sich am leichtesten beweisen lassen, wenn man zu dem Koordinatensystem in  $R^l$  übergeht, dessen Grundvektoren primitive Vektoren des Gitters  $g^l$  sind. Sei also für den Rest dieser Nr. 4 dieses Koordinatensystem zugrunde gelegt. Dann ist z. B. nach der Gleichung (7):

$$\vartheta_j(1, 0, 0, \dots, 0) \equiv 0 \pmod{1},$$

denn der Punkt  $(1, 0, 0, \dots, 0)$  gehört zum Element  $e$  von  $T_0$ . Daraus folgt, daß die Linearformen  $\vartheta_j(\tau)$  im neuen Koordinatensystem ganzzahlige Koeffizienten haben, also etwa

$$\vartheta_1(\tau) = n_1 \tau_1 + n_2 \tau_2 + \dots + n_l \tau_l.$$

$d$  sei der größte gemeinsame Teiler von  $n_1, \dots, n_l$  und  $p_1, \dots, p_l$  ganze Zahlen, so daß

$$p_1 n_1 + \dots + p_l n_l = d$$

ist. Die Ebene  $\alpha^0$  aus der Schar  $\sigma_1$ , welche durch den Nullpunkt läuft, ist als Ebene mit ganzzahligem Gleichung eine Gitterebene des Gitters  $g^l$ , trägt also ein Teilgitter  $g^{l-1}$  von  $g^l$ . Auf  $g^{l-1}$  wenden wir den Kronecker'schen Approximationssatz an. Es existiert also in  $\alpha^0$  ein Element  $\tau(\tau_1, \dots, \tau_l)$ , dessen Potenzen<sup>13)</sup> und die zu ihnen  $(\bmod g^{l-1})$  äquivalenten Punkte die Ebene  $\alpha^0$  überall dicht ausfüllen.

<sup>12)</sup> Dieses Diagramm wird auch von *E. Cartan* gelegentlich zur Untersuchung der Topologie von  $G$  verwendet. (Vgl. *E. Cartan*: La géométrie des groupes simples, Annali di Matematica, serie IV, t. 4, p. 209.)

<sup>13)</sup> Die Multiplikation ist die Vektoraddition.

Jetzt führen wir noch das Element

$$\tau' \left( \frac{\tau_1 + p_1}{d}, \dots, \frac{\tau_l + p_l}{d} \right)$$

ein. Es liegt auf derjenigen Ebene  $\alpha^1$  der Schar  $\sigma_1$ , welche dem Nullpunkt am nächsten liegt und ist erzeugendes Element der ganzen Schar  $\sigma_1$  in dem Sinne, daß seine Potenzen und die zu ihnen  $(\bmod g^l)$  äquivalenten Punkte die Schar  $\sigma_1$  überall dicht ausfüllen.

5. Die Gruppe  $\Phi$  wurde als endlich erkannt. Nun haben wir in Nr. 2 einen gewissen Wirkungsraum  $W$  eingeführt und in Satz 4 erkannt, daß die Transformationen von  $\Phi$  ein-eindeutig auf eine Menge  $M$  in  $W$  abgebildet werden können. Dabei war  $M$  die Fixpunktmenge der Abbildung  $f_{t_0}$  von  $W$  in sich und  $t_0$  erzeugendes Element von  $T_0$ . Daher ist  $M$  endlich und somit hat  $f_{t_0}$  nur isolierte Fixpunkte. Alle haben denselben Index<sup>14)</sup>, und zwar  $(-1)^w$ , wenn  $w$  die Dimension von  $W$  ist. Da  $t_0$  stetig in  $e$  und also  $f_{t_0}$  stetig in die Identität überführbar ist, muß die Anzahl der Fixpunkte gleich der Euler'schen Charakteristik von  $W$  sein.

*Daher ist die Ordnung von  $\Phi$  gleich der Euler'schen Charakteristik von  $W$ . (Diese ist also immer positiv.)*

Dies verwenden wir zum Beweis von

**Satz 6:** *Ist  $t$  singuläres Element von  $T_0$  von der Ordnung 1, so gibt es eine Transformation in  $\Phi$ , welche  $t$  fest lässt, aber nicht die Identität ist.*

Um dies einzusehen, wenden wir das eben erhaltene Resultat nicht auf die ganze Gruppe  $G$  an, sondern auf die  $e$ -Komponente  $N'_t$  des Normalisators  $N_t$  von  $t$  (vgl. Nr. 1). Diesen Übergang deuten wir durch Überstreichen aller Bezeichnungen an.

$t$  hat die Ordnung  $\nu = 1$ , deshalb ist gemäß Satz 5 die Gruppe  $N'_t$  genau  $(l + 2)$ -dimensional, also hat  $\overline{W}$  die Dimension 2. Da  $\overline{W}$  orientierbar ist (Nr. 2) und positive Euler'sche Charakteristik hat, ist  $\overline{W}$  eine Sphäre und daher die Euler'sche Charakteristik 2. Die Ordnung der Gruppe  $\overline{\Phi}$  ist somit 2. Jede Operation von  $\overline{\Phi}$  lässt aber  $t$  fest; damit ist Satz 6 bewiesen.

Von Satz 6 gilt folgende Umkehrung:

**Satz 7:** *Bleibt der Punkt  $\tau$  von  $R^l$  ungeändert bei einer Transformation  $\varphi_a^*$  von  $\Phi^*$ , die nicht die Identität ist, so liegt  $\tau$  auf einer singulären Ebene, welche durch den Nullpunkt läuft.*

---

<sup>14)</sup> Man vgl. etwa (5), Seite 241, Hilfssatz 1.

Beweis:  $\varphi_a^*$  ist eine Drehung oder Spiegelung, läßt also die ganze Gerade  $h$  durch den Nullpunkt und  $\tau$  punktweise fest. Dieser Geraden entspricht in  $T_0$  eine einparametrische Untergruppe  $H$  und  $a$  ist mit allen Elementen von  $H$  vertauschbar. Es sei  $T$  das von  $H$  erzeugte Toroid (Nr. 1). Nun ist  $a$  mit allen Elementen von  $T$  vertauschbar und daher existiert nach Satz 1 ein weiteres Toroid  $T'$ , welches  $a$  und  $T$  enthält.  $a$  liegt nicht auf  $T_0$ , denn  $\varphi_a$  ist nicht die Identität. Daher ist auch  $T'$  nicht in  $T_0$  enthalten.

Jedes Element von  $H$  liegt also auf dem Toroid  $T'$ , das nicht in  $T_0$  enthalten ist; demgemäß ist jedes Element von  $H$  singulär nach der ursprünglichen Definition von Nr. 1. Also muß  $h$  in einer singulären Ebene liegen, was zu zeigen war.

6. Ein Element  $z$  des Zentrums  $Z$  ist mit allen Elementen von  $G$  vertauschbar, liegt also nach Satz 2 auf  $T_0$ . Daher ist  $Z$  Untergruppe von  $T_0$ . Da der zu  $z$  gehörige innere Automorphismus die Identität ist, muß  $S_z$  die Einheitsmatrix sein. Also müssen alle Funktionen  $\vartheta_j(z) \equiv 0$  ( $\bmod 1$ ) sein. Die Elemente des Zentrums  $Z$  sind also die singulären Elemente von der maximal möglichen Ordnung  $m$ .

Der Untergruppe  $Z$  von  $T_0$  entspricht in der Überlagerungsgruppe  $R^l$  eine Abel'sche Untergruppe  $g_Z^l$  von  $R^l$ . Offenbar ist  $g_Z^l$  der Durchschnitt der Ebenenscharen  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ . Das am Anfang von Nr. 4 eingeführte Gitter  $g^l$ , welches die Einheit  $e$  von  $G$  darstellt, ist natürlich in  $g_Z^l$  enthalten.

7. Jetzt wollen wir voraussetzen, daß die gegebene Lie'sche Gruppe halbeinfach sei. Das Zentrum  $Z$  ist also diskret und dasselbe gilt von  $g_Z^l$ . Daher ist  $g_Z^l$  ein  $l$ -dimensionales Gitter im Raum  $R^l$ . Es besteht aus den **Knotenpunkten** des Diagramms, d. h. aus denjenigen Punkten, durch welche  $m$  Ebenen des Diagramms laufen.

Die  $m$  durch den Nullpunkt laufenden singulären Ebenen dürfen demnach nur diesen Nullpunkt gemeinsam haben, befinden sich also in allgemeiner Lage. Wir finden demnach das Resultat:

**Satz 8:** Ist  $G$  halbeinfach, so gibt es unter den Linearformen  $\vartheta_j(\tau)$  genau  $l$  linear unabhängige.

Daraus folgt noch  $m \geq l$ ,  $n = l + 2m \geq 3l$ .

Daher gibt es keine 2-dimensionale halbeinfache Gruppe. Ferner müssen wir hier die Tatsache vorwegnehmen, daß niemals zwei der  $2m$  Wurzeln  $\pm i\vartheta_j(\tau)$  identisch sind, d. h. daß niemals zwei der Scharen  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$

ganz zusammenfallen können. Wir werden dies in § 4 mit Hilfe der Lie'schen Theorie erkennen \*).

Sei nun  $\alpha^0$  eine singuläre Ebene durch den Nullpunkt. Es wird vielleicht mehrere Scharen unter den  $\sigma$ , geben, die diese Ebene enthalten; es seien dies etwa die Scharen  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ . Sämtliche in diesen Scharen enthaltene Ebenen bilden ein System paralleler Ebenen und  $\alpha^1$  sei diejenige unter ihnen, welche dem Nullpunkt am nächsten liegt (aber nicht durch ihn läuft); sie gehöre etwa der Schar  $\sigma_1$  an. Nun kann  $\alpha^1$  in keiner weiteren Schar  $\sigma_j$  ( $2 \leq j \leq l$ ) enthalten sein, da sonst  $\sigma_1$  und  $\sigma_j$  ganz zusammenfallen würden.

Ein erzeugendes Element  $\tau'$  der Schar  $\sigma_1$  (Nr. 4) liegt auf  $\alpha^1$ . Würde  $\tau'$  noch einer anderen Schar  $\sigma_j$  ( $2 \leq j \leq l$ ) angehören, so müßte auch  $\alpha^1$  in  $\sigma_j$  liegen, was wir eben vermieden haben. Somit hat das zu  $\tau'$  gehörige Element  $t' \in T_0$  als singuläres Element genau die Ordnung 1; nach Satz 6 existiert in  $\Phi$  eine Transformation  $\varphi$ , welche  $t'$  fest läßt und daher gibt es in der euklidischen Gruppe  $\Phi^*$  eine Transformation  $\varphi^*$ , welche  $\tau'$  in einen  $(\text{mod } g^l)$  äquivalenten Punkt überführt, ohne die Identität zu sein. Da  $\tau'$  erzeugendes Element der Schar  $\sigma_1$  ist, überträgt sich diese Eigenschaft auf alle Punkte von  $\sigma_1$ , speziell auf die Punkte von  $\alpha^0$ . Da aber  $\varphi^*$  den Nullpunkt fest läßt, muß jeder Punkt von  $\alpha^0$  sogar fest bleiben; daher ist  $\varphi^*$  die Spiegelung an  $\alpha^0$ . Wir erhalten daraus zunächst das Resultat:

**Satz 9:** *Die Gruppe  $\Phi^*$  enthält die Spiegelungen an den singulären Ebenen, welche durch den Nullpunkt laufen.*

Nun sei  $\alpha$  eine beliebige Ebene aus der Schar  $\sigma_1$ . Wir haben eben gesehen, daß die Spiegelung an  $\alpha^0$  jeden Punkt von  $\alpha$  in einen  $(\text{mod } g^l)$  äquivalenten Punkt überführt. Somit ergibt die Zusammensetzung der Spiegelung an  $\alpha$  mit der Spiegelung an  $\alpha^0$  eine Translation des Gitters  $g^l$ ; also läßt die Spiegelung an  $\alpha$  wie diejenige an  $\alpha^0$  das Gitter  $g^l$  und das Diagramm invariant.

Daraus folgt nun aber, daß  $\sigma_1$  überhaupt jede singuläre Ebene  $\beta$  enthält, welche parallel zur gewählten Ebene  $\alpha^0$  ist, d. h. daß die oben eingeführten Scharen  $\sigma_2, \dots, \sigma_k$  ganz in  $\sigma_1$  enthalten sind. In der Tat kann  $\beta$  durch sukzessive Spiegelungen an den Ebenen von  $\sigma_1$  in eine Ebene  $\beta'$  übergeführt werden, welche zwischen  $\alpha^0$  und  $\alpha^1$  hindurch läuft.  $\beta'$  ist

---

\*) In dieser Nr. 7 werden zweimal Sätze der Lie'schen Theorie benutzt. Wie mir Herr Prof. H. Hopf mitteilt, ist es ihm gelungen, diese Sätze unter Vermeidung der Lie'schen Theorie ebenfalls durch Schlußweisen „im Großen“ zu beweisen. Seine Untersuchungen erscheinen demnächst in dieser Zeitschrift.

ebenfalls singuläre Ebene und muß daher wegen der Minimaleigenschaft von  $\alpha^1$  mit  $\alpha^0$  oder  $\alpha^1$  zusammenfallen. Daher folgt:

**Satz 10:** *Die Spiegelungen an den Ebenen des Diagramms lassen das Gitter  $g^l$  und das Diagramm selbst invariant.*

Die Scharen  $\sigma_2, \dots, \sigma_k$  sind in  $\sigma_1$  enthalten, also ist z. B. die Linearform  $\vartheta_1(\tau)$  ein ganzzahliges Vielfaches von  $\vartheta_2(\tau)$ :

$$\vartheta_1(\tau) = C \vartheta_2(\tau) .$$

Mit Hilfe der Lie'schen Theorie (§ 4) kann man aber zeigen, daß eine solche Relation bei halbeinfachen Gruppen nie auftreten kann. Infolgedessen ist jede Ebene unseres Diagramms in genau einer der Scharen  $\sigma_j$  enthalten, oder mit anderen Worten: Je zwei der Linearformen  $\vartheta_j(\tau)$  sind linear unabhängig und das Diagramm bestimmt als geometrische Figur die Linearformen  $\vartheta_j(\tau)$  eindeutig (abgesehen von einer linearen Koordinatentransformation).

**8.** Jetzt bilden wir die von den Spiegelungen an den Ebenen des Diagramms erzeugte Gruppe  $\Gamma$ . Gemäß Satz 10 läßt  $\Gamma$  das Gitter  $g^l$  invariant, ist also eine diskontinuierliche Bewegungsgruppe des Raumes  $R^l$ . Da wir nach Satz 8 unter den Spiegelungsebenen  $l$  linear unabhängige haben, enthält die Untergruppe  $\gamma$  der Translationen von  $\Gamma$  sicher  $l$  linear unabhängige Translationen, und daher ist  $\Gamma$  eine Raumgruppe des Raumes  $R^l$  im Sinne der Kristallographie.  $\Gamma$  führt das Gitter  $g^l$  in sich über und demnach ist  $\gamma$  eine Untergruppe der Translationengruppe von  $g^l$ . Bezeichnen wir noch das Gitter, das durch Ausüben von  $\gamma$  auf den Nullpunkt entsteht, mit  $\gamma^l$ , so ist  $\gamma^l$  in  $g^l$  enthalten.

$\gamma$  ist Normalteiler von  $\Gamma$ . Daraus folgt leicht, daß die Spiegelung an einer singulären Ebene durch den Nullpunkt das Gitter  $\gamma^l$  invariant läßt. Andererseits kann die Spiegelung an irgend einer singulären Ebene zusammengesetzt werden aus der Spiegelung an einer singulären Ebene durch den Nullpunkt und einer Translation von  $\gamma$ . Daher läßt die Gruppe  $\Gamma$  das Gitter  $\gamma^l$  invariant, und  $\gamma^l$  kann somit auch definiert werden als die Menge der Punkte, welche durch die Transformationen von  $\Gamma$  aus dem Nullpunkt entstehen.

**9. Zusammenfassend<sup>15)</sup>** ergeben sich also unter Berücksichtigung von Nr. 6 folgende **Grundeigenschaften des Diagramms:**

---

<sup>15)</sup> Man vgl. auch die Figuren.

- a) Das Diagramm besteht aus  $m$  Scharen paralleler äquidistanter Ebenen in einem  $l$ -dimensionalen Raum  $R^l$ . Zwei Scharen haben keine Ebene gemeinsam.
- b) Die Knotenpunkte (Schnittpunkte von  $m$  Ebenen des Diagramms) bilden ein Gitter  $g_{\mathbb{Z}}^l$ .
- c) Die Spiegelungen an den Ebenen des Diagramms erzeugen eine diskontinuierliche Raumgruppe  $\Gamma$ , welche das Diagramm invariant lässt. Die Untergruppe von  $\Gamma$ , welche einen Knotenpunkt fest lässt, ist eine endliche Gruppe  $\Psi$ , welche die „Kristallklasse“ von  $\Gamma$  angibt.
- d) Übt man  $\Gamma$  auf einen Knotenpunkt aus, so entsteht ein Gitter  $\gamma^l$ , welches in  $g_{\mathbb{Z}}^l$  enthalten ist. Die Translationen dieses Gitters bilden die Translationsuntergruppe  $\gamma$  von  $\Gamma$ . Die Gruppe  $\Gamma$  wird von  $\Psi$  und  $\gamma$  erzeugt.

Die Beziehungen zwischen einer halbeinfachen Lie'schen Gruppe und ihrem Diagramm können wie folgt formuliert werden:

- e) Der Raum  $R^l$  ist universelle Überlagerungsgruppe eines maximalen Toroids  $T_0$  aus  $G$ , wenn als Gruppenkomposition in  $R^l$  die Vektoraddition genommen wird. Die Dimension von  $G$  beträgt  $n = l + 2m$ .
- f) Dabei entspricht dem Zentrum von  $G$  das Gitter  $g_{\mathbb{Z}}^l$  und dem Einselement von  $G$  ein Gitter  $g^l$  (Einheitsgitter), welches in  $g_{\mathbb{Z}}^l$  enthalten ist, aber  $\gamma^l$  enthält. Die Gruppe  $\Gamma$  lässt  $g^l$  invariant.
- g) Die Punkte auf den Ebenen des Diagramms gehen aus denjenigen Elementen von  $T_0$  hervor, deren Normalisatoren in  $G$  höhere Dimension als  $l$  (= Dimension von  $T_0$ ) besitzen.
- h) Es sei  $\tau_1, \dots, \tau_l$  ein Koordinatensystem im  $R^l$ , welches seinen Nullpunkt in einem Knotenpunkt hat, und die Gleichung der  $j$ -ten Schar von Ebenen des Diagramms laute

$$\vartheta_j(\tau_1, \dots, \tau_l) = c ,$$

wobei  $c$  alle ganzen Zahlen durchläuft. Dann sind die  $2m$  Linearformen  $\pm i\vartheta_j(\tau)$  die Wurzeln der Gruppe  $G$ .

10. Der Satz 9 kann noch verschärft werden. Es zeigt sich nämlich, daß  $\Phi^*$  sogar von den im Satz genannten Spiegelungen erzeugt wird. Mit der Bezeichnung von Nr. 9c ist also  $\Psi = \Phi^*$  und wir können unseren Eigenschaften die folgende hinzufügen:

- i) Bei der natürlichen homomorphen Abbildung von  $R^l$  auf  $T_0$  geht die Gruppe  $\Gamma$  in die Gruppe  $\Phi$  über; letztere besteht aus den Automorphismen des Toroids  $T_0$ , welche durch innere Automorphismen von  $G$  bewirkt werden.

Zum Beweis betrachten wir die singulären Ebenen  $\alpha_1^0, \dots, \alpha_m^0$  durch den Nullpunkt sowie die Oberfläche  $S^{l-1}$  einer kleinen Kugel mit dem Mittelpunkt im Nullpunkt. Die Ebenen  $\alpha_1^0, \dots, \alpha_m^0$  teilen diese Oberfläche in endlich viele Bereiche  $B_k$  ein und die Gruppe  $\Phi^*$  permutiert diese Bereiche unter sich. Dasselbe gilt nach Satz 9 von den Spiegelungen an  $\alpha_1^0, \dots, \alpha_m^0$  und von der durch diese Spiegelungen erzeugten Gruppe  $\Psi$ . Überdies aber vertauscht die Gruppe  $\Psi$  die Bereiche  $B_k$  transitiv. Unsere Behauptung wird daher bewiesen sein, wenn wir zeigen können, daß eine Transformation  $\varphi^*$  von  $\Phi^*$ , welche einen der Bereiche (etwa  $B_1$ ) in sich überführt, die Identität ist. Dies aber folgt daraus, daß  $\varphi^*$  als euklidische Abbildung von  $B_1$  in sich einen Fixpunkt  $\tau$  im Inneren von  $B_1$  haben muß. (Zum Beweis führe man den Schwerpunkt der Ecken von  $B_1$  ein.) Nach Satz 7 kann dies nur der Fall sein, wenn  $\varphi^*$  die Identität ist, da  $\tau$  nicht auf einer singulären Ebene durch den Nullpunkt liegt. Aus diesem Beweis merken wir uns für später:

**Satz 11:** *Die (unbeschränkten) Bereiche, in welche die Ebenen des Diagramms durch den Nullpunkt den Raum  $R^l$  einteilen, sind Fundamentalbereiche der Gruppe  $\Psi$ ; speziell ist eine Transformation von  $\Psi$ , welche einen der Bereiche in sich überführt, die Identität.*

### § 3. Die Diagramme der vier Cartan'schen Klassen.

Mit Hilfe der Resultate des § 2, welche in Nr. 9 und 10 zusammengestellt sind, ist die Bestimmung des Diagramms einer vorgelegten geschlossenen halbeinfachen Lie'schen Gruppe leicht durchzuführen. Es soll dies für die vier Klassen der Cartan'schen Aufzählung gezeigt werden.

1. Die Gruppe  $D_l$  besteht aus allen  $2l$ -reihigen orthogonalen Matrizen von der Determinante (+ 1). Wir betrachten in  $D_l$  alle Matrizen von der Gestalt

$$t = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_l \end{pmatrix}, \quad (1)$$

wobei  $A_i$  eine zweireihige Drehmatrix ist:

$$A_j = \begin{pmatrix} \cos \tau_j & -\sin \tau_j \\ \sin \tau_j & \cos \tau_j \end{pmatrix} . \quad (2)$$

Lassen wir  $\tau_1, \dots, \tau_l$  unabhängig variieren, so bilden alle Matrizen  $t$  ein  $l$ -dimensionales Toroid  $T_0$ . Es lassen sich ohne große Mühe folgende Eigenschaften des Normalisators  $N_t$  von  $t$  in  $D_l$  bestätigen:

- a) Hat  $t$  keine mehrfachen Eigenwerte, so fällt  $N_t$  mit  $T_0$  zusammen.  
Daraus folgt, daß  $T_0$  maximales Toroid ist.
- b) Die Dimension von  $N_t$  ist dann und nur dann  $> l$ , wenn es zwei Indizes  $\mu \neq \nu$  gibt, so daß

$$\tau_\mu \equiv \tau_\nu \quad \text{oder} \quad \tau_\mu \equiv -\tau_\nu \pmod{1}$$

ist. (Es bewirkt z. B.  $\tau_1 \equiv -\tau_1 \pmod{1}$  wohl ein Zusammenfallen von zwei Eigenwerten, aber keine Dimensionserhöhung von  $N_t$ .)

Daher lauten die Gleichungen der Ebenen des Diagramms:

$$\tau_\mu \equiv \pm \tau_\nu \pmod{1}, \quad \mu \neq \nu . \quad (3)$$

Die Diagrammebenen durch den Nullpunkt können aufgefaßt werden als Diagonalebenen eines Würfels im  $R^l$ . Somit ist

$$m = 2 \binom{l}{2} = l(l-1) , \quad n = l(2l-1) . \quad (4)$$

Die Wurzeln der Gruppe sind die  $2l(l-1)$  Linearformen

$$\pm i(\tau_\mu \pm \tau_\nu) .$$

Die Gruppe  $\Psi$  wird also erzeugt durch die Spiegelungen an den Diagonalebenen eines Würfels im  $R^l$ ; sie hat die Ordnung  $2^{l-1}l!$  und besteht aus den monomialen Substitutionen

$$\tau'_j = \varepsilon_j \tau_{k(j)} , \quad \varepsilon_j = \pm 1 , \quad (5)$$

wobei aber unter den  $\varepsilon_j$  die negativen nur in gerader Anzahl auftreten können;  $k(j)$  ist eine beliebige Permutation der Indizes.

2. Die Gruppe  $B_l$  besteht aus allen  $(2l+1)$ -reihigen orthogonalen Matrizen und wird analog diskutiert wie  $D_l$ . Man erhält:

$$m = l^2, \quad n = l(2l+1) .$$

Ebenen des Diagramms:

und  $\tau_\mu \pm \tau_\nu \equiv 0 \pmod{1} , \quad \mu \neq \nu , \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, l$

$$\tau_j \equiv 0 \pmod{1} , \quad j = 1, 2, \dots, l .$$

Hier sind also die Mittelebenen des oben genannten Würfels hinzgetreten. Die Gruppe  $\Psi$  ist die volle Symmetriegruppe des Würfels und besteht aus allen Substitutionen von der Form (5), wobei die  $\varepsilon$ , jetzt aber an keine Nebenbedingung gebunden sind. Ihre Ordnung ist  $2^l l!$

3. Die Gruppe  $C_l$  besteht aus allen  $l$ -reihigen Matrizen  $x$ , deren Elemente Quaternionen sind und welche die Orthogonalitätsrelation erfüllen:

$$x^{-1} = \bar{x}' ,$$

wobei  $\bar{x}'$  aus  $x$  entsteht durch Ersetzen jedes Elements durch die konjugiert komplexe Quaternion und nachfolgende Transposition. Etwas bequemer ist es, die Quaternionen als 2-reihige komplexe Matrizen von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \quad (6)$$

aufzufassen, so daß dann  $x$  eine  $2l$ -reihige unitäre Matrix von spezieller Form wird. Wir betrachten wieder speziell Diagonalmatrizen

$$t = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & A_l \end{pmatrix} \quad (7)$$

mit

$$A_j = \begin{pmatrix} e^{i\tau_j} & 0 \\ 0 & e^{-i\tau_j} \end{pmatrix} . \quad (8)$$

Die Diskussion des Normalisators  $N_t$  ergibt, daß seine Dimension dann und nur dann  $> l$  ist, wenn  $t$  mehrfache Eigenwerte besitzt. Somit bilden alle  $t$  ein maximales Toroid  $T_0$  und für die Ebenen des Diagramms erhält man:

$$\tau_\mu \pm \tau_\nu \equiv 0 \pmod{1} , \quad \mu \neq \nu , \quad \mu, \nu = 1, 2, \dots, l$$

und

$$2\tau_j \equiv 0 \pmod{1} , \quad j = 1, 2, \dots, l .$$

Vergleicht man dies mit  $B_l$ , so folgt

$$m = l^2 , \quad n = l(2l + 1)$$

und die Ebenen des Diagramms durch den Nullpunkt stimmen mit denjenigen von  $B_l$  überein. Die Gruppe  $\Psi$  ist ebenfalls dieselbe wie bei  $B_l$ .

4. Die Gruppe  $A_l$  besteht aus allen  $(l+1)$ -reihigen unitären Matrizen von der Determinante  $(+1)$ . Ihre Diskussion ergibt sich analog wie im § 1, wo der Fall  $l=2$  behandelt wurde. Man erhält:

$$m = \binom{l+1}{2} = \frac{l(l+1)}{2}, \quad n = l(l+2).$$

Das Diagramm lässt sich am besten beschreiben, wenn man ein reguläres Simplex im  $R^l$  benutzt, das seinen Mittelpunkt im Nullpunkt des Koordinatensystems hat. Die Diagrammebenen durch den Nullpunkt sind dann die Mittelnormalebenen von je zwei Simplexecken. Die Gruppe  $\Psi$  ist also die volle Symmetriegruppe von unserem Simplex, d. h. die symmetrische Permutationsgruppe seiner Ecken von der Ordnung  $(l+1)!$ .

In Fig. 2—5 sind obige Diagramme im Fall  $l=2$  dargestellt. Die Knotenpunkte, welche das Gitter  $g_z^l$  ergeben, sind markiert und die in bezug auf  $\Gamma$  äquivalenten Knotenpunkte, welche das Gitter  $\gamma^l$  liefern, besonders hervorgehoben. (§ 2, Nr. 9.) Außerdem sind zwei primitive Vektoren des „Einheitsgitters“  $g^l$  eingezeichnet, obwohl wir dieses Gitter, wie schon in § 1 erwähnt, nicht zum Diagramm rechnen. Die Diagramme von  $B_2$  und  $C_2$  gehen durch Drehung um  $45^\circ$  auseinander hervor.

Orthogonale Gruppe  $D_2$

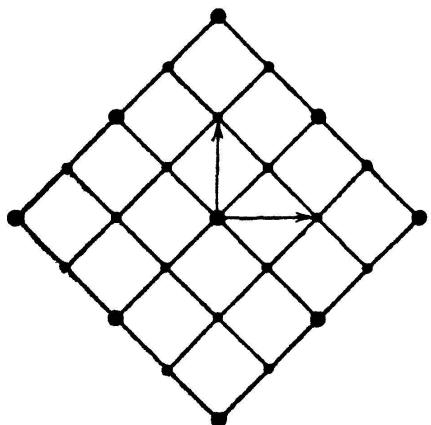


Fig. 3

Orthogonale Gruppe  $B_2$

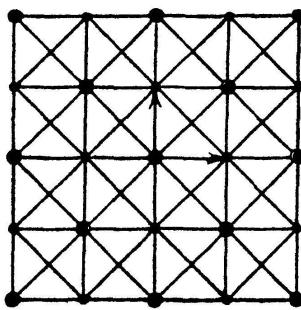


Fig. 4

Komplexgruppe  $C_2$

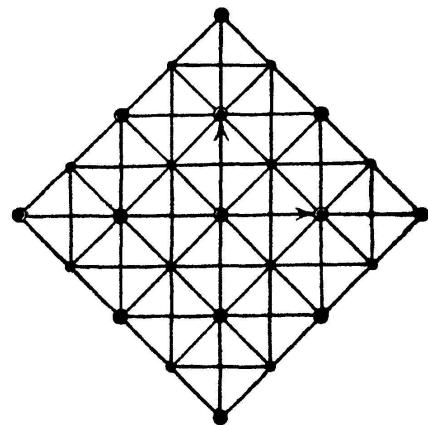


Fig. 5

## § 4. Isomorphe Gruppen.

1. Es sei in der geschlossenen Lie'schen Gruppe  $G$  ein maximales Toroid  $T_0$  gewählt. Wie in § 2, Nr. 3 beziehen wir eine Umgebung  $U(e)$  der Einheit von  $G$  auf kanonische Koordinaten.  $\xi$  sei ein beliebiges Element  $\in U(e)$  und  $t$  ein Element von  $T_0$ . Die adjungierte Matrix  $S_t$  von  $t$  hatte die Form:

$$S_t = \begin{pmatrix} E_l & & & \\ & D_1 & & 0 \\ & & D_2 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & D_m \end{pmatrix}, \quad D_j = \begin{pmatrix} \cos \vartheta_j(t) & -\sin \vartheta_j(t) \\ \sin \vartheta_j(t) & \cos \vartheta_j(t) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Jetzt beschreibe  $t$  eine Gerade:

$$t = \lambda \cdot \tau,$$

wobei die Zahl  $\lambda$  variabel, aber das Element  $\tau \in U(e)$  fest ist. Dann erhalten wir die infinitesimale Transformation

$$K_\tau = \frac{d S_t}{d \lambda} \Big|_{\lambda=0} = \begin{pmatrix} O_l & & & \\ & \Delta_1 & & 0 \\ & & \Delta_2 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & \Delta_m \end{pmatrix}, \quad \text{worin}$$

$$\Delta_j = \begin{pmatrix} 0 & -\vartheta_j(\tau) \\ \vartheta_j(\tau) & 0 \end{pmatrix}$$

und  $O_l$  die  $l$ -reihige Nullmatrix ist. Bei der Differentiation wurde benutzt, daß die  $\vartheta_j(\tau)$  Linearformen sind. Übt man die Transformation  $K_\tau$  auf ein Element  $\xi$  aus, so erhält man das Element  $[\tau, \xi]$ , wobei die eckige Klammer die Kommutatorbildung im Lie'schen Ring von  $G$  bedeutet. Das charakteristische Polynom von  $K_\tau$  lautet:

$$f(u) = u^l \prod_{j=1}^m \{u - i \vartheta_j(\tau)\} \{u + i \vartheta_j(\tau)\}.$$

Andererseits weiß man<sup>16)</sup>, daß dieses Polynom die Form hat

$$f(u) = u^r \prod_{k=1}^{n-r} \{u - \alpha_k(\tau)\},$$

wobei  $r$  der Rang des Rings ist und die  $\alpha_k(\tau)$  Linearformen bedeuten, die man die Wurzeln des Rings nennt. Ist  $G$  halbeinfach, so ist keine der Wurzeln  $\alpha_k(\tau)$  identisch Null und daher muß  $l = r$  sein. Die Dimension des maximalen Toroids  $T_0$  ist also der Rang von  $G$  und daher unabhängig von der speziellen Wahl von  $T_0$ .

Außerdem aber müssen die  $2m$  Linearformen  $\pm i \vartheta_j(\tau)$  mit den Wurzeln  $\alpha_k(\tau)$  übereinstimmen. Nach *Cartan* und *Weyl*<sup>17)</sup> sind die Wurzeln

<sup>16)</sup> Man vgl. (11), Kapitel III, S. 353.

<sup>17)</sup> (11) Satz 2, Seite 364.

$\alpha_k(\tau)$  einfach und die Vielfachen  $2\alpha_k, 3\alpha_k, \dots$  einer Wurzel kommen nicht unter den Wurzeln vor. Dies haben wir im § 2, Nr. 7 benutzt.

Weiterhin aber haben nach *Cartan* und *van der Waerden*<sup>18)</sup> isomorphe halbeinfache Lie'sche Ringe dieselben Wurzeln (abgesehen von einer linearen Koordinatentransformation der  $\tau_k$ ) und umgekehrt sind zwei Lie'sche Ringe mit denselben Wurzeln isomorph. Da andererseits die Wurzeln und das Diagramm sich gegenseitig bestimmen, können wir folgenden Satz aussprechen:

**Satz 12:** *Zwei halbeinfache Lie'sche Gruppen sind dann und nur dann im kleinen isomorph, wenn sie dasselbe Diagramm besitzen.*

Dabei bedeutet isomorph im kleinen, daß es in beiden Gruppen Umgebungen der Einheit gibt, welche isomorph aufeinander abgebildet werden können.

Wir haben hier die Theorie der Lie'schen Ringe in vollem Umfang benutzt; ohne Zweifel aber ließe sich die Theorie der Ringe *geschlossener* Gruppen bedeutend vereinfachen durch Anwendung von Methoden im großen, wie sie in § 2 auseinandergesetzt wurden. Man müßte dabei die nun von vornherein bekannten Symmetrien des Diagramms ausnützen.

2. Fassen wir alle im kleinen isomorphen Gruppen zu einer Familie zusammen, so gibt es nach *O. Schreier*<sup>19)</sup> in der Familie eine ausgezeichnete Gruppe  $\tilde{G}$  mit folgender Eigenschaft: jede andere Gruppe der Familie ist isomorph zur Faktorgruppe von  $\tilde{G}$  nach einem Normalteiler von  $\tilde{G}$ , der diskret und im Zentrum enthalten ist.  $\tilde{G}$  ist die universelle Überlagerungsgruppe aller Gruppen der Familie.

Wir betrachten nun zunächst eine gegebene halbeinfache Gruppe  $G$  und eine beliebige Untergruppe  $\bar{Z}$  ihres Zentrums  $Z$ , die von selbst diskret in  $G$  ist. Im Diagramm von  $G$  entspricht dem Zentrum  $Z$  das Gitter  $g_Z^l$  und der Untergruppe  $\bar{Z}$  ein Gitter  $\bar{g}^l$ , welches in  $g_Z^l$  enthalten ist. Jedoch enthält  $\bar{g}^l$  das Gitter  $g^l$ , das die Einheit von  $G$  darstellt und das wir *Einheitsgitter* nannten.  $G$  und seine Faktorgruppe  $G/\bar{Z}$  sind im kleinen isomorph, haben daher nach Satz 12 dasselbe Diagramm. Jedoch ist für die Faktorgruppe  $G/\bar{Z}$  nun das Einheitsgitter das Gitter  $\bar{g}^l$  geworden. Wir finden daher zunächst:

**Satz 13:** *Der Übergang von  $G$  zu einer Faktorgruppe nach einer Untergruppe des Zentrums drückt sich darin aus, daß im Diagramm an Stelle des alten Einheitsgitters  $g^l$  ein neues  $\bar{g}^l$  tritt, wobei*

$$g^l \subset \bar{g}^l \subset g_Z^l .$$

---

<sup>18)</sup> Man vgl. etwa (9); ferner (12).

<sup>19)</sup> Man vgl. etwa (7), Kapitel VIII.

**Das Diagramm bestimmt also die Familie, während das Einheitsgitter  $g^l$  die verschiedenen Gruppen derselben Familie voneinander unterscheidet.**

Nehmen wir als äußersten Fall  $\bar{g}^l = g_Z^l$ , so erhalten wir die Gruppe  $G/Z$ ; sie ist isomorph zur Gruppe der inneren Automorphismen von  $G$ , oder auch zur *adjungierten linearen Gruppe* von  $G$ . Das zugehörige Einheitsgitter  $g_Z^l$  ist durch das Diagramm allein bestimmt, denn es besteht aus seinen Knotenpunkten (§ 2, Nr. 9); in der Tat haben ja auch alle Gruppen einer Familie dieselbe adjungierte lineare Gruppe.

**3.** Etwas mehr Mühe macht die umgekehrte Konstruktion, nämlich das Aufsuchen einer Überlagerungsgruppe zur gegebenen Gruppe  $G$ . Es sei zunächst an die Resultate von § 2, Nr. 9, 10 erinnert, speziell aber daran, daß wir unter  $\gamma^l$  das Gitter verstehen, das durch Ausüben von  $\Gamma$  auf einen Knotenpunkt entsteht. Das Einheitsgitter  $g^l$  von  $G$  enthält immer  $\gamma^l$ . In Nr. 2 haben wir ein „feinstes“ Einheitsgitter konstruiert; es entsteht nun die Frage, ob auch das „größte“ Gitter  $\gamma^l$  als Einheitsgitter einer Gruppe der Familie auftreten kann. Wir zeigen zunächst:

**Satz 14:** *Ist die Gruppe  $G$  einfach zusammenhängend, so gilt  $\gamma^l = g^l$ .*

Wir werden den Satz in folgender Form beweisen: Ist  $\gamma^l$  echtes Teilgitter von  $g^l$ , so existiert in  $G$  eine geschlossene Kurve, welche in  $G$  nicht nullhomotop ist. Zu diesem Zweck betrachten wir die Einteilung des Raumes  $R^l$  in Polyeder  $P_k$  durch sämtliche Ebenen des Diagramms. Die Gruppe  $\Gamma$  wird erzeugt durch die Spiegelungen an den Wänden dieser Polyeder und permumiert sie transitiv.

Außerdem verwenden wir noch die Gruppe  $\Gamma_\sigma$ , welche von  $\Psi$  und den Translationen des Gitters  $g^l$  erzeugt wird.  $\Gamma_\sigma$  enthält  $\Gamma$  als Untergruppe, denn  $\Gamma$  wird nach § 2 Nr. 9d durch  $\Psi$  und  $\gamma$  erzeugt, und  $g^l$  enthält  $\gamma^l$ . Die Gruppe  $\Gamma_\sigma$  läßt das Diagramm invariant und permumiert daher ebenfalls die Polyeder  $P_k$  unter sich. Da nun  $\gamma^l$  echtes Teilgitter von  $g^l$  sein soll, ist  $\Gamma$  echte Untergruppe von  $\Gamma_\sigma$ . Es gibt daher in  $\Gamma_\sigma$  eine Transformation  $S$ , welche ein vorgegebenes Polyeder (etwa  $P_1$ ) in sich überführt, ohne die Identität zu sein.

Jetzt nehmen wir für  $P_1$  speziell ein Polyeder, das eine Ecke im Nullpunkt  $O$  hat. Die Transformation  $S$  führt sicher  $O$  in eine *andere* Ecke  $O'$  von  $P_1$  über. Denn würde  $S$  den Nullpunkt fest lassen, so wäre  $S \in \Psi$ , und daher müßte nach Satz 11  $S$  die Identität sein, was nicht der Fall ist. Jedoch ist  $O'$  sicher ein Punkt des Gitters  $g^l$ .

Nun sei  $C$  eine Kurve, welche  $O$  mit  $O'$  verbindet und mit Ausnahme dieser beiden Punkte im Inneren von  $P_1$  verläuft. Ihr entspricht bei der

natürlichen homomorphen Abbildung von  $R^l$  auf  $T_0$  (§ 2, Nr. 4) eine geschlossene Kurve  $C'$  auf  $T_0$ , welche von  $e$  ausläuft und außer  $e$  nur reguläre Elemente von  $T_0$  enthält. Eine solche Kurve ist nach Cartan<sup>20)</sup> dann und nur dann nullhomotop in  $G$ , wenn sie bereits in  $T_0$  nullhomotop ist. Dies ist nicht der Fall, da das Urbild  $C$  von  $C'$  im universellen Überlagerungsraum  $R^l$  von  $T_0$  eine offene Kurve ist. Damit ist Satz 14 bewiesen.

Nach einem Satz von H. Weyl<sup>21)</sup> ist nun die universelle Überlagerungsgruppe  $\tilde{G}$  einer geschlossenen halbeinfachen Gruppe  $G$  ebenfalls geschlossen, so daß also ihr Diagramm definiert ist. Dieses Diagramm ist nach Satz 12 also allen Gruppen der ganzen Familie gemeinsam, so daß wir vom **Diagramm der Familie** sprechen können.  $\tilde{G}$  ist einfach zusammenhängend und das zugehörige Einheitsgitter ist nach Satz 14 das Gitter  $\gamma^l$ , welches durch das Diagramm allein schon gegeben ist. Damit ist die zu Anfang dieser Nr. gestellte Frage beantwortet.

Jede andere Gruppe  $G$  der Familie ist nach Nr. 2 Faktorgruppe von  $\tilde{G}$  nach einer Untergruppe  $\bar{Z}$  des Zentrums; diese Untergruppe wird im Diagramm dargestellt durch ein Gitter  $g^l$  mit

$$\gamma^l \subset g^l \subset g_Z^l ;$$

$g^l$  wird das Einheitsgitter von  $G$ . Bekanntlich ist nun  $\bar{Z}$  isomorph zur topologischen Fundamentalgruppe von  $G$  und offenbar ist andererseits  $\bar{Z}$  isomorph zur Gruppe  $g^l/\gamma^l$ , falls man diese beiden Gitter als Translationsgruppen auffaßt.

**4. Zusammenfassend ergibt sich nun leicht:**

- Das Diagramm einer Familie geschlossener halbeinfacher und im kleinen isomorpher Gruppen gibt die volle Übersicht über die Gruppen der Familie, und zwar*
- Dem Gitter  $\gamma^l$ , das durch Ausüben von  $\Gamma$  auf einen Knotenpunkt entsteht, entspricht die universelle Überlagerungsgruppe der Familie.*
- Dem Gitter  $g_Z^l$ , das aus den Knotenpunkten des Diagramms besteht, entspricht die adjungierte lineare Gruppe der Familie.*
- Jedem beliebigen Gitter  $g^l$ , welches  $\gamma^l$  enthält, aber in  $g_Z^l$  enthalten ist, entspricht eine Gruppe  $G$  der Familie und umgekehrt; dabei ist  $g^l$  das „Einheitsgitter“ von  $G$ , d. h. das maximale Toroid in  $G$  entsteht durch Identifikation der nach  $g^l$  äquivalenten Punkte.*

<sup>20)</sup> (2) speziell Abschnitt IV, ferner (11), S. 377—380.

<sup>21)</sup> (11), S. 380, Satz 2.

- e) Die topologische Fundamentalgruppe von  $G$  ist isomorph zur Faktorgruppe  $g^l/\gamma^l$ .

Schließlich folgt aus Satz 12 und obiger Eigenschaft d):

- f) Zwei geschlossene halbeinfache Lie'sche Gruppen sind dann und nur dann isomorph (im großen), wenn sie im Diagramm und im Einheitsgitter  $g^l$  übereinstimmen.

5. Wir betrachten wieder die Einteilung des Raumes  $R^l$  in Polyeder  $P_k$  durch die Ebenen des Diagramms. Dann gilt:

**Satz 15:** Jedes Polyeder  $P_k$  ist Fundamentalbereich der Gruppe  $\Gamma$ .

Man kann dies direkt aus der Definition der Gruppe  $\Gamma$  als die von den Spiegelungen an den Wänden der  $P_k$  erzeugte Gruppe entnehmen. Unter Benutzung unserer bisherigen Überlegungen kann man aber auch wie folgt schließen:

Es sei  $\tilde{G}$  die einfach zusammenhängende Gruppe der zum Diagramm gehörigen Familie und  $P_1$  ein Polyeder, das eine Ecke im Nullpunkt  $O$  des Koordinatensystems hat. Ferner sei  $S$  eine Transformation von  $\Gamma$ , welche  $P_1$  in sich überführt und  $O'$  sei der Bildpunkt von  $O$  vermöge  $S$ .  $O'$  ist Punkt des Einheitsgitters  $\gamma^l$  von  $\tilde{G}$ . (Nr. 4b). Wäre nun  $O' \neq O$ , so könnten wir wie beim Beweis von Satz 14 eine geschlossene Kurve  $C'$  in  $\tilde{G}$  konstruieren, welche in  $\tilde{G}$  nicht nullhomotop wäre. Da  $\tilde{G}$  einfach zusammenhängend ist, gibt es eine derartige Kurve nicht und daher ist  $O' = O$ . Jede Transformation von  $\Gamma$ , welche  $P_1$  in sich überführt, lässt also den Nullpunkt fest und ist daher eine Transformation von  $\Psi$ . Dann ist sie aber die Identität (Satz 11). Da  $\Gamma$  die Polyeder  $P_k$  transitiv permuiert, ist Satz 15 bewiesen.

Aus Satz 15 folgt noch, daß es in  $\Gamma$  keine anderen Spiegelebenen als die Ebenen des Diagramms gibt; die Ebenen des Diagramms können also auch definiert werden als die Ebenen der in  $\Gamma$  enthaltenen Spiegelungen, d. h. es gilt:

**Satz 16:** Das Diagramm ist durch die Raumgruppe  $\Gamma$  bestimmt.

Unter Berücksichtigung von Nr. 4f folgt dann:

**Satz 17:** Zwei einfach zusammenhängende halbeinfache geschlossene Lie'sche Gruppen sind dann und nur dann isomorph, wenn die zugehörigen Raumgruppen  $\Gamma$  dieselben sind. (Abgesehen von einer linearen Koordinatentransformation in  $R^l$ .)

Im Falle einer einfach zusammenhängenden Gruppe  $G$  kann nun die Raumgruppe  $\Gamma$  aus der Automorphismengruppe  $\Phi$  des Toroids  $T_0$  konstruiert werden; denn  $\Phi$  ergibt in einer Umgebung der Einheit von  $\tilde{G}$  die euklidische Gruppe  $\Phi^* = \Psi$  (§ 2 Nr. 3) und das Toroid  $T_0$  selbst bestimmt im universellen Überlagerungsraum das Einheitsgitter  $g^l = \gamma^l$ . Nach § 2 Nr. 9d wird aber  $\Gamma$  durch  $\Psi$  und die Translationen von  $\gamma^l$  erzeugt. Somit schließt man aus Satz 17 weiter

**Satz 18:** *Es sei  $\tilde{G}$  eine einfach zusammenhängende halbeinfache geschlossene Lie'sche Gruppe und  $\Phi$  die Gruppe der Automorphismen eines maximalen Toroids  $T_0$ , welche durch innere Automorphismen von  $\tilde{G}$  bewirkt werden. Dann ist  $\tilde{G}$  durch die Transformationsgruppe  $\Phi$  von  $T_0$  bis auf Isomorphie bestimmt.*

Wir machen noch ausdrücklich darauf aufmerksam, daß die Gruppe  $\Phi$  als Transformationsgruppe eines Torus gegeben sein muß; die Kenntnis ihrer gruppentheoretischen Struktur allein genügt nicht. (Gegenbeispiel  $B_l$  und  $C_l$  im § 3.)

6. Die Polyeder  $P_k$  haben interessante Eigenschaften in bezug auf die Klassen konjugierter Elemente in der Lie'schen Gruppe. Wir legen wieder eine einfach zusammenhängende Gruppe  $\tilde{G}$  zugrunde und  $t$  sei ein reguläres Element des maximalen Toroids  $T_0$  (§ 2, Nr. 1). Ferner sei  $t'$  ein Element aus  $T_0$ , welches zu  $t$  in  $G$  konjugiert ist:

$$t' = a^{-1} t a, \quad a \in G.$$

$t'$  ist ebenfalls regulär. Der innere Automorphismus von  $G$

$$x \rightarrow a^{-1} x a$$

führt  $T_0$  in ein Toroid  $T$  über, welches  $t'$  enthält und somit nach der Definition der Regularität (§ 2, Nr. 1) mit  $T_0$  identisch sein muß. Es geht also  $t'$  durch eine Operation von  $\Phi$  aus  $t$  hervor. Zwei reguläre Elemente  $t$  und  $t'$  von  $T_0$  sind also dann und nur dann konjugiert in  $G$ , wenn sie in bezug auf die Gruppe  $\Phi$  äquivalent sind; d. h. wenn ihre Urbilder  $\tau$  und  $\tau'$  in  $R^l$  in bezug auf die Gruppe  $\Gamma$  äquivalent sind. Letzteres folgt wieder daraus, daß  $\Gamma$  von  $\Phi^* = \Psi$  und den Translationen von  $\gamma^l$  erzeugt wird. Diese Translationen sind aber gerade die Decktransformationen des Überlagerungsraumes  $R^l$  von  $T_0$ .

E. Cartan hat nun gezeigt, daß überhaupt jedes Element von  $\tilde{G}$  zu einem Element von  $T_0$  konjugiert ist<sup>22)</sup>. Daraus schließen wir:

**Satz 19:** Ist die gegebene Lie'sche Gruppe  $\tilde{G}$  einfach zusammenhängend, so sind die Polyeder  $P_k$ , in welche die Diagrammebenen den Raum  $R^l$  einteilen, Fundamentalbereiche für die in  $\tilde{G}$  konjugierten Elemente.

Genauer ist damit folgendes gemeint: Ist  $x$  ein beliebiges Element von  $\tilde{G}$ , so gibt es in  $T_0$  ein dazu konjugiertes Element  $t$ , dessen Urbild  $\tau$  im  $R^l$  in einem vorgegebenen Polyeder  $P_k$  liegt. Befindet sich  $\tau$  im Inneren von  $P_k$ , so gibt es in  $P_k$  keinen anderen Punkt  $\tau'$  mit derselben Eigenschaft wie  $\tau$ .

Der Beweis folgt leicht aus Satz 15.

Satz 19 läßt sich anwenden auf die Theorie der *Integration* in  $\tilde{G}$  und damit auf die Darstellungstheorie von  $\tilde{G}$ . In der Tat hat man oft Funktionen in  $\tilde{G}$  zu integrieren, welche in einer Klasse konjugierter Elemente konstant sind (z. B. Charaktere). Dann kann man  $P_k$  als Integrationsgebiet nehmen, wobei das Volumenelement das gewöhnliche euklidische Volumenelement im  $R^l$  ist.

## § 5. Bericht über die Aufstellung aller Diagramme.

1. Die Bestimmung aller Diagramme ist eine Aufgabe der *Kristallographie*, denn nach Satz 16 wird ein Diagramm durch eine diskontinuierliche Bewegungsgruppe  $\Gamma$  eines  $l$ -dimensionalen Raumes gegeben. Dabei hat  $\Gamma$  die wesentliche Eigenschaft, durch Spiegelungen erzeugt zu werden.

Sämtliche diskontinuierlichen Raumgruppen, welche durch Spiegelungen erzeugt werden, hat Coxeter<sup>23)</sup> bestimmt. Betrachtet man seine Gruppen, so erkennt man, daß zu jeder durch Spiegelungen erzeugten Raumgruppe wirklich eine Lie'sche Gruppe gehört.

Später hat Witt<sup>24)</sup> etwas einfacher alle endlichen durch Spiegelungen erzeugten Gruppen bestimmt. Dabei erhält er natürlich auch alle nicht-kristallographischen Gruppen, d. h. alle Gruppen, die wie z. B. die Ikosaedergruppe im  $R^3$ , keine Kristallklasse einer Raumgruppe abgeben. Witt benutzt sein Resultat zur Klassifikation der halbeinfachen *Lie'schen* Ringe nach der Methode von van der Waerden (vgl. folgende Nr. 3). Dabei müssen gewisse der gefundenen Gruppen durch Ganzzahligkeits-

<sup>22)</sup> Vgl. auch (5), Hilfssatz 4.

<sup>23)</sup> Man vgl. (8).

<sup>24)</sup> (12).

bedingungen ausgeschaltet werden, die ihren wahren Grund eben darin haben, daß die Gruppen ein Gitter invariant lassen müssen.

Ich bin aber davon überzeugt, daß die Gruppen  $\Gamma$  sich auch mit den Mitteln der modernen Kristallographie bestimmen lassen; vielleicht ließe sich hier die zahlentheoretische Methode von *Frobenius*, wie sie *J. J. Burckhardt*<sup>25)</sup> weiter entwickelt hat, anwenden.

2. Im Fall  $l = 1$  existiert offenbar nur ein Diagramm, welches etwa von den Punkten mit ganzzahligen Koordinaten auf einer  $x$ -Achse gebildet wird. Das Gitter  $g_z^l$  besteht ebenfalls aus diesen Punkten, während  $\gamma^l$  aus den Punkten besteht, deren Koordinaten gerade sind. Zwischen  $g_z^l$  und  $\gamma^l$  gibt es kein weiteres Gitter und somit existieren nach § 4 Nr. 4 genau zwei Gruppen vom Rang  $l = 1$ : Die einfach zusammenhängende Gruppe (Quaternionengruppe) und ihre adjungierte lineare Gruppe (Drehungsgruppe des dreidimensionalen Raumes).

Für  $l = 2$  kann man die Diagramme gemäß Nr. 1 so erhalten, daß man unter den 17 Symmetriegruppen der Ebene diejenigen heraussucht, welche durch Spiegelungen erzeugt werden. Man erhält außer den schon bekannten aus § 3 stammenden Diagrammen (Fig. 2—5) nur ein neues (Fig. 6), es gehört zur Cartan'schen Ausnahmegruppe  $G_2$ . (Gruppe der Automorphismen der Cayley'schen Algebra.) Ein Blick auf das Diagramm zeigt, daß die beiden Gitter  $g_z^l$  und  $\gamma^l$  übereinstimmen, daher existiert keine weitere zu  $G_2$  im kleinen isomorphe Gruppe, und  $G_2$  ist einfach zusammenhängend.

3. Für einen beliebigen Wert von  $l$  sei nun  $\sigma$  eine der Scharen paralleler Ebenen des Diagramms. Die Spiegelungen an den Ebenen dieser Schar erzeugen eine Gruppe, welche außer diesen Spiegelungen nur Translationen enthält. Es sei  $a_\sigma$  der Vektor einer primitiven Translation dieser Translationsgruppe;  $a_\sigma$  steht senkrecht auf den Ebenen der Schar und die Länge dieses Vektors ist der doppelte Abstand von zwei benachbarten Ebenen. Die  $2m$  Vektoren  $\pm a_\sigma$  nennen wir die *Vektoren des Diagramms* (in Fig. 6 sind sie eingezeichnet). Diese Vektoren sind Gittervektoren des Gitters  $\gamma^l$ , das ja aus den Translationen von  $\Gamma$  besteht. Das Vektor- system  $\pm a_\sigma$  bestimmt das Diagramm eindeutig und umgekehrt und die Gruppe  $\Gamma$  läßt dieses Vektorsystem invariant.

Jetzt seien  $a$  und  $b$  zwei beliebige Vektoren des Diagramms. Die Spiegelung an irgend einer zu  $a$  normalen Ebene des Diagramms ist eine Operation von  $\Gamma$  und führt  $b$  in einen anderen Diagrammvektor  $b'$  über. Es ergibt sich sofort:

---

<sup>25)</sup> In (1) und früheren Arbeiten.

$$b' = b - 2 \frac{(a b)}{(a a)} a , \quad (1)$$

worin die runden Klammern Skalarprodukte andeuten. Da  $b$  und  $b'$  Translationen von  $\Gamma$  sind, ist auch  $(b' - b)$  eine solche. Dieser Vektor ist aber proportional zur Translation  $a$  von  $\Gamma$ , ist daher ein ganzzahliges Vielfaches von  $a$ . Denn  $a$  ist, wie man leicht sieht, die kürzeste Translation von  $\Gamma$  in der Richtung  $a$ . Somit folgt:

*Sind  $a$  und  $b$  zwei Vektoren des Diagramms, so ist  $2 \frac{(a b)}{(a a)}$  eine ganze Zahl und das Diagramm enthält auch den nach (1) berechneten Vektor  $b'$ .*

Dies ist die Ganzahligkeitsbedingung, die Witt verwendet und auf die *van der Waerden*<sup>26)</sup> seine schöne und elementare Klassifikation der einfachen Lie'schen Gruppen gegründet hat.

Ausnahmegruppe  $G_2$

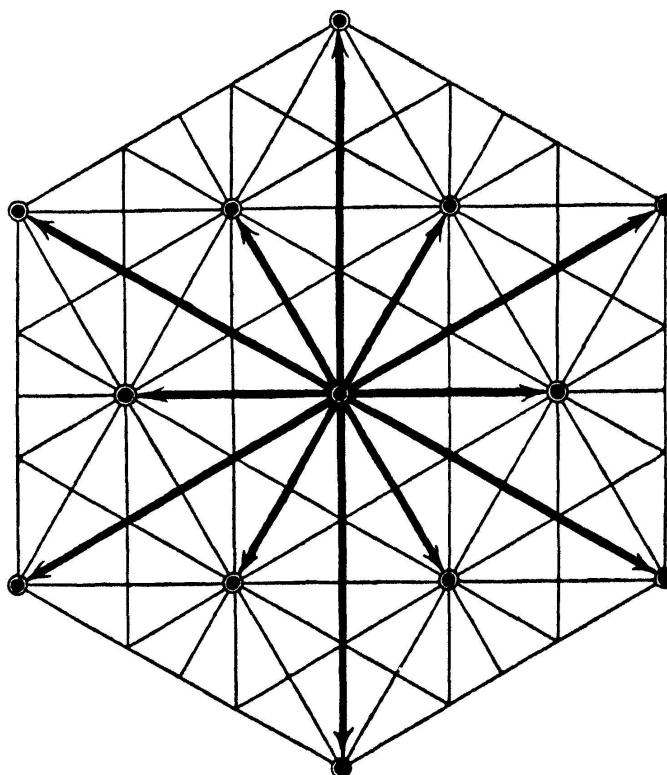


Fig. 6

(Eingegangen den 26. Januar 1942.)

<sup>26)</sup> (9), § 2, S. 448. Die dort angegebene Bedingung 3 enthält eine weitere Aussage, welche sich aber aus unserer Bedingung herleiten lässt durch Diskussion der Möglichkeiten für die gegenseitige Lage zweier Vektoren.

## LITERATURVERZEICHNIS

- (1) *J. J. Burckhardt*, Bewegungsgruppen in mehrdimensionalen Räumen.  
(Comm. Math. Helv. 9, 1936, S. 284.)
- (2) *E. Cartan*, La topologie des espaces représentatifs des groupes de Lie.  
(Paris 1936, Actualités scient. et industr. 358; sowie: L'enseignement math. 35  
1936, 177—200; sowie Selecta, Jubilé scientifique Paris 1939, p. 235—258).
- (3) *H. S. M. Coxeter*, Discrete groups generated by reflections. (Annals of  
Math. vol. 35, 1934, p. 588.)
- (4) *H. Hopf*, Über den Rang geschlossener Lie'scher Gruppen. (Comm. Math.  
Helv. 13, S. 119—143.)
- (5) *H. Hopf* und *H. Samelson*, Ein Satz über die Wirkungsräume geschlossener  
Lie'scher Gruppen. (Comm. Math. Helv. 13, S. 240.)
- (6) *J. F. Koksma*, Diophantische Approximationen. (Berlin 1936.)
- (7) *L. Pontrjagin*, Topological groups. (Princeton 1939.)
- (8) *A. Speiser*, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. (3. Aufl., Berlin  
1937.)
- (9) *B. L. van der Waerden*, Die Klassifikation der einfachen Lie'schen Gruppen.  
(Math. Zeitschr. 37, 1933, S. 446.)
- (10) *A. Weil*, Démonstration topologique d'un théorème fondamental de  
Cartan. (Comptes rend. 200, 1935, p. 518.)
- (11) *H. Weyl*, Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen II. (Math.  
Zeitschrift 24, 1925, Kapitel III, S. 353.)
- (12) *E. Witt*, Spiegelungsgruppen und Aufzählung halbeinfacher Lie'scher  
Ringe. (Hamb. Abh. 14, 1941, S. 289.)