Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 14 (1941-1942)

Artikel: Expresssions de la somme x1 + x2 de deux indéterminées x1, x2 en fonction de x1x2 + c (x1 + x2).

Autor: Mirimanoff, D.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14308

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Expressions de la somme $X_1 + X_2$ de deux indéterminées X_1, X_2 en fonction de $X_1 X_2 + C(X_1 + X_2)$

Par D. MIRIMANOFF, Genève

Introduction

Dans un article récent publié ici-même[1]) j'ai fait connaître une méthode permettant de former les expressions les plus simples, canoniques et réduites, de la somme p de deux indéterminées x_1, x_2 en fonction de leur produit q. J'ai ajouté qu'on pouvait en déduire les expressions de p et q en fonction de $G = q + cp$, qui interviennent dans certaines démonstrations arithmétiques du théorème fondamental de l'algèbre. Mais le procédé dont je me suis servi pour former l'expression cherchée dans le cas de $n = 4$, a des inconvénients. Il ne permet pas, en particulier, de se faire une idée précise de la structure et des propriétés caractéristiques de l'expression ainsi obtenue. Aussi ai-je cru utile de reprendre l'étude de ce problème. En l'examinant de plus près, je me suis aperçu que le passage des expressions en fonction de q aux expressions en fonction de G peut être effectué directement, à l'aide d'une transformation très simple, que, malgré son caractère élémentaire, je crois utile d'indiquer.

§ 1. Envisageons n nouvelles indéterminées x'_i liées aux anciennes x_i par les relations

$$x'_i = x_i + c \ .$$

Désignons par f'_i les fonctions symétriques élémentaires correspondantes, par p' la somme $x'_1 + x'_2$, par q' le produit $x'_1 x'_2$. Il est évident que les expressions de p' en fonction de q' s'obtiennent de celles de p en fonction de q en remplaçant q par q' et les f_i par les f'_i.

Or,

$$\begin{aligned} p' &= (x_1 + c) + (x_2 + c) = p + 2c \\ q' &= (x_1 + c)(x_2 + c) = G + c^2 \ . \end{aligned} \tag{1}$$

Quant aux f'_i, ce sont des fonctions linéaires de $f_1, f_2, \ldots, f_i$, qui se calculent facilement. On a, en effet,

$$f'_i = \beta_1 f_i + \beta_2 c f_{i-1} + \cdots + \beta_i c^{i-1} f_1 + \beta_{i+1} c^i \ , \tag{2}$$

[1]) Expressions de la somme de deux indéterminées en fonction du produit. C. M. H. t. 14, p. 1.

les coefficients $\beta_1 = 1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_i, \beta_{i+1}$ étant les nombres du triangle arithmétique de Pascal rangés le long de la i^e parallèle à l'hypoténuse, en comptant à partir du sommet de l'angle droit. On a, en particulier,

$$f_1' = f_1 + nc \quad ; \quad f_2' = f_2 + (n-1)\, c f_1 + \frac{n(n-1)}{2} c^2 \quad ; \text{ etc.}$$

Pour avoir l'expression de p en fonction de G, il suffit donc de remplacer q' et les f_i' par leurs expressions (1) et (2) et de retrancher $2c$ de la formule ainsi obtenue. La relation $q = G - cp$ permettra ensuite d'en tirer l'expression de q en fonction de G.

§ 2. Cas de $n = 4$ et de $n = 5$.

Lorsque $n = 4$, la somme p est donnée par la formule[2])

$$p = \frac{f_1 q^2 - f_3 q}{q^2 - f_4} \; .$$

Par conséquent

$$p' = \frac{f_1' q'^2 - f_3' q'}{q'^2 - f_4'} \; .$$

Or,

$$f_1' = f_1 + 4c \quad ; \quad f_2' = f_2 + 3cf_1 + 6c^2 \quad ;$$

$$f_3' = f_3 + 2cf_2 + 3c^2 f_1 + 4c^3 \quad ; \quad f_4' = f_4 + cf_3 + c^2 f_2 + c^3 f_1 + c^4;$$

par suite

$$p = \frac{(f_1 + 4c)\,(G + c^2)^2 - (f_3 + 2cf_2 + 3c^2 f_1 + 4c^3)\,(G + c^2)}{(G + c^2)^2 - (f_4 + cf_3 + c^2 f_2 + c^3 f_1 + c^4)} - 2c$$

$$= \frac{f_1 G^2 - f_3 G + 2c(G^2 - f_2 G + f_4) - c^2 (f_1 G - f_3)}{G^2 - f_4 - cf_3 + c^2 (2G - f_2) - c^3 f_1} \; ,$$

et l'on retrouve la formule (10) de l'article cité.

Pour $n = 5$, on a, en vertu des formules (14) et (15) du même article

$$p = \frac{f_1' q'^5 - f_3' q'^4 + f_2' f_5' q'^2 - f_4' f_5' q'}{q'^5 - f_4' q'^3 + f_1' f_5' q'^2 - f_5'^2} - 2c \; .$$

Or,

$$f_1' = f_1 + 5c \; ; \; f_2' = f_2 + 4cf_1 + 10c^2 \; ; \; f_3' = f_3 + 3cf_2 + 6c^2 f_1 + 10c^3 \; ;$$

$$f_4' = f_4 + 2cf_3 + 3c^2 f_2 + 4c^3 f_1 + 5c^4 \; ; \; f_5' = f_5 + cf_4 + c^2 f_3 + c^3 f_2 + c^4 f_1 + c^5.$$

---

[2]) Ibid., formule (9), pag. 8.

Je crois inutile de donner l'expression finale de p .

Le même procédé permet de former les expressions réduites de p en fonction de G . Et en général, à toute expression de p en fonction de q correspond une expression de p en fonction de G .

§ 3. Deux propriétés des polynômes R_i .

J'indiquerai en terminant deux propriétés curieuses des polynômes R_i .

1° Adjoignons au système canonique $R_3 = 0, R_4 = 0, \ldots, R_{n-1} = 0$ les équations $R_2 = 0$ et $R_n = 0$. De ce système nouveau de $n - 1$ équations on peut éliminer les $n - 2$ inconnues $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}$, en égalant à 0 le déterminant des coefficients. L'équation qu'on obtient alors est du degré $\frac{n(n-1)}{2}$ en q, et l'on retrouve ainsi par une voie différente l'équation dont les racines sont les produits $x_i x_j$.

Soit $n = 4$. Le système nouveau s'écrit

$$\begin{aligned}
R_2 &= q\alpha_2 - f_1 q\alpha_1 + f_2 q - f_4 = 0 \\
R_3 &= (q^2 - f_4)\alpha_1 - f_1 q^2 + f_3 q = 0 \\
R_4 &= -f_4\alpha_2 + f_3 q\alpha_1 + q^3 - f_2 q^2 = 0 .
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{vmatrix} q & -f_1 q & f_2 q - f_4 \\ & q^2 - f_4 & -f_2 q^2 + f_3 q \\ -f_4 & f_3 q & q^3 - f_2 q^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

En développant ce déterminant on retrouve l'équation dont les racines sont les produits $x_i x_j$ et qui s'écrit

$$q^6 - f_2 q^5 + (f_1 f_3 - f_4)\, q^4 - (f_1^2 f_4 - 2 f_2 f_4 + f_3^2)\, q^3 + (f_1 f_3 f_4 - f_4^2)\, q^2 - f_2 f_4^2 q + f_4^3 = 0 .$$

2° Deuxième propriété des R_i :

Pour $i > 2$, $R_i = -q\alpha_{i-3} R_1 + \alpha_{i-2} R_2$.

Démonstration. Par définition, cette propriété est vraie pour R_3 ; on vérifie aisément qu'elle est vraie pour R_4 . Supposons maintenant qu'elle soit vraie pour R_i et R_{i+1} , je dis qu'elle sera encore vraie pour R_{i+2} . En effet ,

$$
\begin{aligned}
R_{i+2} = -qR_i + pR_{i+1} &= -q(-q\alpha_{i-3}R_1 + \alpha_{i-2}R_2) \\
&\quad + p(-q\alpha_{i-2}R_1 + \alpha_{i-1}R_2) \\
&= -q(p\alpha_{i-2} - q\alpha_{i-3})R_1 + (p\alpha_{i-1} - q\alpha_{i-2})R_2 \\
&= -q\alpha_{i-1}R_1 + \alpha_i R_2 \ .
\end{aligned}
$$

La propriété est donc vraie pour tout $i > 2$.

Je crois qu'en s'appuyant sur ces propriétés il est possible de simplifier certaines démonstrations arithmétiques du théorème fondamental de l'algèbre.

(Reçu le 20 septembre 1941.)