**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 14 (1941-1942)

**Artikel:** Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe.
**Autor:** Hopf, Heinz
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-14307

# Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe

Von Heinz Hopf, Zürich

## Einleitung

Es ist bekannt, daß die erste Bettische Gruppe $\mathfrak{B}^1$ eines Komplexes $K$ durch die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von $K$ bestimmt ist: sie ist die Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$ nach der Kommutatorgruppe[1]. In dieser Arbeit wird der Einfluß von $\mathfrak{G}$ auf die zweite Bettische Gruppe $\mathfrak{B}^2$ untersucht.

a) $\mathfrak{B}^2$ ist, wie man schon an trivialen Beispielen sehen kann, nicht durch $\mathfrak{G}$ bestimmt; es wird aber folgendes festgestellt: *Jeder Gruppe $\mathfrak{G}$ ist durch einen bestimmten algebraischen Prozeß eine Abelsche Gruppe $\mathfrak{G}_1^*$ zugeordnet, die im allgemeinen nicht die Nullgruppe*[2] *ist; wenn $\mathfrak{G}$ die Fundamentalgruppe eines Komplexes $K$ und wenn $\mathfrak{S}^2$ die Untergruppe von $\mathfrak{B}^2$ ist, die aus denjenigen Homologieklassen besteht, welche stetige Bilder von Kugelflächen enthalten, so ist*

$$\mathfrak{B}^2 / \mathfrak{S}^2 \cong \mathfrak{G}_1^* \ .$$

Die zweite Bettische Gruppe besitzt also $\mathfrak{G}_1^*$ als homomorphes Bild, und sie kann daher, wenn die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ gegeben ist, „nicht zu klein" sein. Ist z. B. $\mathfrak{G}$ eine freie Abelsche Gruppe vom Range $p$, so erweist sich $\mathfrak{G}_1^*$ als freie Abelsche Gruppe vom Range $\frac{p(p-1)}{2}$; für einen Komplex mit dieser Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ ist mithin die zweite Bettische Zahl mindestens gleich $\frac{p(p-1)}{2}$.

Die „untere Schranke" $\mathfrak{G}_1^*$ für die mit $\mathfrak{G}$ als Fundamentalgruppe verträglichen zweiten Bettischen Gruppen kann nicht verbessert werden; zu jeder Gruppe $\mathfrak{G}$ (mit endlich vielen Erzeugenden und endlich vielen Relationen) gibt es nämlich einen Komplex $K$, der die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ besitzt und in dem jedes Kugelbild homolog $0$, also $\mathfrak{S}^2 = 0$ ist; dann ist $\mathfrak{B}^2 \cong \mathfrak{G}_1^*$.

Die allgemeine Theorie dieser Zusammenhänge wird im § 2 dargestellt;

---

[1] *Seifert-Threlfall,* Lehrbuch der Topologie (Leipzig und Berlin 1934), § 48. — Statt „Homologiegruppe" (l. c.) sage ich „Bettische Gruppe".

[2] Die Nullgruppe, oft kurz mit 0 bezeichnet, ist die Gruppe, die nur ein Element enthält.

der § 3 enthält spezielle Folgerungen und Beispiele. Im § 1, der rein gruppentheoretischen Inhalt hat, wird die Gruppe $\mathfrak{G}_1^*$ eingeführt.

b) Der § 4 handelt von dem Einfluß der Fundamentalgruppe auf die Schnitt-Eigenschaften der Zyklen in einer $n$-dimensionalen (geschlossenen und orientierbaren) Mannigfaltigkeit $M^n$. Es stellt sich heraus: *Diese Eigenschaften, soweit es sich um Schnitte zwischen je einem* $(n - 1)$*-dimensionalen und einem zweidimensionalen Zyklus, sowie um Schnitte zwischen je zwei* $(n - 1)$*-dimensionalen Zyklen handelt, sind rein algebraisch durch die Fundamentalgruppe bestimmt.*

Zum Beispiel ergibt sich: wenn $\mathfrak{G}$ eine freie Gruppe ist, so sind die genannten Schnitte sämtlich homolog 0; wenn $\mathfrak{G}$ eine Abelsche Gruppe ist, so ist der Schnitt zweier $(n - 1)$-dimensionaler Zyklen nur dann homolog 0, wenn die beiden Zyklen linear abhängig im Sinne der Homologien sind.

Die Beschränkung auf Mannigfaltigkeiten ist übrigens nicht nötig; zieht man nämlich die neuere Produkt-Theorie in Komplexen heran[3]), so bleiben die angedeuteten Sätze gültig, wenn man die Schnitte zwischen $(n - 1)$-dimensionalen und zweidimensionalen Zyklen durch die Čech-Whitneyschen Produkte zwischen eindimensionalen Kozyklen und zweidimensionalen Zyklen sowie die Schnitte zwischen zwei $(n - 1)$-dimensionalen Zyklen durch die Kolmogoroff-Alexanderschen Produkte zwischen zwei eindimensionalen Kozyklen ersetzt; die Produkte selbst sind im ersten Fall eindimensionale Zyklen, im zweiten Fall zweidimensionale Kozyklen (aus diesen Formulierungen sieht man übrigens, daß es berechtigt ist, auch die oben genannten Schnitte, bei denen $(n - 1)$-dimensionale Zyklen auftreten, zu den Eigenschaften eindimensionaler und zweidimensionaler Gebilde zu rechnen).

c) Falls eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit $M^3$ vorliegt, so kommt zu den Beziehungen zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{B}^2$, die in den §§ 2 und 4 festgestellt werden, noch die durch den Poincaréschen Dualitätssatz ausgedrückte Beziehung sowie, für die Schnitt-Eigenschaften, die Gleichheit $n - 1 = 2$ hinzu. Diese verschiedenartigen Beziehungen sind im allgemeinen nicht miteinander verträglich, und daher sind die Gruppen $\mathfrak{G}$, die als Fundamentalgruppen dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten auftreten, starken Einschränkungen unterworfen. Derartige Bedingungen sind in dem kurzen § 5 zusammengestellt. Als Anwendung ergibt sich

[3]) Zusammenfassende Darstellung: *H. Whitney*, On products in a complex, Annals of Math. 39 (1938), 397—432.

ein neuer Beweis für den Satz von Reidemeister: Die einzigen Abelschen Gruppen, welche als Fundamentalgruppen dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten auftreten, sind die zyklischen Gruppen und das direkte Produkt von drei unendlich-zyklischen Gruppen.[4])

d) Sowohl für den Aufbau der allgemeinen Theorie als auch für die Behandlung von Beispielen sind gruppentheoretische Überlegungen notwendig, die mir auch vom gruppentheoretischen Standpunkt aus nicht uninteressant zu sein scheinen. Besonders wichtig ist die Bildung von „höheren Kommutatorgruppen", die in der neueren Gruppentheorie eine Rolle spielen[5]): ist $\mathfrak{R}$ eine Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{F}$, so verstehe man unter $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})$ die Gruppe, welche von allen Kommutatoren $x\,r\,x^{-1}\,r^{-1}$ erzeugt wird, für die $x \in \mathfrak{F}$, $r \in \mathfrak{R}$ ist; speziell ist $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ die Kommutatorgruppe und $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}) = \mathfrak{C}^2_{\mathfrak{F}}$ die zweite Kommutatorgruppe von $\mathfrak{F}$. Die Struktur der Gruppe $\mathfrak{G}_1^*$, die in unserem unter a) genannten Hauptsatz auftritt, ist folgendermaßen zu bestimmen: wenn $\mathfrak{G}$ homomorphes Bild einer freien Gruppe $\mathfrak{F}$ und wenn $\mathfrak{R}$ der Kern dieses Homomorphismus ist[6]) — ein solcher Homomorphismus liegt immer vor, wenn $\mathfrak{G}$ durch Erzeugende und Relationen gegeben ist —, so ist

$$\mathfrak{G}_1^* \cong (\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}) / \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R}) \; .$$

Eine Grundlage für unsere Untersuchungen ist der gruppentheoretische Satz, daß die durch diese Formel gegebene Gruppe $\mathfrak{G}_1^*$ nicht von der speziellen Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ als Bild von $\mathfrak{F}$, sondern nur von $\mathfrak{G}$ selbst, also nicht von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{R}$, sondern nur von der Faktorgruppe $\mathfrak{F}/\mathfrak{R}$ abhängt.

Das folgende Beispiel zeigt, von welcher Art die gruppentheoretisch-topologischen Zusammenhänge sind, mit denen man es zu tun hat. $\mathfrak{G}$ sei durch Erzeugende $E_1, \ldots, E_m$ gegeben, zwischen denen eine einzige Relation $R(E_1, \ldots, E_m) = 1$ besteht; man betrachte das Element $r = R(e_1, \ldots, e_m)$ der von freien Erzeugenden $e_1, \ldots, e_m$ erzeugten freien Gruppe $\mathfrak{F}$; es gelten die folgenden beiden Sätze: (I) Dann und nur dann gibt es einen Komplex $K$, dessen Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ und dessen zweite Bettische Gruppe 0 ist, wenn $r$ nicht in $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ enthalten oder

[4]) *K. Reidemeister*, Kommutative Fundamentalgruppen, Monatshefte f. Math. u. Ph. 43 (1936), 20—28.

[5]) Zur Orientierung über die bei uns auftretenden Begriffe aus der Gruppentheorie: *W. Magnus*, Allgemeine Gruppentheorie (Enzyklopädie d. math. Wiss. I 1, 9; Leipzig-Berlin 1939), Nr. 4 (besonders p. 17) und Nr. 14.

[6]) Der „Kern" eines Homomorphismus ist das Urbild des Eins-Elementes der Bildgruppe.

wenn $r = 1$ ist. — (II) $M^n$ sei eine Mannigfaltigkeit mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$; dann und nur dann gibt es in $M^n$ zwei $(n - 1)$-dimensionale Zyklen, deren Schnitt nicht homolog 0 ist, wenn $r$ in $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$, aber nicht in $\mathfrak{C}^2_{\mathfrak{F}}$ enthalten ist.

e) Nachdem man ziemlich befriedigende Sätze über den Einfluß der Fundamentalgruppe auf die zweite Bettische Gruppe gewonnen hat, wird man fragen, ob ähnliches nicht auch für die höheren Bettischen Gruppen möglich sei. Die oben erwähnte Rolle, welche die Kugelbilder spielen, gibt einen Fingerzeig, in welcher Richtung man derartige Verallgemeinerungen zu suchen haben wird: der Begriff des Kugelbildes ist der Grundbegriff der Homotopie-Theorie von Hurewicz, und auch die übrigen Begriffe und Beziehungen, die im § 2 auftreten — insbesondere der Begriff des „Homotopie-Randes" eines zweidimensionalen Komplexes —, scheinen mir in den Ideenkreis von Hurewicz zu gehören[7]); übrigens ergeben sich auch einige direkte Berührungen mit Resultaten dieser Theorie (Nr. 12 b, e). Ich halte es daher für wahrscheinlich, daß die in der vorliegenden Arbeit festgestellten Beziehungen zwischen $\mathfrak{G}$ einerseits, $\mathfrak{B}^2$ und $\mathfrak{S}^2$ andererseits in allgemeineren, uns noch unbekannten Beziehungen enthalten sind, die zwischen den ersten $k$ Homotopiegruppen einerseits, der $(k + 1)$-ten Bettischen und der $(k + 1)$-ten Homotopiegruppe andererseits bestehen. Jedenfalls lassen sich der erwähnte Begriff des Homotopie-Randes und seine Haupt-Eigenschaften auf höhere Dimensionszahlen übertragen; wichtig für derartige Verallgemeinerungen dürfte der Zusammenhang zwischen der Fundamentalgruppe und den höheren Homotopiegruppen sein, auf den Eilenberg aufmerksam gemacht hat[8]).

Wenn man dagegen die Homotopiegruppen nicht heranzieht, sondern ausschließlich die Fundamentalgruppe und die Bettischen Gruppen — also die klassischen Invarianten von Poincaré — untersucht und in diesem Rahmen die Frage nach den gegenseitigen Beziehungen zwischen diesen Gruppen stellt, so ist hierauf zu antworten, daß diese Beziehungen sich auf die Dimensionszahlen 1 und 2 beschränken; wenn nämlich $\mathfrak{G}, \mathfrak{B}^3, \ldots, \mathfrak{B}^n$ willkürlich vorgegebene Gruppen sind — mit endlich vielen Erzeugenden und Relationen, die $\mathfrak{B}^r$ Abelsch —, so gibt es, wie man leicht sieht, immer einen Komplex $K$ mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$

[7]) *W. Hurewicz,* Beiträge zur Topologie der Deformationen, Proc. Akad. Amsterdam: (I) vol. 38 (1935), 112—119; (II) vol. 38 (1935), 521—528; (III) vol. 39 (1936), 117—126; (IV) vol. 39 (1936), 215—224.

[8]) *S. Eilenberg,* On the relation between the fundamental group of a space and the higher homotopy groups, Fundamenta Math. 32 (1939), 167—175.

und den Bettischen Gruppen $\mathfrak{B}^r$. [9]) In diesem Sinne sind also Verallgemeinerungen unserer Sätze nicht möglich.

## § 1. Eine Gruppen-Konstruktion

**1.** Wir beginnen mit der Zusammenstellung einiger bekannter Tatsachen. $\Gamma$ sei eine Menge von Elementen $\alpha, \beta, \ldots$. Jedem geordneten Paar $(\alpha, \beta)$ sei eine „Summe" $\alpha + \beta \in \Gamma$, jedem $\alpha$ sei ein „Inverses" $-\alpha \in \Gamma$ zugeordnet; statt $\beta + (-\alpha)$ schreiben wir auch $\beta - \alpha$. Dann verstehen wir unter einer „Restklassengruppe" von $\Gamma$ folgendes:

$\Gamma$ ist in zueinander fremde Klassen $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \ldots$ zerlegt; zwischen diesen ist eine Addition erklärt, durch welche die Gesamtheit der Klassen zu einer Gruppe wird; diese Addition ist mit der Addition in $\Gamma$ auf folgende natürliche Weise verknüpft:

$$\begin{aligned} &\text{aus } \alpha \in \bar{\alpha},\ \beta \in \bar{\beta} \text{ folgt } \alpha + \beta \in \bar{\alpha} + \bar{\beta}\,; \\ &\text{aus } \alpha \in \bar{\alpha} \text{ folgt } -\alpha \in -\bar{\alpha}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Jede Restklassengruppe läßt sich folgendermaßen erzeugen. $\Gamma$ wird durch eine Abbildung $q$ homomorph auf eine Gruppe $\mathfrak{Q}$ abgebildet, d. h. so, daß [10])

$$q(\alpha + \beta) = q(\alpha) \cdot q(\beta) \quad , \quad q(-\alpha) = q(\alpha)^{-1} \tag{1'}$$

ist; die Restklassen sind die Urbildmengen der einzelnen Elemente von $\mathfrak{Q}$; die Summe $\bar{\alpha} + \bar{\beta}$ zweier Restklassen ist durch die Vorschrift $q(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) = q(\bar{\alpha}) \cdot q(\bar{\beta})$ bestimmt; so entsteht eine mit $\mathfrak{Q}$ isomorphe Restklassengruppe von $\Gamma$.

Unter dem „Kern" einer Restklassengruppe verstehen wir diejenige Restklasse, welche das Null-Element der Gruppe darstellt; oder in der Sprache der Homomorphismen: diejenige Klasse, welche durch $q$ auf die Eins von $\mathfrak{Q}$ abgebildet wird.

Mit Hilfe von (1) oder von (1′) bestätigt man leicht folgende Tatsache: Zwei Elemente $\alpha, \beta$ von $\Gamma$ sind dann und nur dann in derselben Rest-

---

[9]) Andeutung: Es gibt einen Komplex mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ (*Seifert-Threlfall*, l. c. [1]), 180, Aufgabe 3); der Komplex $K'$ seiner zweidimensionalen Simplexe hat auch die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$; es gibt ferner einen Komplex $K''$ mit der Fundamentalgruppe 0 und den Bettischen Gruppen $\mathfrak{B}^3, \ldots, \mathfrak{B}^n$ (*Alexandroff-Hopf*, Topologie I (Berlin 1935), 266, Nr. 9); man füge $K'$ und $K''$ in einem Punkt aneinander.

[10]) Im allgemeinen schreiben wir beliebige Gruppen multiplikativ, Abelsche Gruppen oft additiv; daß wir $\Gamma$ additiv schreiben, obwohl die Summenbildung i. a. nicht kommutativ ist, wird sich im „Anhang" rechtfertigen (im Hinblick auf das distributive Gesetz der dort behandelten Produktbildung).

klasse, wenn das Element $\beta - \alpha$ in dem Kern enthalten ist. Hieraus folgt:

Zwei Restklassengruppen von $\Gamma$ sind miteinander identisch (nicht nur isomorph), wenn ihre Kerne identisch sind.

**2.** $\mathfrak{A}$ sei eine beliebige Gruppe, $\mathfrak{U}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{A}$. Mit $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{U})$ bezeichnen wir die von allen Elementen $a\,u\,a^{-1}\,u^{-1}$ mit $a \in \mathfrak{A}$, $u \in \mathfrak{U}$ erzeugte Gruppe; sie ist, wie man leicht sieht, Normalteiler von $\mathfrak{A}$ und in $\mathfrak{U}$ enthalten. Beim Rechnen mit Kongruenzen mod. $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{U})$ — d. h. beim Rechnen in der Faktorgruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{U})$ — ist jedes Element von $\mathfrak{U}$ mit jedem Element von $\mathfrak{A}$ vertauschbar.

Für beliebige Gruppenelemente $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$ definieren wir das „Wort" $C$ durch

$$C(x_1, \ldots, y_n) = x_1 \cdot y_1 \cdot x_1^{-1} \cdot y_1^{-1} \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot y_{n-1}^{-1} \cdot x_n \cdot y_n \cdot x_n^{-1}\, y_n^{-1} \,. \tag{2}$$

Dann gilt folgende Regel: sind $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ und $a_1', b_1', \ldots, a_n', b_n'$ Elemente von $\mathfrak{A}$ mit

$$a_i' \equiv a_i \,, \quad b_i' \equiv b_i \qquad \text{mod. } \mathfrak{U} \,, \tag{3}$$

so ist

$$C(a_1', \ldots, b_n') \equiv C(a_1, \ldots, b_n) \qquad \text{mod. } \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{U}) \,. \tag{4}$$

Denn (3) bedeutet: $a_i' = a_i \cdot u_i$, $b_i' = b_i \cdot v_i$ mit $u_i \in \mathfrak{U}$, $v_i \in \mathfrak{U}$; setzt man dies in $C$ ein und beachtet die oben erwähnte Vertauschbarkeits-Eigenschaft sowie die besondere Gestalt (2) von $C$, so erhält man (4).

Die Gruppe $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A})$ ist die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{A}$; wir nennen sie kurz $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}$.

**3.** Nach diesen Vorbemerkungen kommen wir zu der Konstruktion, die das Ziel dieses Paragraphen ist. $\mathfrak{G}$ sei eine beliebige Gruppe. Unter $\Gamma_{\mathfrak{G}}$ verstehen wir die Menge aller geordneten Systeme $(X_1, Y_1, \ldots, X_n, Y_n)$ mit $X_i \in \mathfrak{G}$, $Y_i \in \mathfrak{G}$ und beliebigem $n$. Für zwei Systeme $\alpha = (X_1, \ldots, Y_n)$, $\beta = (U_1, \ldots, V_m)$ soll $\alpha + \beta = (X_1, \ldots, Y_n, U_1, \ldots, V_m)$, und es soll $-\alpha = (Y_n, X_n, \ldots, Y_1, X_1)$ sein.

Wir konstruieren nach einer speziellen Methode Restklassengruppen von $\Gamma_{\mathfrak{G}}$. Es sei $A$ eine homomorphe Abbildung einer Gruppe $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{G}$; der Kern[6]) von $A$ heiße $\mathfrak{U}$. Wir nehmen ein Element $\alpha = (X_1, \ldots, Y_n)$ von $\Gamma_{\mathfrak{G}}$ und ordnen seinen Komponenten $X_1, \ldots, Y_n$ Elemente $a_i, b_i$ von $\mathfrak{A}$ so zu, daß $A(a_i) = X_i$, $A(b_i) = Y_i$ ist; diese $a_i$ und $b_i$ sind nicht eindeutig bestimmt; aber ihre Restklassen modulo $\mathfrak{U}$ sind eindeutig bestimmt; daher ist nach Nr. 2 die Restklasse modulo $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{U})$, welcher das Element $C(a_1,\ldots,b_n)$ angehört, eindeutig bestimmt; diese Restklasse nennen wir $q_A(\alpha)$. Man verifiziert leicht, daß $q_A$ eine homomorphe Abbildung (im Sinne von Nr. 1) von $\Gamma_{\mathfrak{G}}$ auf die Faktorgruppe $\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}/\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{U})$ ist. Der Homomorphismus $q_A$ erzeugt eine Restklassengruppe von $\Gamma_{\mathfrak{G}}$ (Nr. 1); diese heiße $\mathfrak{G}_A$; es ist

$$\mathfrak{G}_A \cong \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}/\mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{U}) \ .$$

Der Kern des Homomorphismus $q_A$, also die Klasse derjenigen $\alpha = (X_1,\ldots,Y_n)$, zu denen es Elemente $a_i, b_i$ von $\mathfrak{A}$ mit

$$A(a_i) = X_i \quad , \quad A(b_i) = Y_i \quad , \quad C(a_1,\ldots,b_n) \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{U})$$

gibt, heiße $K_A$.

**4.** Jetzt sei $\mathfrak{F}$ eine *freie* Gruppe und $F$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{G}$; der Kern von $F$ heiße $\mathfrak{R}$. Dann ist gemäß der soeben besprochenen Konstruktion eine Restklassengruppe $\mathfrak{G}_F$ von $\Gamma_{\mathfrak{G}}$ gegeben; der Kern der zugehörigen Abbildung $q_F$ heiße $K_F$. Daneben betrachten wir weiter wie in Nr. 3 einen Homomorphismus $A$ einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{A}$ auf dieselbe Gruppe $\mathfrak{G}$. — Wir behaupten:[10a])

$$K_F \subset K_A \ . \tag{5}$$

Beweis: $\{e_1, e_2, \ldots\}$ sei ein freies Erzeugenden-System von $\mathfrak{F}$. Zu jedem $e_i$ gibt es in $\mathfrak{A}$ Elemente, die durch $A$ auf das Element $F(e_i)$ abgebildet sind; unter diesen Elementen von $\mathfrak{A}$ wählen wir je eines aus und nennen es $H(e_i)$; da die $e_i$ ein freies Erzeugenden-System bilden, gibt es einen Homomorphismus $H$ von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{A}$, der den Elementen $e_i$ die Elemente $H(e_i)$ zuordnet. Nach Definition von $H$ ist $AH(e_i) = F(e_i)$; dann ist auch

$$AH(x) = F(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathfrak{F} \ . \tag{6}$$

Hiernach ist speziell $AH(\mathfrak{R}) = F(\mathfrak{R}) = 1$, also

$$H(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{U} \ . \tag{7}$$

Aus (7) folgt

$$H\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{U}) \ . \tag{8}$$

Nun sei $\alpha = (X_1,\ldots,Y_n) \in K_F$; dann gibt es solche Elemente $x_i, y_i$ in $\mathfrak{F}$, daß

$$F(x_i) = X_i, F(y_i) = Y_i \ , \tag{9}$$

---

10a) Das Zeichen $\subset$ bedeute immer: „echter oder unechter Teil von".

$$C(x_1, \ldots, y_n) \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{N}) \tag{10}$$

ist. Wir setzen $H(x_i) = a_i$, $H(y_i) = b_i$. Dann folgt aus (6) und (9)

$$A(a_i) = X_i \ , \ A(b_i) = Y_i \, . \tag{11}$$

Da $H$ ein Homomorphismus ist, ist

$$C(a_1, \ldots, b_n) = HC(x_1, \ldots, y_n) \, ;$$

hieraus, aus (10) und (8) folgt

$$C(a_1, \ldots, b_n) \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{U}) \, . \tag{12}$$

(11) und (12) bedeuten: $\alpha \in K_A$. Somit gilt (5).

**5.** Jetzt seien $F, F'$ Homomorphismen zweier freier Gruppen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ auf $\mathfrak{G}$. Nach Nr. 4 ist $K_F \subset K_{F'}$ und $K_{F'} \subset K_F$, also $K_F = K_{F'}$. Dann sind nach der Bemerkung am Schluß von Nr. 1 die Gruppen $\mathfrak{G}_F$ und $\mathfrak{G}_{F'}$ miteinander identisch; mit anderen Worten: die Gruppe $\mathfrak{G}_F$ ist von $F$ unabhängig, wenn nur $\mathfrak{F}$ eine freie Gruppe ist.

Jede Gruppe $\mathfrak{G}$ ist homomorphes Bild freier Gruppen; man erhält einen solchen Homomorphismus, wenn man die Elemente eines beliebigen Erzeugenden-Systems von $\mathfrak{G}$ zugleich als freie Erzeugende einer freien Gruppe auffaßt. Daher ist für jede Gruppe $\mathfrak{G}$ die Gruppe $\mathfrak{G}_F$ erklärt; um die Unabhängigkeit von $F$ zu betonen, setzen wir $\mathfrak{G}_F = \mathfrak{G}^*$. Wir fassen die Konstruktions-Vorschrift für $\mathfrak{G}^*$ noch einmal zusammen:

*Die Gruppe $\mathfrak{G}$ sei gegeben. $\Gamma_{\mathfrak{G}}$ sei die Menge aller Systeme $(X_1, Y_1, \ldots, X_n, Y_n)$ mit $X_i \in \mathfrak{G}$, $Y_i \in \mathfrak{G}$; in $\Gamma_{\mathfrak{G}}$ sind „Summe" und „Inverses" gemäß Nr. 3 erklärt. $F$ sei ein Homomorphismus einer freien Gruppe $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{G}$; der Kern von $F$ heiße $\mathfrak{N}$; die Gruppen $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ und $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{N})$ sind in Nr. 2 definiert. Den Komponenten $X_i$, $Y_i$ jedes Elementes $\alpha = (X_1, \ldots, Y_n)$ von $\Gamma_{\mathfrak{G}}$ ordnen wir Elemente $x_i$, $y_i$ von $\mathfrak{F}$ zu, für welche $F(x_i) = X_i$, $F(y_i) = Y_i$ ist; dann ist die Restklasse von $\mathfrak{F}$ modulo $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{N})$, welche das Kommutatorelement $C(x_1, \ldots, y_n)$ enthält, durch $\alpha$ eindeutig bestimmt; sie heiße $q_F(\alpha)$. $q_F$ ist ein Homomorphismus von $\Gamma_{\mathfrak{G}}$ auf die Faktorgruppe $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}/\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{N})$; die von diesem Homomorphismus erzeugte Restklassengruppe von $\Gamma_{\mathfrak{G}}$ ist $\mathfrak{G}^*$. Sie ist unabhängig von $F$.*

*Es ist*

$$\mathfrak{G}^* \cong \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}} / \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{N}) \, . \tag{13}$$

Als Korollar ergibt sich: *Sind* $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ *freie Gruppen,* $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ *Normalteiler von ihnen, und ist*

$$\mathfrak{F} / \mathfrak{R} \cong \mathfrak{F}' / \mathfrak{R}' \ , \tag{14}$$

*so ist auch*

$$\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}} / \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R}) \cong \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}'} / \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}'}(\mathfrak{R}') \ . \tag{15}$$

Denn ist $\mathfrak{G}$ die durch jede der beiden Seiten von (14) erklärte abstrakte Gruppe, so ist jede der beiden Seiten von (15) mit der zugehörigen Gruppe $\mathfrak{G}^*$ isomorph.

**6.** Für unsere späteren Zwecke ist eine bestimmte Untergruppe $\mathfrak{G}_1^*$ von $\mathfrak{G}^*$ wichtig, die wir jetzt erklären werden.

Zu jedem Element $\alpha = (X_1, \ldots, Y_n)$ von $\Gamma_{\mathfrak{G}}$ gehört ein Element $C(X_1, \ldots, Y_n)$ von $\mathfrak{C}_{\mathfrak{G}}$, das wir $C(\alpha)$ nennen. Mit $\bar{\alpha}, \ldots$ bezeichnen wir die Restklassen von $\Gamma_{\mathfrak{G}}$, welche die Elemente von $\mathfrak{G}^*$ sind.

$F$ sei wieder ein Homomorphismus wie in Nr. 5. Da $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{R}$ ist, wird durch $F$ jeder Restklasse von $\mathfrak{F}$ modulo $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})$ ein bestimmtes Element von $\mathfrak{G}$ zugeordnet; daher ist für jedes $\alpha$ ein bestimmtes Element $Fq_F(\alpha)$ erklärt; aus der Definition von $q_F$ und der Homomorphie-Eigenschaft von $F$ folgt leicht:

$$Fq_F(\alpha) = C(\alpha) \ . \tag{16}$$

Hieraus ist ersichtlich: Sind $\alpha, \alpha'$ in derselben Klasse $\bar{\alpha}$ enthalten, ist also $q_F(\alpha) = q_F(\alpha')$, so ist $C(\alpha) = C(\alpha')$. Man kann daher statt $C(\alpha)$ auch $C(\bar{\alpha})$ schreiben. Unter $\Gamma_{\mathfrak{G}}^1$ verstehen wir die Menge der $\alpha$, für die $C(\alpha) = 1$, unter $\mathfrak{G}_1^*$ die Menge der $\bar{\alpha}$, für die $C(\bar{\alpha}) = 1$ ist. Aus (16) sieht man, daß die Bedingung $C(\alpha) = 1$ gleichbedeutend damit ist, daß $q_F(\alpha) \subset \mathfrak{R}$ ist; hierbei ist $q_F(\alpha)$ eine der Restklassen, in die $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ modulo $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})$ zerfällt; (eine beliebige dieser Restklassen ist, da $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{R}$ ist, entweder fremd zu $\mathfrak{R}$ oder in $\mathfrak{R}$ enthalten). Die in $\mathfrak{R}$ enthaltenen $q_F(\alpha)$ bilden die Untergruppe $(\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}})/\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})$ von $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}/\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})$; da diese $q_F(\alpha)$ den zu $\mathfrak{G}_1^*$ gehörigen $\alpha$ entsprechen, ist $\mathfrak{G}_1^*$ eine, mit der genannten Untergruppe isomorphe, Untergruppe von $\mathfrak{G}^*$. — Wir fassen zusammen:

$\mathfrak{G}_1^*$ *ist die Untergruppe der Restklassengruppe* $\mathfrak{G}^*$, *die aus denjenigen Restklassen* $\bar{\alpha}$ *besteht, für deren Elemente* $\alpha = (X_1, \ldots, Y_n)$ *die Kommutatoren* $C(\alpha) = C(X_1, \ldots, Y_n) = 1$ *sind.*

$\mathfrak{G}_1^*$ *ist daher ebenso wie* $\mathfrak{G}^*$ *vollständig durch* $\mathfrak{G}$ *bestimmt* (*unabhängig von dem als Hilfsmittel benutzten Homomorphismus* $F$).

Man kann $\mathfrak{G}_1^*$ auch so charakterisieren: *Der durch* $C(\alpha) = 1$ *bestimmte*

*Teil* $\Gamma^1_{\mathfrak{G}}$ *von* $\Gamma_{\mathfrak{G}}$ *wird durch* $q_F$ *homomorph auf die Gruppe* $(\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}})/\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})$ *abgebildet;* $\mathfrak{G}_1^*$ *ist die hierdurch erzeugte Restklassengruppe von* $\Gamma^1_{\mathfrak{G}}$ . *Es ist*

$$\mathfrak{G}_1^* \cong (\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}) / \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R}) \ . \tag{17}$$

In Analogie zu (15) erhält man das Korollar: *Unter der Voraussetzung* (14) *gilt*

$$(\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}})/\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R}) \cong (\mathfrak{R}' \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}'})/\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}'}(\mathfrak{R}') \ . \tag{18}$$

Aus (17) ist übrigens ersichtlich, daß $\mathfrak{G}_1^*$ eine Abelsche Gruppe ist; denn die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ ist in der Kommutatorgruppe von $\mathfrak{R}$ , also auch in deren Obergruppe $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})$ enthalten.

Wir bemerken noch folgendes: durch die oben eingeführte Funktion $C(\bar{\alpha})$ wird $\mathfrak{G}^*$ homomorph auf $\mathfrak{C}_{\mathfrak{G}}$ abgebildet, und $\mathfrak{G}_1^*$ ist der Kern dieses Homomorphismus; daher ist

$$\mathfrak{G}^* / \mathfrak{G}_1^* \cong \mathfrak{C}_{\mathfrak{G}} \ . \tag{19}$$

Damit brechen wir die gruppentheoretischen Betrachtungen ab; sie werden in Nr. 19, wozu auch der „Anhang" gehört, fortgesetzt werden.

## § 2. Homotopie-Ränder, Kugelbilder und Fundamentalgruppe

7. *Homotopie-Ränder.* $E$ sei ein zweidimensionales Element, d. h. eine abgeschlossene Kreisscheibe oder ein topologisches Bild einer solchen; $E$ sei orientiert; $\varrho$ sei die Randkurve von $E$, einmal im positiven Sinne durchlaufen. $K$ sei ein simplizialer Komplex, $f$ eine simpliziale Abbildung einer Simplizialzerlegung von $E$ in den Komplex $K$ . Dann ist $f(E) = Y$ ein zweidimensionaler algebraischer Komplex[11]) in $K$ und $f(\varrho) = \mathfrak{r}$ ein geschlossener Kantenweg in $K$ [12]). Unter diesen Umständen sagen wir: „$\mathfrak{r}$ *ist ein Homotopie-Rand von* $Y$."

Dieser Begriff des „simplizialen" Homotopie-Randes ist nur wenig spezieller als der folgendermaßen erklärte Begriff des „stetigen" Homotopie-Randes. Mit $K^r$ bezeichnen wir den Komplex der höchstens $r$-dimensionalen Simplexe von $K$ ; die durch $K$, $K^r$ bestimmten Polyeder nennen wir $\overline{K}$, $\overline{K}^r$ [11]). Wir betrachten nur solche stetige Abbildungen $f$ von $E$ in $\overline{K}$, daß [10a])

$$f(\varrho) \subset \overline{K}^1 \ , \ f(E) \subset \overline{K}^2 \tag{1}$$

[11]) Terminologie wie bei *Alexandroff-Hopf*, l. c. [9]).

[12]) Wegen des Begriffes „geschlossener Weg" vgl. man die Bücher von *Seifert-Threlfall*[1]), 149ff., und *Alexandroff-Hopf*[9]), 332ff.; dieser Begriff ist verschieden von dem Begriff „eindimensionaler Zyklus" (oder „eindimensionale geschlossene Kette").

ist; dann hat die Abbildung $f$ von $E$ in jedem zweidimensionalen orientierten Simplex $y_i$ von $K$ einen bestimmten Grad $c_i$, und nur endlich viele $c_i$ sind nicht 0; wir definieren den algebraischen Komplex $Y = f(E)$ durch $Y = \Sigma c_i y_i$; das Bild $f(\varrho) = \mathfrak{r}$ ist ein stetiger geschlossener Weg in $\overline{K}^1$ [12]). *Wir nennen* $\mathfrak{r}$ *einen (stetigen) Homotopie-Rand des algebraischen Komplexes* $Y$.

8. Der Komplex $K$ sei zusammenhängend; er kann übrigens endlich oder unendlich sein; die Komplexe $K^r$ seien wie oben erklärt. Ein Eckpunkt $O$ sei ausgezeichnet. $\mathfrak{F}$ sei die Fundamentalgruppe von $K^1$; wir repräsentieren ihre Elemente in bekannter Weise durch geschlossene Wege in $K^1$, deren Anfangs- und Endpunkte in $O$ zusammenfallen. Ferner sei auf dem Rande jedes Elementes $E$ ein Punkt $a$ ausgezeichnet; wir betrachten nur solche stetige Abbildungen $f$ von $E$ in $\overline{K}$, welche (1) erfüllen und für welche $f(a) = O$ ist; dann repräsentieren die Randbilder $\mathfrak{r} = f(\varrho)$ Elemente der Gruppe $\mathfrak{F}$. — Kleine deutsche Buchstaben sollen bis auf weiteres immer geschlossene Wege in $\overline{K}$ durch den Punkt $O$ bezeichnen.

Unter $\mathfrak{R}$ verstehen wir die Menge derjenigen Elemente von $\mathfrak{F}$, welchen geschlossene Wege in $\overline{K}^1$ entsprechen, die in $\overline{K}$ auf einen Punkt zusammenziehbar sind; diese Wege sind dann bekanntlich bereits in $\overline{K}^2$ auf einen Punkt zusammenziehbar; ebenso ist bekannt oder leicht zu sehen, daß $\mathfrak{R}$ Normalteiler von $\mathfrak{F}$ ist. $\mathfrak{C}$ bezeichne die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{F}$; die von den Elementen $x\,r\,x^{-1}\,r^{-1}$ mit $x \in \mathfrak{F}$, $r \in \mathfrak{R}$ erzeugte Gruppe heiße $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$; daraus, daß $\mathfrak{R}$ Normalteiler ist, folgt: $\mathfrak{C}(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{R}$.

Wir werden jetzt eine Reihe von Tatsachen zusammenstellen, die sich auf den Zusammenhang beziehen, der durch die Bildung der (stetigen) Homotopie-Ränder zwischen den algebraischen Komplexen $Y$ in $K^2$ und der Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$ von $K^1$ sowie deren Untergruppen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ vermittelt wird.

a) $\mathfrak{r}$ *ist dann und nur dann ein Homotopie-Rand, wenn das durch* $\mathfrak{r}$ *repräsentierte Element* $r$ *von* $\mathfrak{F}$ *zu* $\mathfrak{R}$ *gehört.*

Denn die Tatsache, daß $\mathfrak{r}$ Homotopie-Rand ist, ist gleichbedeutend mit der Existenz einer Abbildung $f$ eines Elementes $E$, für welche $f(E) \subset \overline{K}^2$, $f(\varrho) = \mathfrak{r}$ ist, wobei $\varrho$ wieder den Rand von $E$ bezeichnet; dieselbe Bedingung ist aber auch charakteristisch dafür, daß $\mathfrak{r}$ in $\overline{K}^2$ auf einen Punkt zusammenziehbar ist, also, wie oben bemerkt, dafür, daß $r \in \mathfrak{R}$ ist.

b) *Es sei* $r_1 \in \mathfrak{R}$, $x \in \mathfrak{F}$, $r_2 = x^{-1}\,r_1\,x$; $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ *seien Wege, welche* $r_1$, $r_2$ *repräsentieren;* $\mathfrak{r}_1$ *sei Homotopie-Rand von* $Y$. *Dann ist auch* $\mathfrak{r}_2$ *Homotopie-Rand von* $Y$.

Beweis: Da $r_2 = x^{-1} r_1 x$ ist, sind $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ einander „frei homotop" auf $\overline{K}^1$, d.h. $\mathfrak{r}_1$ läßt sich auf $\overline{K}^1$ stetig in $\mathfrak{r}_2$ deformieren, ohne daß dabei ein Punkt festgehalten zu werden braucht[13]). Es gibt daher eine solche Abbildung $f'$ eines von zwei Kreisen $\varrho_1$, $\varrho_2$ begrenzten Kreisringes $R$, daß $f'(\varrho_1) = \mathfrak{r}_1$, $f'(\varrho_2) = \mathfrak{r}_2$, $f'(R) \subset \overline{K}^1$ ist. Hierbei sei $\varrho_1$ der innere Randkreis von $R$; da $\mathfrak{r}_1$ Homotopie-Rand von $Y$ ist, gibt es eine solche Abbildung $f_1$ der von $\varrho_1$ begrenzten Kreisscheibe $E_1$, daß $f_1$ auf $\varrho_1$ mit $f'$ übereinstimmt und daß $f_1(E_1) = Y$ ist. $f_1$ und $f'$ zusammen bilden eine Abbildung $f_2$ der von $\varrho_2$ begrenzten Kreisscheibe $E_2$; da $f_2(R) = f'(R) \subset \overline{K}^1$ ist, liefert das Bild von $R$ keinen Beitrag zu dem algebraischen Komplex $f_2(E_2)$, und daher ist $f_2(E_2) = f_1(E_1) = Y$; da außerdem $f_2(\varrho_2) = f'(\varrho_2) = \mathfrak{r}_2$ ist, ist $\mathfrak{r}_2$ Homotopie-Rand von $Y$.

Bemerkung: Von dem hiermit bewiesenen Satz ist besonders auch der Spezialfall wichtig, in dem $r_2 = r_1$ ist.

c) $y$ sei ein zweidimensionales orientiertes Simplex von $K$; unter einer „Schleife um $y$" verstehen wir einen geschlossenen Weg folgender Art: man läuft erst von $O$ auf einem (in $K^1$ gelegenen) Weg $w$ bis in einen Eckpunkt von $y$, dann durchläuft man den Rand von $y$ einmal im positiven Sinne, schließlich läuft man auf $w$, in der entgegengesetzten Richtung wie zuerst, nach $O$ zurück.

Behauptung: *Jede Schleife um $y$ ist Homotopie-Rand von $y$.* Den Beweis führt man leicht durch geeignete (z. B. simpliziale) Abbildung eines Elementes auf die aus den Punkten von $y$ und $w$ bestehende Punktmenge.

d) *Ist $\mathfrak{r}$ Homotopie-Rand von $Y$, so ist der inverse Weg $\mathfrak{r}^{-1}$ Homotopie-Rand des Komplexes $-Y$; sind $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ Homotopie-Ränder von $Y_1$, $Y_2$, so ist der zusammengesetzte Weg $\mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{r}_2$ Homotopie-Rand von $Y = Y_1 + Y_2$.*

Der Beweis des ersten Teiles ist klar. Um den zweiten Teil zu beweisen, hefte man die beiden Elemente $E_1$, $E_2$, welche durch $f_1$, $f_2$ so abgebildet sind, daß $f_i(E_i) = Y_i$, $f_i(\varrho_i) = \mathfrak{r}_i$ ist, in ihren Randpunkten $a_1$, $a_2$, welche durch $f_1$, $f_2$ auf $O$ abgebildet sind, zusammen; auf diesen Komplex $E_1 + E_2$ bilde man ein Element $E$ durch eine Abbildung $f'$ so ab, daß $E_1$ und $E_2$ mit dem Grade 1 bedeckt werden, daß der Rand $\varrho$ von $E$ in den aus den beiden Rändern zusammengesetzten Weg $\varrho_1 \cdot \varrho_2$ übergeht, und daß ein vorgegebener Randpunkt $a$ von $E$ auf $a_1 = a_2$ abgebildet wird; für die Abbildung $f$ von $E$, die entsteht, wenn man erst $f'$, dann $f_1$ und $f_2$ ausführt, ist $f(E) = Y_1 + Y_2$, $f(\varrho) = \mathfrak{r}_1 \cdot \mathfrak{r}_2$.

---

[13]) *Seifert-Threlfall*, § 49.

e) Durch den soeben geführten Beweis ist zugleich folgendes gezeigt worden: wenn die Komplexe $Y_1$, $Y_2$ Bilder $f_1(E_1)$, $f_2(E_2)$ von Elementen sind — mit den Nebenbedingungen $f_1(a_1) = f_2(a_2) = O$ —, so ist auch $Y = Y_1 + Y_2$ Bild $f(E)$ eines Elementes — mit der Nebenbedingung $f(a) = O$. Ferner geht aus c) hervor, daß jedes Simplex $y_i$ von $K^2$ Bild eines Elementes ist — ebenfalls mit der Nebenbedingung, daß ein vorgeschriebener Randpunkt des Elementes auf $O$ abgebildet wird. Durch Kombination dieser Tatsachen ergibt sich:

*Jeder Komplex $Y = \Sigma c_i y_i$ ist Bild eines Elementes $E$, und zwar so, daß ein vorgeschriebener Randpunkt von $E$ auf $O$ abgebildet wird; jeder Komplex $Y$ besitzt daher Homotopie-Ränder, und zwar solche, welche geschlossene Wege durch den Punkt $O$ sind.*

f) *Jeder Weg $\mathfrak{r}$, der ein Element $r$ der Gruppe $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ repräsentiert, ist Homotopie-Rand des Nullkomplexes $Y = 0$.*

Beweis: Es sei $r \in \mathfrak{C}(\mathfrak{R})$; dann ist $r = \Pi(x_i\, r_i\, x_i^{-1}\, r_i^{-1})^{\pm 1}$ mit $r_i \in \mathfrak{R}$, $x_i \in \mathfrak{F}$. Nach a) und b) gibt es zu jedem $i$ einen Komplex $Y_i$, so daß sowohl die Wege, die zu dem Element $r_i$, als auch die Wege, die zu dem Element $x_i\, r_i\, x_i^{-1}$ gehören, Homotopie-Ränder von $Y_i$ sind; nach dem ersten Teil von d) sind die zu $r_i^{-1}$ gehörigen Wege Homotopie-Ränder von $-Y_i$; nach dem zweiten Teil von d) sind daher die zu $x_i\, r_i\, x_i^{-1}\, r_i^{-1}$ gehörigen Wege Homotopie-Ränder von $Y_i - Y_i = 0$; und ebenfalls nach d) sind daher auch die zu $r$ gehörigen Wege Homotopie-Ränder des Komplexes $0$.

g) *Der Weg $\mathfrak{r}$ sei Homotopie-Rand des Nullkomplexes. Dann ist das durch $\mathfrak{r}$ repräsentierte Element $r$ von $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ enthalten.*

Beweis: Es gibt eine Abbildung $f$ von $E$ mit $f(E) = 0$, $f(\varrho) = \mathfrak{r}$, $f(a) = O$. Beim Übergang zu einer simplizialen Approximation von $f$ ändert sich weder das durch $f(\varrho)$ repräsentierte Element von $\mathfrak{F}$, noch, wie sich aus den Grundeigenschaften des Abbildungsgrades ergibt, der algebraische Komplex $f(E)$; außerdem kann man dafür sorgen, daß $O$ das Bild von $a$ bleibt. Daher können wir $f$ von vornherein als simplizial annehmen.

Die Simplizialzerlegung von $E$, die der simplizialen Abbildung $f$ zugrundeliegt, ist ein Komplex $E^2$; mit $E^1$ bezeichnen wir den Kantenkomplex von $E^2$; die Fundamentalgruppe von $E^1$ heiße $\Phi$; wir repräsentieren ihre Elemente durch geschlossene Wege durch den Eckpunkt $a$; die Kommutatorgruppe von $\Phi$ heiße $\Gamma$. Die zweidimensionalen Simplexe von $E^2$ seien $\eta_\lambda$; sie seien so orientiert, daß $\Sigma \eta_\lambda = E$ das orientierte Element ist. Für jedes $\lambda$ sei $\varrho_\lambda$ eine feste „Schleife" um $\eta_\lambda$, die analog wie unter c) definiert ist, mit dem Anfangs- und Endpunkt $a$. Der Randweg des orientierten Elementes $E$ sei $\varrho$.

Die Wege $\varrho$, $\varrho_\lambda$ repräsentieren im Sinne der Homologietheorie Zyklen $\varrho'$, $\varrho'_\lambda$ des Komplexes $E^1$; aus $\Sigma\eta_\lambda = E$ folgt

$$\varrho' = \Sigma \varrho'_\lambda \ . \tag{2}$$

Nun ist der Zusammenhang zwischen der Fundamentalgruppe und der Gruppe der eindimensionalen Zyklen eines Komplexes $E^1$ bekanntlich derart, daß man $\varrho'$, $\varrho'_\lambda$ als diejenigen Restklassen von $\Phi$ mod. $\Gamma$ auffassen kann, welche die durch $\varrho$ bzw. $\varrho_\lambda$ repräsentierten Elemente von $\Phi$ enthalten[1]). Daher ist (2) gleichbedeutend mit der Tatsache, daß der Weg $\varrho$ sich folgendermaßen aus den Wegen $\varrho_\lambda$ und einem Weg $\gamma$, der ein Element von $\Gamma$ repräsentiert, zusammensetzen läßt:

$$\varrho = \gamma \cdot \Pi \varrho_\lambda \ . \tag{3}$$

Durch Ausübung der Abbildung $f$ folgt aus (3)

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{c} \cdot \Pi \mathfrak{r}_\lambda \ ; \tag{4}$$

hierin bezeichnet $\mathfrak{c}$ einen Weg, der ein Element $c$ der Gruppe $f(\Gamma)$ repräsentiert, und es ist $f(\varrho_\lambda) = \mathfrak{r}_\lambda$ gesetzt; die durch $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}_\lambda$ repräsentierten Elemente von $\mathfrak{F}$ seien $r$, $r_\lambda$. Unsere Behauptung, daß $r \in \mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ sei, können wir auf Grund von (4) in zwei Teile zerlegen:

$$(5_1) \quad c \in \mathfrak{C}(\mathfrak{R}) \quad ; \qquad (5_2) \quad \Pi r_\lambda \in \mathfrak{C}(\mathfrak{R}) \, .$$

Beweis von $(5_1)$: Da $E$ ein Element ist, ist jeder geschlossene Weg des Komplexes $E^1$ in $E$ auf einen Punkt zusammenziehbar; daher ist auch das durch $f$ gelieferte Bild eines solchen Weges in $\overline{K}$ zusammenziehbar; das bedeutet: $f(\Phi) \subset \mathfrak{R}$. Folglich ist $f(\Gamma)$ in der Kommutatorgruppe von $\mathfrak{R}$, also erst recht in deren Obergruppe $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ enthalten. Mithin gilt $(5_1)$.

Beweis von $(5_2)$: Das Bild $f(\eta_\lambda)$ eines Simplexes $\eta_\lambda$ von $E^2$ ist entweder 0 oder ein Simplex $\pm y_i$ von $K^2$; im ersten Fall wird der einmal durchlaufene Rand von $\eta_\lambda$ auf einen Punkt oder auf eine hin und her durchlaufene Strecke abgebildet, und daher ist das Bild $\mathfrak{r}_\lambda$ der Schleife $\varrho_\lambda$ offenbar in $\overline{K}$ zusammenziehbar, also ist dann $r_\lambda$ das Eins-Element von $\mathfrak{F}$; im zweiten Fall ist $\mathfrak{r}_\lambda$ eine Schleife um $\pm y_i$. Wir lassen nun aus dem Produkt $\Pi r_\lambda = p$ die Faktoren $r_\lambda$ weg, die gleich 1 sind; dann ist $p$ als Produkt von Elementen $r_\lambda$ dargestellt, welche Schleifen $\mathfrak{r}_\lambda$ um die

Simplexe $\pm y_i$ entsprechen. Dabei treten für jedes $|y_i|$ ebensoviele positive wie negative Schleifen auf; denn deren Anzahlen sind gleich den Anzahlen der positiven bzw. negativen Bedeckungen, die das Simplex $y_i$ durch Bilder $f(\eta_\lambda)$ erleidet, und diese beiden Anzahlen sind einander gleich, da $f(E) = 0$ ist.

Wir rechnen modulo der Gruppe $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$; dann dürfen wir, da $r_\lambda \in \mathfrak{R}$ ist, in dem Produkt $p = \prod_\lambda r_\lambda$ je zwei Faktoren $r_\lambda$ miteinander vertauschen; daher ist

$$p \equiv \prod_i p_i \qquad \mathrm{mod.}\, \mathfrak{C}(\mathfrak{R}) \ ,$$

wobei $p_i$ das Produkt derjenigen $r_\lambda$ bezeichnet, welche durch Schleifen um $\pm y_i$ repräsentiert werden. Die Behauptung $(5_2)$ wird bewiesen sein, wenn wir für jedes einzelne $i$ gezeigt haben, daß $p_i \in \mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ ist.

$\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ seien zwei Schleifen um $y_i$; dann ist $\mathfrak{r}_1 = w_1 u w_1^{-1}$, $\mathfrak{r}_2 = w_2 u w_2^{-1}$, wobei $u$ den Randweg von $y_i$ und $w_1$, $w_2$ zwei Wege von $O$ nach demselben Eckpunkt von $y_i$ bezeichnen[14]); dann ist $\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{x}\mathfrak{r}_1\mathfrak{x}^{-1}$, wobei $\mathfrak{x} = w_2 w_1^{-1}$ ein geschlossener Weg durch $O$ ist. Zwischen den durch $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ repräsentierten Elementen $r_1$, $r_2$ von $\mathfrak{F}$ besteht also eine Beziehung $r_2 = x r_1 x^{-1}$ mit $x \in \mathfrak{F}$; hieraus sieht man, daß $r_2 \equiv r_1$ mod. $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ ist. Bezeichnet nun $s_i$ ein Element, das durch eine feste Schleife um $y_i$ repräsentiert wird, so ist aus dem Vorstehenden ersichtlich, daß jeder der Faktoren $r_\lambda$ des Produktes $p_i$ entweder mit $s_i$ oder mit $s_i^{-1}$ kongruent mod. $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ ist; es ist daher $p_i \equiv s_i^{c_i}$ mod. $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$, wobei $c_i$ die Anzahl der positiven Schleifen $\mathfrak{r}_\lambda$ um $y_i$, vermindert um die Anzahl der negativen Schleifen $\mathfrak{r}_\lambda$ um $y_i$ ist. Wir haben oben gesehen, daß $c_i = 0$ ist; folglich st $p_i \equiv 1$ mod. $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$. Damit ist $(5_2)$ bewiesen.

h) $\mathfrak{r}$ *sei Homotopie-Rand von* $Y$ *; dann besteht die Gesamtheit aller Homotopie-Ränder von* $Y$ *aus denjenigen Wegen* $\mathfrak{r}'$, *für welche* $r' \equiv r$ *mod.* $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ *ist, wobei* $r$, $r'$ *wieder die durch* $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$ *repräsentierten Gruppenelemente bezeichnen.*

Der Beweis ergibt sich leicht aus f), g) und d).

i) $S$ sei eine Kugelfläche, $g$ eine stetige Abbildung von $S$ in das Polyeder $\overline{K}^2$; diese Abbildung hat in jedem Simplex $y_i$ von $K^2$ einen bestimmten Grad $c_i$, und nur endlich viele $c_i$ sind nicht $0$; den Komplex $Y = \sum c_i y_i$ nennen wir ein (stetiges) „*Kugelbild*" und setzen $g(S) = Y$. Ist $g'$ eine simpliziale Approximation von $g$, so ergibt sich aus bekannten

---

[14]) Man darf annehmen, daß die Eckpunkte $e_1$, $e_2$ von $y_i$, in denen $w_1$ und $w_2$ enden, zusammenfallen; wenn dies zunächst nicht so ist, so verlängere man $w_2$ zu einem Weg $w_2'$, indem man auf dem Rande von $y_1$ im negativen Sinne von $e_2$ bis $e_1$ läuft, und ersetze $w_2$ durch $w_2'$.

Eigenschaften der simplizialen Approximationen und des Abbildungsgrades, daß $g'(S) = g(S)$ ist; ein Komplex $Y$, der stetiges Kugelbild ist, ist also auch „simpliziales" Kugelbild. Natürlich sind alle Kugelbilder Zyklen.

Ist $Y$ Kugelbild, $Y = g(S)$, so gibt es auch eine solche Abbildung $g_1$ einer Kugel $S_1$, daß $Y = g_1(S_1)$ ist, und daß ein Punkt $a_1$ von $S_1$ auf $O$ abgebildet wird. Um $g_1$ zu konstruieren, befestige man eine Strecke $s$ mit einem Endpunkt $q$ an $S$ und erweitere $g$ zu einer Abbildung $g'$ von $s + S$, indem man $s$ auf einen Streckenzug in $K$ abbildet, der $O$ mit $g(q)$ verbindet; ferner sei $h$ eine Abbildung von $S_1$ auf $s + S$, welche $a_1$ auf den freien Endpunkt von $s$, die Halbkugel, deren Mittelpunkt $a_1$ ist, auf $s$, den Äquator, der die Halbkugel begrenzt, auf $q$ und die andere Halbkugel mit dem Grade 1 auf $S$ abbildet; dann leistet die Abbildung $g_1 = g'h$ das Gewünschte. Man erhält also auch dann alle Kugelbilder in $K$, wenn man nur solche Abbildungen einer Kugel $S_1$ zuläßt, bei denen ein Punkt $a_1$ auf $O$ abgebildet wird; die so erhaltenen Bilder $Y$ sind aber offenbar identisch mit denjenigen Bildern $f(E)$ eines Elementes $E$, bei denen das Bild des Randes $\varrho$ nur aus dem Punkt $O$ besteht. Dies können wir auch so ausdrücken:

*Die Kugelbilder in $K$ sind diejenigen Komplexe $Y$, welche einen Homotopie-Rand haben, der nur aus einem Punkt besteht.*

Auf Grund von h) ist diese Aussage gleichbedeutend mit der folgenden:

*$Y$ ist dann und nur dann Kugelbild, wenn die Homotopie-Ränder von $Y$ die Elemente der Gruppe $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ repräsentieren.*

j) Jedem geschlossenen Weg $\mathfrak{x}$ in $K^1$ ist in bekannter Weise ein eindimensionaler Zyklus $X$ zugeordnet: für jedes eindimensionale orientierte Simplex $s_i$ von $K^1$ gebe die Zahl $b_i$ an, wie oft $s_i$ im algebraischen Sinne von $\mathfrak{x}$ durchlaufen wird; mit anderen Worten: ist $\mathfrak{x} = f(\varrho)$, $\varrho$ eine Kreislinie, so ist $b_i$ der Grad der Abbildung $f$ in $s_i$; dann ist $X = \Sigma b_i s_i$. Wir setzen $X = B(\mathfrak{x})$. Die Zuordnung $B$ ist homomorph in dem Sinne, daß $B(\mathfrak{x}_1 \cdot \mathfrak{x}_2) = B(\mathfrak{x}_1) + B(\mathfrak{x}_2)$, $B(\mathfrak{x}^{-1}) = -B(\mathfrak{x})$ ist. Bekanntlich ist dann und nur dann $B(\mathfrak{x}) = 0$, wenn das durch $\mathfrak{x}$ repräsentierte Element von $\mathfrak{F}$ in der Kommutatorgruppe $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{F}$ enthalten ist. [1]) Hieraus und aus der Homomorphie-Eigenschaft folgt noch: dann und nur dann ist $B(\mathfrak{x}_1) = B(\mathfrak{x}_2)$, wenn die durch $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$ repräsentierten Elemente von $\mathfrak{F}$ einander kongruent mod. $\mathfrak{C}$ sind.

Für zweidimensionale Komplexe $Y$, $y_i$ sollen $\dot{Y}$, $\dot{y}_i$ ihre Ränder im Sinne der Homologietheorie bezeichnen. — Wir behaupten:

*Ist $\mathfrak{x}$ Homotopie-Rand von $Y$, so ist $B(\mathfrak{x}) = \dot{Y}$.*

Beweis: Sind $\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'$ zwei Homotopie-Ränder von $Y$, so sind nach h) die durch sie repräsentierten Elemente $r, r'$ einander kongruent mod. $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$; sie sind also, da $\mathfrak{C}(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{C}$ ist, einander auch kongruent mod. $\mathfrak{C}$; folglich ist, wie oben bemerkt, $B(\mathfrak{r}) = B(\mathfrak{r}')$. Daher genügt es, die für alle Homotopie-Ränder von $Y$ ausgesprochene Behauptung für einen speziellen Homotopie-Rand $\mathfrak{r}$ von $Y$ zu beweisen.

Es sei $Y = \Sigma c_i y_i$, wobei $y_i$ wieder zweidimensionale Simplexe sind. Für jedes $i$ sei $\mathfrak{r}_i$ eine Schleife um $y_i$; aus c) und d) folgt, daß $\mathfrak{r} = \Pi \mathfrak{r}_i^{c_i}$ ein Homotopie-Rand von $Y$ ist. Für die Schleifen $\mathfrak{r}_i$ folgt aus der Definition von $B$ unmittelbar, daß $B(\mathfrak{r}_i) = \dot{y}_i$ ist; aus der Homomorphie-Eigenschaft von $B$ folgt $B(\mathfrak{r}) = \Sigma c_i B(\mathfrak{r}_i)$; somit ist $B(\mathfrak{r}) = \Sigma c_i \dot{y}_i = \dot{Y}$.

In dem hiermit bewiesenen Satz ist der folgende enthalten:

*$Y$ ist dann und nur dann Zyklus, wenn die Homotopie-Ränder von $Y$ Elemente der Gruppe $\mathfrak{C}$ repräsentieren.*

Denn daß $Y$ Zyklus ist, ist gleichbedeutend mit: $\dot{Y} = 0$; und daß $\mathfrak{r}$ ein Element von $\mathfrak{C}$ repräsentiert, ist gleichbedeutend mit: $B(\mathfrak{r}) = 0$.

k) Wir fassen unsere bisherigen Ergebnisse zusammen. Auf Grund von a), e) und h) ist jedem Komplex $Y$ eine bestimmte Restklasse der Gruppe $\mathfrak{R}$ modulo $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ zugeordnet, nämlich diejenige, deren Elemente durch die Homotopie-Ränder von $Y$ repräsentiert werden; wir nennen diese Restklasse $T(Y)$. Die Gruppe der zweidimensionalen Komplexe $Y$ in $K$ heiße $\mathfrak{L}^2$; dann ist also $T$ eine Abbildung von $\mathfrak{L}^2$ in die Gruppe $\mathfrak{R}/\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$; aus a) folgt, daß dies eine Abbildung auf die ganze Gruppe $\mathfrak{R}/\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ ist, und aus d), daß die Abbildung ein Homomorphismus ist. Nehmen wir noch die Sätze i) und j) hinzu, so erhalten wir folgenden Satz:

*Satz I. Für jeden zweidimensionalen algebraischen Komplex $Y$ in $K$ bilden diejenigen Elemente der Gruppe $\mathfrak{F}$, welche durch die Homotopie-Ränder von $Y$ repräsentiert werden, eine der Restklassen, in welche die Gruppe $\mathfrak{R}$ modulo $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ zerfällt; nennen wir diese Restklasse $T(Y)$, so ist $T$ eine homomorphe Abbildung der Gruppe $\mathfrak{L}^2$ aller Komplexe $Y$ auf die Faktorgruppe $\mathfrak{R}/\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$; der Kern dieses Homomorphismus — also die Urbildmenge der Eins der Bildgruppe — besteht aus denjenigen $Y$, welche Kugelbilder sind. Die Zyklen sind unter den Komplexen $Y$ dadurch ausgezeichnet, daß die Elemente der Restklassen $T(Y)$ der Gruppe $\mathfrak{C}$ angehören; die Gruppe $\mathfrak{Z}^2$ der Zyklen wird also durch $T$ auf die Faktorgruppe $(\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C})/\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ abgebildet.*

Dabei ist — um daran zu erinnern —: $\mathfrak{F}$ die Fundamentalgruppe des Kantenkomplexes $K^1$ von $K$; $\mathfrak{R}$ die Untergruppe von $\mathfrak{F}$, die durch die in $\overline{K}$ zusammenziehbaren Wege repräsentiert wird; $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ die von allen Elementen $x\,r\,x^{-1}\,r^{-1}$ mit $x \in \mathfrak{F}$, $r \in \mathfrak{R}$ erzeugte Gruppe; $\mathfrak{C}$ die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{F}$.

9. *Die Gruppen* $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2$ *und* $\mathfrak{G}_1^*$. Die zweidimensionalen Zyklen des Komplexes $K$ bilden eine Untergruppe $\mathfrak{Z}^2$ von $\mathfrak{L}^2$. Auch die Kugelbilder bilden eine Gruppe; das kann man sowohl leicht direkt beweisen, als auch dem Satz I entnehmen, da die Kugelbilder den Kern des Homomorphismus $T$ bilden; diese Gruppe heiße $\overline{\mathfrak{S}}^2$. Sie ist Untergruppe von $\mathfrak{Z}^2$. Diejenigen Zyklen, welche homolog 0 in $K$ sind, bilden eine Untergruppe $\mathfrak{H}^2$ von $\mathfrak{Z}^2$; sie wird von den Rändern der dreidimensionalen Simplexe von $K$ erzeugt, und diese Simplexränder sind natürlich Kugelbilder; folglich ist $\mathfrak{H}^2 \subset \overline{\mathfrak{S}}^2$. Die Bettische Gruppe $\mathfrak{B}^2$, also die Gruppe der Homologieklassen, ist als die Faktorgruppe $\mathfrak{Z}^2/\mathfrak{H}^2$ definiert[15]. Daraus, daß $\mathfrak{H}^2 \subset \overline{\mathfrak{S}}^2$ ist, folgt, daß eine Homologieklasse entweder zu $\overline{\mathfrak{S}}^2$ fremd oder in $\overline{\mathfrak{S}}^2$ enthalten ist; die in $\overline{\mathfrak{S}}^2$ enthaltenen Homologieklassen, also diejenigen, deren Zyklen Kugelbilder sind, bilden die Untergruppe $\mathfrak{S}^2 = \overline{\mathfrak{S}}^2/\mathfrak{H}^2$ von $\mathfrak{B}^2$. Da eine Homologieklasse, die stetige Kugelbilder enthält, auch simpliziale Kugelbilder enthält, ist es übrigens klar, daß die Gruppe $\mathfrak{S}^2$, ebenso wie $\mathfrak{B}^2$, eine topologische Invariante des Polyeders $\overline{K}$ ist.

Bei dem natürlichen Homomorphismus von $\mathfrak{Z}^2$ auf $\mathfrak{B}^2$, der jedem Zyklus die ihn enthaltende Homologieklasse zuordnet, ist $\overline{\mathfrak{S}}^2$ das Urbild von $\mathfrak{S}^2$; daher ist

$$\mathfrak{Z}^2/\overline{\mathfrak{S}}^2 \cong \mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2 . \tag{6}$$

Nach dem Satz I bildet $T$ die Gruppe $\mathfrak{Z}^2$ homomorph auf die Gruppe $(\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C})/\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$ ab, und der Kern dieses Homomorphismus ist $\overline{\mathfrak{S}}^2$; daher ist

$$\mathfrak{Z}^2/\overline{\mathfrak{S}}^2 \cong (\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C})/\mathfrak{C}(\mathfrak{R}) . \tag{7}$$

Jetzt betrachten wir die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von $K$ und die mit ihr gemäß Nr. 6 verknüpfte Gruppe $\mathfrak{G}_1^*$. Es liegt ein natürlicher Homomorphismus $F$ von $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{G}$ vor: jedem Element $x$ von $\mathfrak{F}$, als Wegeklasse von $K^1$ aufgefaßt, ist diejenige Wegeklasse $X = F(x)$ in $K$ — also ein Element von $\mathfrak{G}$ — zugeordnet, in welcher die Klasse $x$ enthalten ist. Der Kern dieses Homomorphismus $F$ ist $\mathfrak{R}$. $\mathfrak{F}$ ist als Fundamental-

[15]) Der Koeffizientenbereich für die Zyklen und Homologien ist in dieser Arbeit immer der Ring der ganzen Zahlen.

gruppe eines eindimensionalen Komplexes eine freie Gruppe[16]). Daher ist nach Nr. 6 [17])

$$\mathfrak{G}_1^* \cong (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{C}) / \mathfrak{C}(\mathfrak{N}) \ . \tag{8}$$

Mit (6), (7) und (8) haben wir das folgende Hauptresultat erhalten:

*Satz II. Für jedes zusammenhängende (endliche oder unendliche) Polyeder sind die Bettische Gruppe* $\mathfrak{B}^2$, *die Gruppe* $\mathfrak{S}^2$ *der Homologieklassen, die Kugelbilder enthalten, und die Fundamentalgruppe* $\mathfrak{G}$ *durch die Beziehung*

$$\mathfrak{B}^2 / \mathfrak{S}^2 \cong \mathfrak{G}_1^* \tag{9}$$

*miteinander verknüpft; dabei ist* $\mathfrak{G}_1^*$ *die Gruppe, die gemäß Nr.* 6 *in algebraischer Weise durch die Gruppe* $\mathfrak{G}$ *gegeben ist.*

**10.** Der Satz II läßt sich noch präzisieren. Die in (9) stehenden Gruppen sind ja nicht nur als abstrakte Gruppen gegeben, sondern sie haben für den Komplex $K$ — und sogar für das Polyeder $\overline{K}$ — bestimmte geometrische Bedeutungen: die Elemente von $\mathfrak{B}^2$ und von $\mathfrak{S}^2$ sind Homologieklassen, die Elemente von $\mathfrak{G}_1^*$ sind Klassen von Systemen von Elementen der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$, und die Elemente von $\mathfrak{G}$ werden durch geschlossene Wege repräsentiert. Es gibt nun zwischen den isomorphen Gruppen $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2$ und $\mathfrak{G}_1^*$ auch eine isomorphe Abbildung, die eine bestimmte geometrische Bedeutung hat; sie ergibt sich leicht aus dem Satz I und dem § 1; sie soll übrigens ohne Bezugnahme auf die Gruppe $\mathfrak{F}$ charakterisiert werden.

Die Elemente der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von $K$ nennen wir $X_i$, $Y_i, \ldots$; wir repräsentieren sie durch geschlossene Wege $\mathfrak{x}_i, \mathfrak{y}_i, \ldots$ in $K^1$ mit gemeinsamem Anfangs- und Endpunkt $O$; wie im § 1 sind die Systeme $\alpha = (X_1, Y_1, \ldots, X_n, Y_n)$ die Elemente von $\Gamma_{\mathfrak{G}}$; das Kommutatorwort $C$ ist wie in Nr. 2 erklärt. Die zweidimensionalen Zyklen in $K^2$ nennen wir $Z$.

Wir definieren: *$Z$ wird von $\alpha = (X_1, \ldots, Y_n)$ „aufgespannt", wenn es solche Repräsentanten $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n$ der $X_1, \ldots, Y_n$ gibt, daß der Weg $C(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n)$ Homotopie-Rand von $Z$ ist.*

Die Präzisierung des Satzes II lautet nun:

*Satz IIa. Zu jedem Zyklus $Z$ gibt es Elemente $\alpha$, die ihn aufspannen, und zwar bilden diese $\alpha$ eine der Klassen, welche die Elemente der Gruppe*

---

[16]) *K. Reidemeister,* Einführung in die kombinatorische Topologie (Braunschweig 1932), 107.

[17]) Es ist $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$, $\mathfrak{C}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{N})$.

*$\mathfrak{G}_1^*$ sind. Jedes Element $\alpha$ aus einer Klasse, die Element von $\mathfrak{G}_1^*$ ist, spannt gewisse Zyklen $Z$ auf, und zwar bilden diese $Z$ eine der Restklassen von $\mathfrak{Z}^2$ modulo $\bar{\mathfrak{S}}^2$; oder, was auf Grund des natürlichen Isomorphismus* (6) *dasselbe ist: die Homologieklassen dieser $Z$ bilden eine der Restklassen von $\mathfrak{B}^2$ modulo $\mathfrak{S}^2$. Die so zwischen Klassen von Elementen $\alpha$ und Klassen von Zyklen $Z$ hergestellte Beziehung vermittelt einen Isomorphismus* (9).

Beweis: $F$ soll im folgenden der natürliche Homomorphismus der Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$ von $K^1$ auf die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von $K$ sein, den wir schon in Nr. 9 erwähnt haben und der die Eigenschaft hat: wenn der Weg $\mathfrak{x}$ das Element $x$ von $\mathfrak{F}$ repräsentiert, so ist $F(x)$ das durch $\mathfrak{x}$ repräsentierte Element von $\mathfrak{G}$. Die Abbildung $q_F$ hat dieselbe Bedeutung wie in Nr. 5, $T$ dieselbe Bedeutung wie im Satz I. Unter $q_F(\alpha)$ und $T(Z)$ sind also Restklassen der Gruppe $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}$ modulo $\mathfrak{R}(\mathfrak{C})$ zu verstehen. — Wir behaupten: Dann und nur dann wird $Z$ von $\alpha$ aufgespannt, wenn

$$q_F(\alpha) = T(Z) \tag{10}$$

ist.

Um dies zu beweisen, nehmen wir zuerst an, daß (10) gelte, wobei $\alpha = (X_1, \ldots, Y_n)$ sei; wir wählen die Elemente $x_1, \ldots, y_n$ von $\mathfrak{F}$ so, daß $F(x_i) = X_i, F(y_i) = Y_i$ ist; nach Definition von $q_F$ ist $C(x_1, \ldots, y_n) \in q_F(\alpha)$; nach (10) ist also $C(x_1, \ldots, y_n) \in T(Z)$; das bedeutet nach Satz I: sind $\mathfrak{x}_i, \mathfrak{y}_i$ Repräsentanten von $x_i, y_i$, ist also $C(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n)$ Repräsentant von $C(x_1, \ldots, y_n)$, so ist $C(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n)$ Homotopie-Rand von $Z$. Infolge der oben genannten Eigenschaft von $F$ sind dieselben $\mathfrak{x}_i, \mathfrak{y}_i$ Repräsentanten der $X_i$, $Y_i$; folglich wird $Z$ von $\alpha$ aufgespannt.

Es werde zweitens $Z$ von $\alpha = (X_1, \ldots, Y_n)$ aufgespannt; dann gibt es also solche Repräsentanten $\mathfrak{x}_i, \mathfrak{y}_i$ von $X_i$, $Y_i$, daß $C(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n)$ Homotopie-Rand von $Z$ ist; $x_i, y_i$ seien die durch $\mathfrak{x}_i, \mathfrak{y}_i$ repräsentierten Elemente von $\mathfrak{F}$; dann ist nach Satz I $C(x_1, \ldots, y_n) \in T(Z)$. Da $\mathfrak{x}_i, \mathfrak{y}_i$ auch die Elemente $F(x_i)$, $F(y_i)$ repräsentieren, ist $F(x_i) = X_i$, $F(y_i) = Y_i$; nach Definition von $q_F$ ist daher $C(x_1, \ldots, y_n) \in q_F(\alpha)$. Da somit die Klassen $T(Z)$ und $q_F(\alpha)$ ein Element gemeinsam haben, gilt (10).

Somit ist (10) in der Tat gleichbedeutend damit, daß $Z$ von $\alpha$ aufgespannt wird. Hieraus ergeben sich leicht die Behauptungen des Satzes IIa. Erstens: $Z$ sei gegeben; nach Satz I ist $T(Z)$ eine Restklasse von $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}$ modulo $\mathfrak{C}(\mathfrak{R})$; nach Nr. 5 gibt es daher Elemente $\alpha$, für die (10) gilt, und diese bilden eine Klasse, die Element von $\mathfrak{G}^*$ ist; nach Nr. 6 ist dies ein Element von $\mathfrak{G}_1^*$. Zweitens: $\alpha$ sei gegeben und in einer Klasse enthalten, die Element von $\mathfrak{G}_1^*$ ist; dann ist $q_F(\alpha)$ nach Nr. 6

eine Restklasse von $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{C}$ modulo $\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$; nach Satz I gibt es daher Zyklen $Z$, für die (10) gilt, und diese bilden eine Restklasse von $\mathfrak{Z}^2$ modulo $\mathfrak{S}^2$. Daß drittens die so zwischen den Elementen von $\mathfrak{G}_1^*$ und denen von $\mathfrak{Z}^2/\mathfrak{S}^2$ hergestellte Beziehung ein Isomorphismus ist, ergibt sich daraus, daß diese Gruppen durch $q_F$ bzw. $T$ isomorph auf $(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{C})/\mathfrak{C}(\mathfrak{N})$ abgebildet werden.

**11.** Die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ eines Komplexes $K$ ist gewöhnlich durch erzeugende Elemente $E_1, E_2, \ldots$ und Relationen $R_1(E_1, E_2, \ldots) = 1$, $R_2(E_1, E_2, \ldots) = 1, \ldots$ zwischen den $E_i$ gegeben. Diese Erzeugung läßt sich bekanntlich auch so deuten: Man betrachte gleichzeitig eine freie Gruppe $\mathfrak{F}$ mit freien Erzeugenden $e_1$, $e_2, \ldots$, die den $E_1, E_2, \ldots$ eineindeutig zugeordnet sind; jedem „Wort" $W(e_1, e_2, \ldots)$ in den Elementen $e_i$ von $\mathfrak{F}$ ordne man das durch dasselbe Wort dargestellte Element $W(E_1, E_2, \ldots)$ von $\mathfrak{G}$ zu; diese Zuordnung ist ein Homomorphismus $F$ von $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{G}$, und der Kern von $F$ ist der von den Elementen $R_i(e_1, e_2, \ldots)$ erzeugte Normalteiler von $\mathfrak{F}$. Man kann also sagen, daß $\mathfrak{G}$ gewöhnlich durch einen solchen Homomorphismus gegeben ist; dabei ist $\mathfrak{F}$ natürlich im allgemeinen nicht wie bisher die Fundamentalgruppe von $K^1$. Daher ist, besonders auch für die Behandlung von Beispielen, der folgende Satz wichtig, der sich ohne weiteres aus dem Satz IIa und dem § 1 ergibt:

*Satz IIb. Es sei $F$ ein Homomorphismus einer freien Gruppe $\mathfrak{F}$ auf die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von $K$; der Kern von $F$ heiße $\mathfrak{N}$. Dann ist*

$$\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2 \cong (\mathfrak{N} \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}})/\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{N}) \; ; \tag{11}$$

*und zwar entsteht eine isomorphe Abbildung, wenn man erstens $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2$ gemäß Satz IIa auf $\mathfrak{G}_1^*$ abbildet und zweitens die durch $q_F$ vermittelte isomorphe Beziehung zwischen $\mathfrak{G}_1^*$ und $(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}})/\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{N})$ herstellt.*

## § 3. Folgerungen und Beispiele

**12.** Wir stellen hier einige Folgerungen aus dem Satz II zusammen.

a) *Die, durch die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ bestimmte, Gruppe $\mathfrak{G}_1^*$ ist homomorphes Bild der Bettischen Gruppe $\mathfrak{B}^2$.*

Bei gegebener Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ kann also $\mathfrak{B}^2$ nicht „zu klein" sein; insbesondere:

*Wenn $\mathfrak{G}_1^* \neq 0$ ist, so ist auch $\mathfrak{B}^2 \neq 0$, der Komplex $K$ ist dann also nicht „azyklisch" in der zweiten Dimension.*

b) Ein Komplex $K$ heiße „homologie-asphärisch" (in der zweiten Dimension), wenn in ihm jedes Kugelbild homolog 0, also wenn $\mathfrak{S}^2 = 0$ ist. — Aus Satz II folgt:

*Ist $K$ homologie-asphärisch, so ist* $\mathfrak{B}^2 \cong \mathfrak{G}_1^*$.

Ein Korollar ist folgender Satz: *Zwei homologie-asphärische Komplexe mit isomorphen Fundamentalgruppen haben isomorphe zweite Bettische Gruppen.*

Dies steht in Zusammenhang mit einem Satz aus der Homotopie-Theorie von Hurewicz. Ein Komplex $K$ soll in der $r$-ten Dimension „homotopie-asphärisch" heißen, wenn jedes stetige Bild einer $r$-dimensionalen Sphäre in $\bar{K}$ auf einen Punkt zusammenziehbar ist. Ein homotopie-asphärischer Komplex ist a fortiori homologie-asphärisch, denn ein stetiges Sphärenbild, das zusammenziehbar ist, ist auch homolog 0; andererseits ist es leicht, Komplexe anzugeben, die (in der zweiten Dimension) homologie-asphärisch sind, ohne homotopie-asphärisch zu sein[18]). Der betreffende Satz von Hurewicz lautet[19]): „Zwei in den Dimensionen $r = 2, \ldots, n$ homotopie-asphärische Komplexe mit isomorphen Fundamentalgruppen haben isomorphe $n$-te Bettische Gruppen." Der Spezialfall dieses Satzes mit $n = 2$ ist in unserem obigen Korollar enthalten, das insofern allgemeiner ist, als in ihm nur der homologie-asphärische Charakter vorausgesetzt wird. Der für beliebige $n$ gültige Satz von Hurewicz weist auf die Richtung hin, in der man Verallgemeinerungen unserer Theorie auf höhere Dimensionen zu suchen hat. Die Frage, auf welche Weise die Struktur der in dem Satz genannten $n$-ten Bettischen Gruppe durch die Fundamentalgruppe bestimmt sei, ist für $n = 2$ durch die Angabe der Gruppe $\mathfrak{G}_1^*$ beantwortet.

c) Bisher durfte der Komplex $K$ endlich oder unendlich sein; jetzt setzen wir seine Endlichkeit voraus; dann läßt sich der Satz b) umkehren:

*Wenn $K$ endlich und $\mathfrak{B}^2 \cong \mathfrak{G}_1^*$ ist, so ist $K$ homologie-asphärisch.* Denn wenn $K$ endlich ist, so ist $\mathfrak{B}^2$ eine Abelsche Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden, und für eine solche folgt aus der Isomorphie $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2 \cong \mathfrak{B}^2$ leicht, daß $\mathfrak{S}^2 = 0$ ist.

Die Sätze b) und c) zeigen: bei endlichen Komplexen $K$ kann man den Strukturen von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{B}^2$ ansehen, ob $K$ homologie-asphärisch ist oder nicht.

---

[18]) Beispiel: die „Summe" zweier Exemplare $T_1$, $T_2$ des topologischen Produktes von drei Kreisen, die man erhält, wenn man aus $T_1$ und $T_2$ je eine Vollkugel ausbohrt und dann die Randflächen zusammenheftet.

[19]) l. c.[7]), (IV), 221 (die dort formulierte Voraussetzung, daß die Räume in *allen* Dimensionen $\geq 2$ asphärisch seien, ist für den Beweis offenbar unnötig).

d) In diesem Zusammenhang verdient der folgende Hilfssatz Interesse: „Ist $\mathfrak{G}$ eine vorgegebene Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden und endlich vielen Relationen, so gibt es einen (endlichen) Komplex, der die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ hat und homologie-asphärisch ist.“

Ich deute den Beweis an: Es gibt zunächst bekanntlich[20]) einen (endlichen) Komplex $K$ mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$. Seine Gruppe $\mathfrak{S}^2$ ist eine Abelsche Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden, also direkte Summe von endlich vielen (endlichen oder unendlichen) zyklischen Gruppen; $z_1, \ldots, z_m$ seien Zyklen aus den Homologieklassen, welche diese zyklischen direkten Summanden von $\mathfrak{S}^2$ erzeugen; diese $z_i$ sind simpliziale Kugelbilder. Falls sie sogar topologische Kugelbilder und falls sie überdies paarweise fremd zueinander sind, so erweitere man $K$ durch Anfügen von $m$ dreidimensionalen Elementen $E_1, \ldots, E_m$, deren Ränder man mit $z_1, \ldots, z_m$ identifiziert, zu einem Komplex $K'$; man überzeugt sich leicht davon, daß auch $K'$ die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ hat, und daß die einzige Änderung der zweiten Bettischen Gruppe, die beim Übergang von $K$ zu $K'$ eintritt, gerade darin besteht, daß die Kugelbilder homolog 0 werden; folglich hat $K'$ die gewünschten Eigenschaften. Falls die $z_i$ nicht topologische, zueinander fremde Kugelbilder sind, so erweitere man $K$ zunächst zu einem topologischen Produkt $K \times W$, wobei $W$ ein dreidimensionaler Würfel ist; dann ist $\mathfrak{G}$ auch die Fundamentalgruppe von $K \times W$, und die $z_i$ bilden auch eine Basis der Gruppe $\mathfrak{S}^2$ von $K \times W$; in $K \times W$ aber kann man durch eine kleine Verschiebung der Eckpunkte der $z_i$ diese Kugelbilder in topologische und zueinander fremde Kugelbilder verwandeln, ohne daß die $z_i$ dabei ihre Basis-Eigenschaft verlieren; nunmehr verfahre man wie vorhin.

Aus diesem Hilfssatz und dem Satz b) folgt:

*Ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden und endlich vielen Relationen, so gibt es einen (endlichen) Komplex K mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$, für den $\mathfrak{B}^2 \cong \mathfrak{G}_1^*$ ist.*

In a) wurde festgestellt, daß $\mathfrak{G}_1^*$ in einem bestimmten Sinne eine „untere Schranke“ der mit $\mathfrak{G}$ als Fundamentalgruppe verträglichen zweiten Bettischen Gruppen ist; der soeben bewiesene Satz zeigt: $\mathfrak{G}_1^*$ ist die „genaue“ untere Schranke dieser Gruppen $\mathfrak{B}^2$.

e) Aus Satz II folgt unmittelbar:

*Dann und nur dann sind in K alle zweidimensionalen Zyklen Kugelbilder, wenn $\mathfrak{G}_1^* = 0$ ist.*

---

[20]) *Seifert-Threlfall*, 180, Aufgabe 3.

Zum Beispiel ist für einfach zusammenhängende Komplexe, also wenn $\mathfrak{G} = 0$ ist, $\mathfrak{G}_1^* = 0$; in einfach zusammenhängenden Komplexen sind also alle zweidimensionalen Zyklen Kugelbilder; dies ist auch in einem allgemeineren und schärferen Satz von Hurewicz über einfach zusammenhängende Räume enthalten[21]). Jedoch gibt es (Nr. 13, Nr. 14) auch viele von 0 verschiedene Gruppen $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{G}_1^* = 0$.

Ferner gilt folgender Satz:

*Zu einer gegebenen Gruppe $\mathfrak{G}$ mit endlich vielen Erzeugenden und endlich vielen Relationen gibt es dann und nur dann einen Komplex $K$, der die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ hat und in der zweiten Dimension azyklisch ist, wenn $\mathfrak{G}_1^* = 0$ ist.*

Denn ist $K$ ein Komplex mit den genannten Eigenschaften, so folgt aus a), daß $\mathfrak{G}_1^* = 0$ ist; andererseits gibt es zu einer Gruppe $\mathfrak{G}$, für die $\mathfrak{G}_1^* = 0$ ist, nach d) einen Komplex $K$ mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ und mit $\mathfrak{B}^2 = 0$.

**13.** *Beispiele.* Es handelt sich hauptsächlich darum, zu gegebenen speziellen Gruppen $\mathfrak{G}$ die Strukturen der zugehörigen Gruppen $\mathfrak{G}_1^*$ zu ermitteln. Hierfür gibt es zwei Methoden; erstens die geometrische: man gibt einen homologie-asphärischen Komplex mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ an; seine zweite Bettische Gruppe hat nach Nr. 12 b dieselbe Struktur wie $\mathfrak{G}_1^*$; zweitens die algebraische Methode: $\mathfrak{G}$ sei durch Erzeugende und Relationen gegeben, also (man vgl. Nr. 11) durch einen Homomorphismus $F$ einer freien Gruppe $\mathfrak{F}$ mit dem Kern $\mathfrak{R}$; dann ist nach Nr. 6, (17),

$$\mathfrak{G}_1^* \cong (\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}})/\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R}) \; ; \tag{1}$$

aus dieser Formel leite man durch gruppentheoretische Überlegungen Eigenschaften von $\mathfrak{G}_1^*$ her.

a) *Wenn $\mathfrak{G}$ eine freie Gruppe ist, so ist $\mathfrak{G}_1^* = 0$.*

Geometrischer Beweis: Zu einer freien Gruppe $\mathfrak{G}$ (mit endlich oder abzählbar unendlich vielen freien Erzeugenden) gibt es einen eindimensionalen Komplex mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$; für ihn ist $\mathfrak{B}^2 = 0$. — Algebraischer Beweis: Man kann $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{R} = 0$ annehmen; nach Formel (1) ist dann $\mathfrak{G}_1^* = 0$.

Aus diesem Satz und Nr. 12 e folgt: *In einem Komplex, dessen Fundamentalgruppe eine freie Gruppe ist, sind alle zweidimensionalen Zyklen Kugelbilder.*

---

[21]) l. c.[7]), (II), Satz I.

b) $\mathfrak{G}$ *sei eine freie Abelsche Gruppe mit p Erzeugenden; dann ist* $\mathfrak{G}_1^*$ *eine freie Abelsche Gruppe mit* $\frac{p(p-1)}{2}$ *Erzeugenden.* (Eine freie Abelsche Gruppe mit $n$ Erzeugenden ist — bei additiver Schreibweise — die direkte Summe von $n$ unendlichen zyklischen Gruppen.)

Beweis (geometrisch): Der Komplex $K$ sei das topologische Produkt von $p$ Kreislinien; seine Fundamentalgruppe ist die gegebene Gruppe $\mathfrak{G}$; er ist bekanntlich homotopie-aspärisch (in allen Dimensionen $\geqslant 2$), also erst recht homologie-asphärisch; seine zweite Bettische Gruppe ist, wie den bekannten Regeln zur Bildung der Bettischen Gruppen von Produktkomplexen aus denen der Faktoren zu entnehmen ist, die freie Abelsche Gruppe mit $\frac{p(p-1)}{2}$ Erzeugenden.

Einen algebraischen Beweis werden wir hier nicht geben; im Gegenteil, die Formel (1) soll benutzt werden, um aus dem soeben geometrisch bewiesenen Satz einen gruppentheoretischen Satz herzuleiten. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ ist in natürlicher Weise als homomorphes Bild der freien Gruppe $\mathfrak{F}$ mit $p$ Erzeugenden darzustellen; der Kern ist dabei $\mathfrak{R} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$; daher ist $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$, und $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}) = \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}^2$ ist die „zweite Kommutatorgruppe" von $\mathfrak{F}$. Aus (1) folgt daher:

*Bezeichnen* $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ *und* $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}^2$ *die erste und die zweite Kommutatorgruppe der freien Gruppe* $\mathfrak{F}$ *mit p Erzeugenden, so ist* $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}/\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}^2$ *die freie Abelsche Gruppe mit* $\frac{p(p-1)}{2}$ *Erzeugenden.*[22])

Der geometrisch-gruppentheoretische Zusammenhang, den wir hier vor uns haben, läßt sich mit Hilfe der Sätze IIa und IIb noch präzisieren. Die freien Erzeugenden von $\mathfrak{F}$ seien $x_1, \ldots, x_p$; die ihnen entsprechenden Erzeugenden der Abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ seien $X_1, \ldots, X_p$; mit $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_p$ bezeichnen wir geschlossene Wege in der Produkt-Mannigfaltigkeit $K$, die die $X_i$ repräsentieren; diese $\mathfrak{x}_i$ kann man als die $p$ Faktor-Kreise von $K$ auffassen. Aus den bekannten und leicht zu übersehenden Eigenschaften von $K$ sieht man: es gibt eine zweidimensionale Homologiebasis, die aus Zyklen $Z_{ik}$ mit $1 \leqslant i < k \leqslant p$ besteht, wobei die $Z_{ik}$ durch Torusflächen repräsentiert werden; und zwar besitzt $Z_{ik}$ den Weg $C(\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k) = \mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_k \mathfrak{x}_i^{-1} \mathfrak{x}_k^{-1}$ als Homotopie-Rand; daher ist $\alpha = (X_i, X_k)$ ein Element von $\Gamma_{\mathfrak{G}}$, das $Z_{ik}$ aufspannt; das dem Zyklus $Z_{ik}$ in der Gruppe $(\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}})/\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}/\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}^2$ zugeordnete Element $q_F(\alpha)$ ist daher diejenige Restklasse von $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ modulo $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}^2$, welche das Element $C(x_i, x_k) =$

[22]) Das ist der einfachste Spezialfall eines Satzes von *E. Witt:* Treue Darstellung Liescher Ringe, Crelles Journal 177 (1937), 152—160, Satz IV.

$x_i\, x_k\, x_i^{-1}\, x_k^{-1}$ enthält. Da die so zwischen $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2 = \mathfrak{B}^2$ und $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}/\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}^2$ hergestellte Beziehung ein Isomorphismus ist, und da die $Z_{ik}$ eine Basis in $\mathfrak{B}^2$ darstellen, ergibt sich zu dem obigen gruppentheoretischen Satz noch der folgende Zusatz:

*Sind $x_1, \ldots, x_p$ freie Erzeugende von $\mathfrak{F}$, so bilden diejenigen $\frac{p(p-1)}{2}$ Restklassen von $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ modulo $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}^2$, welche die Elemente $x_i\, x_k\, x_i^{-1}\, x_k^{-1}$ mit $1 \leqslant i < k \leqslant p$ enthalten, eine Basis der Gruppe $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}/\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}^2$.*

c) Jetzt sei $\mathfrak{G}$ eine beliebige Abelsche Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden. Wir schreiben sie additiv. Unter $\mathfrak{A}_m$ verstehen wir immer eine zyklische Gruppe der Ordnung $m$, wobei $\mathfrak{A}_0$ eine unendliche zyklische Gruppe sein soll. $\mathfrak{G}$ gestattet Darstellungen als direkte Summe

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_{m_1} + \mathfrak{A}_{m_2} + \cdots + \mathfrak{A}_{m_q} . \tag{2}$$

Unter den möglichen Darstellungen (2) wählen wir eine aus. Es sei etwa $m_i > 1$ für $i \leqslant q - p$, $m_i = 0$ für $i > q - p$. Wir betrachten einen Komplex $K$, der das topologische Produkt von $p$ Kreislinien und von $q - p$ dreidimensionalen Linsenräumen ist, deren zyklischen Fundamentalgruppen die Ordnungen $m_1, \ldots, m_{q-p}$ haben[23]). Dann ist $\mathfrak{G}$ die Fundamentalgruppe von $K$. Sowohl die Kreislinie als auch jeder Linsenraum ist homotopie-asphärisch in der zweiten Dimension (für die Linsenräume folgt dies daraus, daß sie von der dreidimensionalen Sphäre überlagert werden[24])); daher [24]) ist auch $K$ in der zweiten Dimension homotopie-asphärisch, und folglich erst recht homologie-asphärisch. Nach Nr. 12b ist somit $\mathfrak{G}_1^*$ mit der Gruppe $\mathfrak{B}^2$ von $K$ isomorph. $\mathfrak{B}^2$ läßt sich nach bekannten Regeln für Produktkomplexe aus den nullten, ersten und zweiten Bettischen Gruppen der Faktoren bestimmen[25]); da die zweiten Bettischen Gruppen der Faktoren Nullgruppen und da die ersten Bettischen Gruppen die Gruppen $\mathfrak{A}_{m_i}$ aus (2) sind, liefert die Anwendung der erwähnten Regeln die folgende Darstellung von $\mathfrak{B}^2$ als direkte Summe:

$$\mathfrak{B}^2 = \sum_{1 \leq i < k \leq q} \mathfrak{A}_{(m_i, m_k)} ;$$

hierin bezeichnet $(m_i, m_k)$ den größten gemeinsamen Teiler von $m_i$ und $m_k$, wobei $(0,0) = 0$ zu setzen ist; $\mathfrak{A}_1$ ist die Nullgruppe.

---

[23]) *Seifert-Threlfall*, 210, 215.

[24]) l. c.[7]), (I), Satz IV; (IV), 216.

[25]) *Alexandroff-Hopf*, 308, Formel (12).

Damit ist folgendes bewiesen:

*Besitzt die Abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ die Darstellung* (2), *so ist*

$$\mathfrak{G}_1^* \cong \sum_{1 \leq i < k \leq q} \mathfrak{A}_{(m_i, m_k)} \; . \tag{3}$$

$\mathfrak{G}$ besitzt, wie jede Abelsche Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden, solche Darstellungen (2), daß die $m_i$ Teiler der $m_{i+1}$ sind (wobei 0 als Teiler von 0 gilt); durch diese Bedingung sind die Zahlen $m_i$ und insbesondere auch die Anzahl der direkten Summanden eindeutig bestimmt; diese Anzahl heiße $q_1$, und die Anzahl der unendlichen unter den $\mathfrak{A}_{m_i}$ heiße $p_1$. Wir setzen voraus, daß die rechte Seite von (2) eine solche „Normalform" sei. Dann ist, wenn $m_i$ und $m_k$ beide $\neq 0$ sind, $(m_i, m_k)$ die kleinere der beiden Zahlen; ist eine von ihnen 0, so ist $(m_i, m_k)$ die andere (auch wenn diese 0 ist); infolgedessen treten auch in (3) als Ordnungen der Summanden $\mathfrak{A}$ keine anderen Zahlen auf als in (2); bei geeigneter Anordnung der Summanden ist daher auch auf der rechten Seite von (3) die Teilbarkeits-Bedingung für die Ordnungen der $\mathfrak{A}$ erfüllt, und daher ist die rechte Seite von (3) die Normalform der Gruppe $\mathfrak{G}_1^*$. Ist hierbei die Anzahl aller Summanden $q^*$, die Anzahl der unendlichen unter ihnen $p^*$, so ist

$$q^* = \frac{q_1(q_1 - 1)}{2} \; , \quad p^* = \frac{p_1(p_1 - 1)}{2} \; . \tag{4}$$

Jetzt sei $K$ irgend ein (endlicher) Komplex mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$. In der Normalform seiner zweiten Bettischen Gruppe $\mathfrak{B}^2$ sei $q_2$ die Anzahl der Summanden, $p_2$ die Anzahl der unendlichen unter ihnen. Nach Nr. 12a ist $\mathfrak{G}_1^*$ homomorphes Bild von $\mathfrak{B}^2$; daraus folgt

$$q^* \leqq q_2 \; , \quad p^* \leqq p_2 \; . \tag{5}$$

Die Gültigkeit der zweiten dieser Ungleichungen ist ohne weiteres klar; die erste ergibt sich daraus, daß einerseits jedes homomorphe Bild von $\mathfrak{B}^2$ direkte Summe von höchstens $q_2$ Summanden ist, andererseits bekanntlich jede Darstellung von $\mathfrak{G}_1^*$ als direkte Summe zyklischer Gruppen aus mindestens $q^*$ Summanden besteht. Aus (4) und (5) ergibt sich der folgende Satz, wobei wir noch beachten, daß $p_1$ und $p_2$ die erste bzw. zweite Bettische Zahl von $K$ ist:

*Der endliche Komplex $K$ habe eine Abelsche Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$. Dann gilt für die beiden ersten Bettischen Zahlen:*

$$p_2 \geqslant \frac{p_1(p_1 - 1)}{2} ; \tag{6}$$

*bezeichnen ferner $q_1$ und $q_2$ die Anzahlen der direkten Summanden in den Normalformen der beiden ersten Bettischen Gruppen $\mathfrak{B}^1 = \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{B}^2$, so gilt auch*

$$q_2 \geqslant \frac{q_1(q_1 - 1)}{2} . \tag{7}$$

Aus (7) liest man noch folgendes Korollar ab: *Wenn die Abelsche Fundamentalgruppe nicht zyklisch (d. h. wenn $q_1 > 1$) ist, so ist $\mathfrak{B}^2 \neq 0$.*

d) Mit derselben geometrischen Methode, die wir in den Abschnitten b) und c) angewandt haben, gelingt es auch für manche andere Gruppen $\mathfrak{G}$, die Strukturen der zugehörigen Gruppen $\mathfrak{G}_1^*$ zu bestimmen; dies gelingt nämlich immer dann, wenn wir einen Komplex $K$ finden, der die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ hat, der homologie-asphärisch ist, und dessen zweite Bettische Gruppe wir kennen. Ist z. B. $\mathfrak{G}$ die Fundamentalgruppe einer geschlossenen Fläche, welche nicht mit der Kugel homöomorph ist, so ist die Fläche selbst ein solcher Komplex; daher ist $\mathfrak{G}_1^*$ eine unendliche zyklische Gruppe oder die Nullgruppe, je nachdem die Fläche orientierbar oder nichtorientierbar ist. Hieraus ergibt sich unter anderem folgender Satz:

*Ein Komplex, der dieselbe Fundamentalgruppe hat wie eine geschlossene orientierbare Fläche positiven Geschlechtes, hat immer eine positive zweite Bettische Zahl.*

In der nächsten Nummer werden wir die Flächengruppen als Spezialfälle allgemeinerer Gruppen noch einmal algebraisch behandeln.

**14.** In dem nachfolgenden Beispiel, in dem wir Gruppen $\mathfrak{G}$ untersuchen, die durch Erzeugende und Relationen gegeben sind, stellen wir uns auf den Standpunkt, der in Nr. 11 auseinandergesetzt worden ist; wir deuten also die Erzeugung der Gruppe zugleich als homomorphe Abbildung einer freien Gruppe $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{G}$. Eine Relation $R(E_1, \ldots, E_m) = 1$ zwischen den Erzeugenden $E_i$ von $\mathfrak{G}$ soll „wesentlich" heißen, wenn das Element $R(e_1, \ldots, e_m)$ der von den freien Erzeugenden $e_i$ erzeugten freien Gruppe $\mathfrak{F}$ nicht das Eins-Element ist. — Wir behaupten:

*$\mathfrak{G}$ sei durch endlich viele Erzeugende $E_1, \ldots, E_m$ gegeben, zwischen denen eine einzige wesentliche Relation $R(E_1, \ldots, E_m) = 1$ besteht. Falls das Element $r = R(e_1, \ldots, e_m)$ der von den freien Erzeugenden $e_i$ erzeugten freien Gruppe $\mathfrak{F}$ nicht Kommutator-Element ist, so ist $\mathfrak{G}_1^* = 0$; falls $r$ Kommutator-Element von $\mathfrak{F}$ ist, so ist $\mathfrak{G}_1^*$ eine unendliche zyklische Gruppe.*

Beweis: Der von $r$ erzeugte Normalteiler $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{F}$, der der Kern des Homomorphismus $F$ von $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{G}$ ist, besteht aus allen Elementen $r' = \Pi(y_j^{-1}\, r\, y_j)^{\pm 1}$ mit $y_j \in \mathfrak{F}$. Rechnet man modulo $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})$, so darf man $r$ mit jedem $y_j$ vertauschen; daher läßt sich jedes Element $r'$ von $\mathfrak{R}$ in der Form

$$r' = r^n \cdot c \qquad \text{mit} \qquad c \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R}) \tag{8}$$

darstellen.

Es sei nun erstens $r$ nicht in der Kommutatorgruppe $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ enthalten; da die Faktorgruppe $\mathfrak{F}/\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ eine freie Abelsche Gruppe (von $m$ Erzeugenden) ist, also kein Element endlicher Ordnung außer dem Eins-Element enthält, ist dann auch keine Potenz $r^n$ mit $n \neq 0$ in $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ enthalten; da $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ ist, ist daher aus (8) zu sehen, daß nur diejenigen Elemente $r'$ von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ enthalten sind, für die in (8) $n = 0$ ist, die also Elemente von $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})$ sind. Somit ist $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}} \subset \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})$; andererseits ist immer $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$; es ist also $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})$, und aus (1) folgt: $\mathfrak{G}_1^* = 0$.

Es sei zweitens $r \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$; dann ist $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$, also $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}} = \mathfrak{R}$, also nach (1): $\mathfrak{G}_1^* \cong \mathfrak{R}/\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})$; hieraus und aus (8) ist ersichtlich, daß unsere Behauptung, $\mathfrak{G}_1^*$ sei unendlich-zyklisch, gleichbedeutend mit folgender Behauptung ist: Für $n \neq 0$ ist $r^n$ nicht $\in \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})$. Die Richtigkeit dieser Behauptung wiederum ist, da in ihr $r \neq 1$ ist, eine Folge des nachstehenden *Hilfssatzes:*

$r$ sei ein Element der freien Gruppe $\mathfrak{F}$ mit endlich vielen Erzeugenden, $\mathfrak{R}$ der von $r$ erzeugte Normalteiler von $\mathfrak{F}$, und es gebe ein solches $n \neq 0$, daß

$$r^n \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R}) \tag{9}$$

ist. Dann ist $r = 1$.

Für den Beweis des Hilfssatzes ziehen wir die höheren Kommutator-Gruppen $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}^k$ von $\mathfrak{F}$ heran, die rekursiv durch $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}^0 = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}^{k+1} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}^k)$ erklärt sind, und wir benutzen folgende beiden Eigenschaften der $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}^k$: ($\alpha$) die Faktorgruppen $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}^k/\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}^{k+1}$ sind freie Abelsche Gruppen mit endlich vielen Erzeugenden[26]); ($\beta$) der Durchschnitt aller $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}^k$ besteht nur aus dem Eins-Element[27]).

Unsere Behauptung $r = 1$ ist nach ($\beta$) bewiesen, sobald für jedes $k$ gezeigt ist, daß

$$r \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}^k \tag{10}$$

ist. Für $k = 0$ ist (10) trivialerweise richtig; (10) sei für ein gewisses $k$ bewiesen; dann ist $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}^k$, $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R}) \subset \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}^{k+1}$, also nach (9): $r^n \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}^{k+1}$;

[26]) *Witt,* l. c.[22]).

[27]) *Witt,* l. c., Satz 12; sowie *W. Magnus,* Math. Annalen 111 (1935), 259—280, speziell 269.

hieraus, aus (10) und aus ($\alpha$) folgt: $r \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}^{k+1}$. Folglich gilt (10) für alle $k$, w.z.b.w.

Aus dem hiermit bewiesenen Satz und aus den Sätzen von Nr. 12 ergeben sich jetzt die folgenden Tatsachen für die Komplexe $K$, deren Fundamentalgruppen $\mathfrak{G}$ von endlich vielen Elementen $E_1, \ldots, E_m$ erzeugt werden, zwischen denen eine einzige (wesentliche) Relation $R(E_1, \ldots, E_m) = 1$ besteht:

*Falls das Element $r = R(e_1, \ldots, e_m)$ der von den $e_i$ erzeugten freien Gruppe $\mathfrak{F}$ nicht Kommutator-Element ist, sind alle zweidimensionalen Zyklen Kugelbilder; in diesem Falle gibt es auch Komplexe mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$, die in der zweiten Dimension azyklisch sind. Falls dagegen $r$ Kommutator-Element ist, sind immer Zyklen vorhanden, die nicht Kugelbilder sind, und die zweite Bettische Zahl ist nicht* 0.

In diesem zweiten Fall ist die Gruppe $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2$ unendlich-zyklisch; ihr erzeugendes Element läßt sich leicht angeben; denn aus dem obigen Beweis geht hervor, daß die mit $\mathfrak{G}_1^*$ und daher auch mit $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2$ isomorphe Gruppe $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}/\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})$ durch diejenige Restklasse von $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ modulo $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{R})$ erzeugt wird, welche $r$ enthält; daher folgt aus Satz IIb:

*Um — im Falle $r \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ — das erzeugende Element der unendlich-zyklischen Gruppe $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2$ zu bestimmen, nehme man solche Elemente $x_1, \ldots, y_n$ von $\mathfrak{F}$, daß $C(x_1, \ldots, y_n) = r$ ist, und einen Zyklus $Z$ von $K$, der von $(X_1, \ldots, Y_n)$ aufgespannt wird, wobei $X_1, \ldots, Y_n$ die Elemente von $\mathfrak{G}$ sind, die den $x_1, \ldots, y_n$ entsprechen; dann erzeugt die Restklasse von $\mathfrak{B}^2$ modulo $\mathfrak{S}^2$, die die Homologieklasse von $Z$ enthält, die Gruppe $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2$.* —

Übrigens lassen sich die beiden hier unterschiedenen Fälle — $r$ nicht $\in \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ und $r \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ — auch durch das Verhalten der ersten Bettischen Zahl charakterisieren: im ersten Fall ist sie $m - 1$, im zweiten Fall $m$. Dies erkennt man, wenn man beachtet, daß ein System von Erzeugenden und definierenden Relationen für die Fundamentalgruppe dadurch in ein solches System für die erste Bettische Gruppe übergeht, daß man die Erzeugenden als miteinander vertauschbar auffaßt.

## § 4. Fundamentalgruppe und Schnitt-Produkte in Mannigfaltigkeiten

**15.** *Vorbemerkungen.* a) $M^n$ sei eine $n$-dimensionale, geschlossene, orientierte Mannigfaltigkeit. Für je zwei Homologieklassen $U$ und $Z$ der Dimensionen $r$ und $r'$ in $M^n$ ist in bekannter Weise das Schnittprodukt $U \cdot Z$ erklärt; es ist eine Homologieklasse der Dimension $r + r' - n$; ist $r + r' < n$, so ist es gleich 0 zu setzen. Das Produkt erfüllt die distributiven Gesetze und das assoziative Gesetz; außerdem ist $Z \cdot U = (-1)^{(n-r)(n-r')} U \cdot Z$.

Wir werden, wenn es sich um Homologien handelt, in den Bezeichnungen oft keinen Unterschied zwischen Zyklen und ihren Homologieklassen machen. Wenn $U$ und $Z$ Zyklen sind, so bezeichnet $U \cdot Z$ einen beliebigen Zyklus aus der Homologieklasse, die das Produkt der Homologieklassen von $U$ und von $Z$ ist.

b) Wenn $r + r' = n$ ist, so ist $U \cdot Z \sim s P$, wobei $s$ eine Zahl und $P$ ein durch einen einfachen Punkt repräsentierter nulldimensionaler Zyklus ist. $s$ ist die „Schnittzahl" von $U$ und $Z$.

Ist dabei einer der beiden Faktoren $U, Z$ ein Torsions-Element, so ist $s = 0$; denn ist z. B. $U$ Torsions-Element, d. h. gibt es eine Zahl $m \neq 0$, so daß $m U \sim 0$ ist, so ist $ms = 0$, also $s = 0$.

c) Unter einem „Charakter" einer Abelschen Gruppe $\mathfrak{H}$ soll eine homomorphe Abbildung von $\mathfrak{H}$ in die additive Gruppe der ganzen Zahlen verstanden werden. Die Charaktere von $\mathfrak{H}$ bilden in bekannter Weise eine Gruppe; wir nennen sie $\mathfrak{Ch}\,\mathfrak{H}$. Sie ist, wenn $\mathfrak{H}$ von endlich vielen Elementen erzeugt wird, eine freie Abelsche Gruppe, deren Rang gleich dem Rang von $\mathfrak{H}$ ist. [28])

d) Die $r$-te Bettische Gruppe von $M^n$ heiße $\mathfrak{B}^r$, die $r$-te Torsionsgruppe $\mathfrak{T}^r$; unter $\mathfrak{B}_0^r$ verstehen wir die Restklassengruppe $\mathfrak{B}^r/\mathfrak{T}^r$; sie ist eine freie Abelsche Gruppe, deren Rang die $r$-te Bettische Zahl ist. Für $U \in \mathfrak{B}^r$ sei immer $U_0$ das Element von $\mathfrak{B}_0^r$ mit $U \in U_0$.

Bezeichnen wir für $U \in \mathfrak{B}^{n-r}$, $Z \in \mathfrak{B}^r$ die Schnittzahl von $U$ und $Z$ mit $s_U(Z)$, so ist $s_U$ ein Charakter von $\mathfrak{B}^r$. Die Zuordnung $U \to s_U$ ist eine homomorphe Abbildung $h$ von $\mathfrak{B}^{n-r}$ in $\mathfrak{Ch}\,\mathfrak{B}^r$, die — nach dem Poincaré-Veblenschen Dualitätssatz — die folgenden beiden Eigenschaften hat: 1. Zu jedem Charakter $s$ von $\mathfrak{B}^r$ gibt es ein solches $U \in \mathfrak{B}^{n-r}$, daß $s = s_U$ ist; 2. dann und nur dann ist $s_U(Z) = 0$ für alle $Z \in \mathfrak{B}^r$, wenn $U \in \mathfrak{T}^{n-r}$ ist. Aus diesen Eigenschaften folgt leicht: $h$ bewirkt eine isomorphe Abbildung von $\mathfrak{B}_0^{n-r}$ auf $\mathfrak{Ch}\,\mathfrak{B}^r$. Diesen Isomorphismus nennen wir $I$; er ist folgendermaßen charakterisiert: *es ist* $I U_0 = s_U$ *für* $U \in U_0$; es ist also

$$I\,\mathfrak{B}_0^{n-r} = \mathfrak{Ch}\,\mathfrak{B}^r . \tag{0}$$

Da $\mathfrak{Ch}\,\mathfrak{B}^r \cong \mathfrak{B}_0^r$ ist, folgt aus (0) $\mathfrak{B}_0^{n-r} \cong \mathfrak{B}_0^r$, also der Hauptteil des Poincaréschen Dualitätssatzes. Übrigens ist $\mathfrak{Ch}\,\mathfrak{B}^r = \mathfrak{Ch}\,\mathfrak{B}_0^r$, da jeder Charakter für die Elemente endlicher Ordnung von $\mathfrak{B}^r$ den Wert 0 hat.

---

[28]) Cf. *Alexandroff-Hopf*, 586ff.

e) Die Fundamentalgruppe von $M^n$ sei $\mathfrak{G}$; ihre Elemente seien in bestimmter Weise als Wegeklassen in $M^n$ realisiert. Für jedes $X \epsilon \mathfrak{G}$ sei $X'$ diejenige Restklasse von $\mathfrak{G}$ modulo der Kommutatorgruppe $\mathfrak{C}_{\mathfrak{G}}$, welche $X$ enthält; die $X'$ bilden die Gruppe $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}/\mathfrak{C}_{\mathfrak{G}}$. Faßt man die $X'$ als Klassen geschlossener Wege auf, so sind sie bekanntlich als identisch mit den eindimensionalen Homologieklassen in $M^n$ zu betrachten; in diesem Sinne ist also [29])

$$\mathfrak{G}' = \mathfrak{B}^1 . \tag{1}$$

f) Wir vereinigen (1) mit (0) für $r = 1$. Da in $M^n$ keine $(n-1)$-dimensionale Torsion vorhanden ist, ist $\mathfrak{B}_0^{n-1} = \mathfrak{B}^{n-1}$, $U_0 = U$ zu setzen; ferner setzen wir $I^{-1} = I_2$; dann ist $I_2$ *ein Isomorphismus von* $\mathfrak{Ch}\,\mathfrak{G}'$ *auf* $\mathfrak{B}^{n-1}$, *der für jedes* $U \epsilon \mathfrak{B}^{n-1}$ *durch* $I_2 s_U = U$ *gegeben ist;* es ist also

$$I_2\, \mathfrak{Ch}\, \mathfrak{G}' = \mathfrak{B}^{n-1} . \tag{2}$$

g) Zu der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ gehört nach § 1 eine bestimmte Gruppe $\mathfrak{G}_1^*$, deren Elemente gewisse Klassen $\bar{\alpha}$ von Systemen $\alpha = (X_1, \ldots, Y_h)$ sind, wobei $X_1, \ldots, Y_h$ Elemente von $\mathfrak{G}$ sind und $C(X_1, \ldots Y_h) = 1$ ist. Die Untergruppe $\mathfrak{S}^2$ von $\mathfrak{B}^2$ ist in Nr. 9 erklärt worden; für jedes $Z \epsilon \mathfrak{B}^2$ verstehen wir unter $\bar{Z}$ das Element der Restklassengruppe $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2$, zu dem $Z$ gehört. Nach Satz IIa gibt es einen Isomorphismus $I_3$ von $\mathfrak{G}_1^*$ auf $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2$, der folgendermaßen charakterisiert ist: *es ist* $I_3\bar{\alpha} = \bar{Z}$, *wenn die* $Z \epsilon \bar{Z}$ *von den* $\alpha \epsilon \bar{\alpha}$ *aufgespannt werden;* es ist also

$$I_3 \mathfrak{G}_1^* = \mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2 . \tag{3}$$

h) Diejenigen $W \epsilon \mathfrak{B}^{n-2}$, welche die Eigenschaft haben, daß $W \cdot Z = 0$ für alle $Z \epsilon \mathfrak{S}^2$, also für alle Kugelbilder, ist, bilden eine Untergruppe $\mathfrak{W}^{n-2}$ von $\mathfrak{B}^{n-2}$; nach b) ist $\mathfrak{T}^{n-2} \subset \mathfrak{W}^{n-2}$; wir setzen $\mathfrak{W}^{n-2}/\mathfrak{T}^{n-2} = \mathfrak{W}_0^{n-2}$; für jedes $W \epsilon \mathfrak{W}^{n-2}$ ist $W_0$ das Element von $\mathfrak{W}_0^{n-2}$, zu dem $W$ gehört.

Die Elemente von $\mathfrak{W}^{n-2}$ sind unter allen Elementen von $\mathfrak{B}^{n-2}$ dadurch ausgezeichnet, daß sie durch den unter d) besprochenen Homomorphismus $h$ auf diejenigen $s \epsilon \mathfrak{Ch}\, \mathfrak{B}^2$ abgebildet werden, die für alle Elemente von $\mathfrak{S}^2$ den Wert 0 haben; diese $s$ können aber als identisch mit den Charakteren $s'$ der Gruppe $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2$ betrachtet werden; es liegt also ein Homomorphismus $\mathfrak{W}^{n-2} \to \mathfrak{Ch}(\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2)$ vor; aus den unter d) genannten Eigen-

[29]) Um ganz korrekt zu sein, sollte man nicht sagen, daß $\mathfrak{G}'$ mit $\mathfrak{B}^1$ identisch ist, sondern daß eine natürliche isomorphe Abbildung $I_1$ von $\mathfrak{G}'$ auf $\mathfrak{B}^1$ vorliegt; statt (1) hat man dann zu schreiben: $I_1 \mathfrak{G}' = \mathfrak{B}^1$.

schaften 1 und 2 folgt, daß dieser Homomorphismus einen Isomorphismus $I'$ von $\mathfrak{W}_0^{n-2}$ auf $\mathfrak{Ch}(\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2)$ bewirkt; $I'W_0$ ist also der Charakter von $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2$, der mit dem Charakter $IW_0 = s_W$ von $\mathfrak{B}^2$ als identisch zu betrachten ist. Nun besteht auf Grund von (3) eine isomorphe Beziehung zwischen den Charakteren von $\mathfrak{G}_1^*$ und denen von $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2$: die Charaktere $s^* \in \mathfrak{Ch}\,\mathfrak{G}_1^*$ und $s' \in \mathfrak{Ch}(\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2)$ sind einander zugeordnet, wenn $s^*(\bar{\alpha}) = s'(\bar{Z})$ für $I_3\bar{\alpha} = \bar{Z}$ ist. Dieser Isomorphismus und der Isomorphismus $I'$ vermitteln einen Isomorphismus $I_4$ von $\mathfrak{Ch}\,\mathfrak{G}_1^*$ auf $\mathfrak{W}_0^{n-2}$, der folgendermaßen charakterisiert ist: *es ist* $I_4 s^* = W_0$, *wenn* $s^*(\bar{\alpha}) = s_W(Z)$ *für* $W \in W_0$, *beliebiges* $\bar{\alpha} \in \mathfrak{G}_1^*$ *und für die von den* $\alpha \in \bar{\alpha}$ *aufgespannten* $Z$ *ist;* es ist also

$$I_4\,\mathfrak{Ch}\,\mathfrak{G}_1^* = \mathfrak{W}_0^{n-2} \; . \tag{4}$$

Aus (4) ist zu sehen, daß $\mathfrak{W}_0^{n-2}$ eine freie Abelsche Gruppe und daß ihr Rang gleich dem gemeinsamen Rang von $\mathfrak{G}_1^*$ und $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2$ ist. Wenn $\mathfrak{G}'$ kein Element endlicher Ordnung (außer der 0) enthält, so besitzt $M^n$ keine eindimensionale, also auch keine $(n-2)$-dimensionale Torsion; dann ist $\mathfrak{W}_0^{n-2} = \mathfrak{W}^{n-2}$.

i) Durch die Beziehungen (1), (2), (3), (4) samt den Erklärungen der Isomorphismen $I_2, I_3, I_4$ sind im wesentlichen unsere bisherigen Kenntnisse des Einflusses ausgedrückt, den die Fundamentalgruppe auf die Homologiegruppen einer Mannigfaltigkeit hat. Das Ziel dieses Paragraphen ist die Feststellung, daß auch die Bildung der Schnitt-Produkte zwischen je einem $(n-1)$-dimensionalen und einem zweidimensionalen Zyklus sowie zwischen je zwei $(n-1)$-dimensionalen Zyklen durch die Fundamentalgruppe bestimmt ist.

**16.** *Zwei Schnitt-Formeln.* In $M^n$ sei $Z$ ein zweidimensionaler Zyklus; er werde von $(X_1, Y_1, \ldots, X_h, Y_h)$ aufgespannt (Nr. 10). Die Elemente $X_1', \ldots, Y_h'$ von $\mathfrak{B}^1$ sind wie in Nr. 15e erklärt. $U$ sei ein $(n-1)$-dimensionaler Zyklus in $M^n$.

Die Grundlage für unsere weiteren Überlegungen ist die folgende Formel:

$$U \cdot Z \sim \sum_{i=1}^{h} \left[ s_U(Y_i')\, X_i' - s_U(X_i')\, Y_i' \right] \; ; \tag{5}$$

wir werden sie in Nr. 17 beweisen. Jetzt leiten wir aus ihr eine weitere Formel her. $V$ sei ein zweiter $(n-1)$-dimensionaler Zyklus; dann ist $V \cdot U$ ein $(n-2)$-dimensionaler Zyklus, und nach dem assoziativen Gesetz ist

$$V \cdot (U \cdot Z) \sim (V \cdot U) \cdot Z \sim s_{V \cdot U}(Z)\, P \; ,$$

wobei $P$ wieder einen einfach gezählten Punkt bezeichnet; wendet man dies auf der linken Seite von (5) und wendet man auf der rechten Seite das distributive Gesetz an, so erhält man:

$$s_{V \cdot U}(Z) = \sum_{i=1}^{h} \left[ s_V(X'_i)\, s_U(Y'_i) - s_V(Y'_i)\, s_U(X'_i) \right] \quad . \tag{6}$$

**17.** Beweis von (5). Die Tatsache, daß $Z$ von $(X_1, \ldots, Y_h)$ aufgespannt wird, bedeutet: sind $\mathfrak{x}_i$, $\mathfrak{y}_i$ Wege, die die Elemente $X_i$, $Y_i$ repräsentieren, so ist der Weg $\mathfrak{r} = C(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{y}_h)$ Homotopie-Rand von $Z$; das heißt: es gibt ein orientiertes Element $E$ mit dem Randweg $\varrho$ und eine solche Abbildung $f$ von $E$ in $M^n$, daß $f(E) = Z$ und $f(\varrho) = \mathfrak{r}$ ist. Infolge der besonderen Gestalt des Kommutator-Wortes $C$ sieht die Abbildung $f$ von $\varrho$ folgendermaßen aus: $\varrho$ ist in $4h$ Bögen geteilt, die wir der Reihe nach $\xi_1, \eta_1, \xi'_1, \eta'_1, \xi_2, \ldots, \xi'_h, \eta'_h$ nennen, und es ist $\xi_i$ auf $\mathfrak{x}_i$, $\xi'_i$ auf $\mathfrak{x}_i^{-1}$, $\eta_i$ auf $\mathfrak{y}_i$, $\eta'_i$ auf $\mathfrak{y}_i^{-1}$ abgebildet. Man identifiziere nun für jedes $i$ den positiv durchlaufenen Bogen $\xi_i$ mit dem negativ durchlaufenen Bogen $\xi'_i$ und verfahre ebenso mit den $\eta_i$ und $\eta'_i$; dann entsteht aus dem Element $E$ eine geschlossene orientierbare Fläche vom Geschlecht $h$; sie heiße $\zeta^2$. Die Bögen $\xi_i, \eta_i$ gehen dabei in geschlossene Wege über, die wir auch $\xi_i, \eta_i$ nennen wollen. Auch nach der Identifizierung, die wir vorgenommen haben, ist $f$ eine eindeutige und stetige Abbildung; bezeichnen wir den orientierten Grundzyklus der Fläche $\zeta^2$ ebenfalls mit $\zeta^2$, so haben wir also eine solche Abbildung $f$ von $\zeta^2$ in $M^n$, daß

$$f(\zeta^2) = Z \ , \tag{7}$$

$$f(\xi_i) = \mathfrak{x}_i \ , \quad f(\eta_i) = \mathfrak{y}_i$$

ist; statt dieser letzten Gleichungen notieren wir die Homologien, wobei wir $\xi_i, \eta_i$ als eindimensionale Zyklen auffassen:

$$f(\xi_i) \sim X'_i \ , \quad f(\eta_i) \sim Y'_i \ . \tag{8}$$

Die Zyklen $\xi_1, \ldots, \eta_h$ bilden eine eindimensionale Homologiebasis in $\zeta^2$; ihre Schnitt-Relationen sind bekanntlich die folgenden, wobei wir unter $\pi$ die durch einen Punkt repräsentierte Homologieklasse verstehen:

$$\begin{aligned} \xi_i \cdot \eta_j &\sim -\eta_j \cdot \xi_i \sim \delta_{ij}\, \pi \ , \\ \xi_i \cdot \xi_j &\sim \quad \eta_i \cdot \eta_j \sim 0 \ . \end{aligned} \tag{9}$$

Wir ziehen nun den Umkehrungs-Homomorphismus $\varphi$ von $f$ heran[30]); er bildet die Homologieklassen aus $M^n$ eindeutig auf Homologieklassen aus $\zeta^2$ ab und hat die folgenden drei Eigenschaften: (A) $\varphi$ ist ein additiver und multiplikativer Homomorphismus; (B) für die Homologieklassen $U$ aus $M^n$ und $\omega$ aus $\zeta^2$ gilt

$$f(\varphi(U) \cdot \omega) \sim U \cdot f(\omega) \; ; \tag{10}$$

(C) ist $U$ eine $r$-dimensionale Homologieklasse aus $M^n$, so ist $\varphi(U)$ eine $(r - n + 2)$-dimensionale Homologieklasse aus $\zeta^2$.

Da der Grundzyklus $\zeta^2$ bei der Multiplikation die Rolle der Eins spielt, folgt aus (10), wenn man $\omega = \zeta^2$ setzt, und aus (7)

$$f \, \varphi\,(U) \sim U \cdot Z \tag{11}$$

für jeden Zyklus $U$ aus $M^n$.

$U$ sei $(n - 1)$-dimensional; dann ist $\varphi(U)$ nach (C) eindimensional; daher besteht in $\zeta^2$ eine Homologie

$$\varphi(U) \sim \Sigma(a_i \xi_i + b_i \eta_i) \tag{12}$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $a_i, b_i$. Übt man auf beide Seiten von (12) die Abbildung $f$ aus, so folgt nach (11) und (8)

$$U \cdot Z \sim \Sigma(a_i X'_i + b_i Y'_i) \; . \tag{13}$$

Aus (12) und (9) folgt

$$\varphi(U) \cdot \xi_i \sim -b_i \pi \; , \qquad \varphi(U) \cdot \eta_i \sim a_i \pi \; ; \tag{14}$$

übt man hierauf $f$ aus und wendet man (10), (8) sowie die Homologie $f(\pi) \sim P$ an, wobei $P$ wieder einen einfachen Punkt in $M^n$ bezeichnet, so erhält man

$$U \cdot X'_i \sim -b_i P \; , \qquad U \cdot Y'_i \sim a_i P \; ,$$

also

$$a_i = s_U(Y'_i) \; , \qquad b_i = -s_U(X'_i) \; .$$

Setzt man dies in (13) ein, so ergibt sich die Formel (5), die zu beweisen war.

---

[30]) *H. Hopf*, Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, Crelles Journ. 163 (1930), 71—88. Wegen weiterer Literatur sowie der obigen Eigenschaft (*C*) vgl. man auch meine Arbeit in den Comment. Math. Helvet. 13 (1941), 219—239, speziell 219 und 235f.

**18.** *Ein Korollar.* Wir definieren: Der zweidimensionale Zyklus $Z$ heißt „minimal", wenn für alle $(n-1)$-dimensionalen Zyklen $U$ die Schnitt-Zyklen $U \cdot Z \sim 0$ sind. [15])

Dann lautet ein Korollar der Formel (5):

*Alle Kugelbilder sind minimal.* [31])

Denn wenn der Zyklus $Z$ Kugelbild ist, so hat er einen Homotopie-Rand, der nur aus einem Punkt besteht (Nr. 8i); $Z$ wird also unter anderem von dem System $(E, E)$ aufgespannt, wobei $E$ das Eins-Element von $\mathfrak{G}$ ist; da $E'$ das Null-Element von $\mathfrak{G}' = \mathfrak{B}^1$ ist, ist dann die rechte Seite von (5) für beliebige $U$ gleich $0$.

Aus diesem Korollar folgt weiter: *Wenn die Zyklen $Z_1$ und $Z_2$ zu demselben Element $\bar{Z}$ der Gruppe $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2$ gehören, so ist $U \cdot Z_1 \sim U \cdot Z_2$ für jeden $(n-1)$-dimensionalen Zyklus $U$.*

Infolgedessen kann man die Produkte $U \cdot Z$, die wir bisher als Produkte von Elementen der Gruppe $\mathfrak{B}^{n-1}$ mit Elementen der Gruppe $\mathfrak{B}^2$ aufgefaßt haben, auch als Produkte $U \cdot \bar{Z}$ von Elementen $U$ der Gruppe $\mathfrak{B}^{n-1}$ mit Elementen $\bar{Z}$ der Gruppe $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2$ auffassen.

Eine weitere Konsequenz des Korollars: Sind $U, V$ zwei $(n-1)$-dimensionale Zyklen, und ist $Z$ ein Kugelbild, so folgt aus $U \cdot Z \sim 0$, daß auch $V \cdot (U \cdot Z) = (V \cdot U) \cdot Z \sim 0$ ist; folglich gehört die Homologieklasse von $V \cdot U$ zu der Gruppe $\mathfrak{W}^{n-2}$ (Nr. 15h).

Wir werden später statt des Produktes $V \cdot U$ das „reduzierte" Produkt $(V \cdot U)_0$ betrachten, d. h. die Restklasse von $\mathfrak{W}^{n-2}$ modulo $\mathfrak{T}^{n-2}$, zu welcher $V \cdot U$ gehört; das reduzierte Produkt zweier Elemente von $\mathfrak{B}^{n-1}$ ist also ein Element der Gruppe $\mathfrak{W}_0^{n-2}$.

**19.** *Zwei Gruppen-Produkte.* $\mathfrak{G}$ sei jetzt eine beliebige Gruppe, die unabhängig von irgend einer Mannigfaltigkeit gegeben ist; wir setzen nur voraus, daß $\mathfrak{G}$ von endlich vielen Elementen mit endlich vielen definierenden Relationen erzeugt werden kann. Wie im § 1 betrachten wir die Menge $\Gamma_{\mathfrak{G}}$ der Systeme $\alpha = (X_1, Y_1, \ldots, X_h, Y_h)$ mit $X_i \in \mathfrak{G}$, $Y_i \in \mathfrak{G}$ und die Gruppe $\mathfrak{G}_1^*$, deren Elemente gewisse Klassen $\bar{\alpha}$ von Elementen $\alpha$ sind. Ferner betrachten wir die Restklassengruppe $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$ modulo der Kommutatorgruppe $\mathfrak{C}_{\mathfrak{G}}$; wie in den letzten Nummern verstehen wir für jedes $X \in \mathfrak{G}$ unter $X'$ das Element von $\mathfrak{G}'$, zu dem $X$ gehört. Außerdem werden die Charakterengruppen $\mathfrak{Ch}\,\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{Ch}\,\mathfrak{G}_1^*$ auftreten. — Wir brauchen den folgenden *Hilfssatz:*

---

[31]) Das ist ein Spezialfall eines allgemeineren Satzes, der auch für höhere Dimensionszahlen gilt: *H. Hopf*, Über die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und ihrer Verallgemeinerungen, Annals of Math. 42 (1941), 22—52; Nr. 34, 35.

$\bar{\alpha}$ sei ein Element von $\mathfrak{G}_1^*$, und $\alpha_1 = (X_1, Y_1, \ldots, X_h, Y_h)$, $\alpha_2 = (P_1, Q_1, \ldots, P_k, Q_k)$ seien zwei Elemente aus $\bar{\alpha}$; ferner sei $s$ ein Charakter von $\mathfrak{G}'$. Dann ist — bei additiver Schreibweise von $\mathfrak{G}'$ —

$$\sum_{i=1}^{h} [s(Y_i')X_i' - s(X_i')Y_i'] = \sum_{j=1}^{k} [s(Q_j')P_j' - s(P_j')Q_j'] \ . \tag{15}$$

Für den Beweis dieses Hilfssatzes ziehen wir eine Mannigfaltigkeit $M^n$ heran, deren Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ ist[32]); da $\mathfrak{G}$ von endlich vielen Elementen mit endlich vielen Relationen erzeugt wird, gibt es eine solche $M^n$ [20]). Da $\alpha_1 \epsilon \bar{\alpha}$ und $\bar{\alpha} \epsilon \mathfrak{G}_1^*$ ist, gibt es nach Satz IIa in $M^n$ einen Zyklus $Z_1$, der von $(X_1, \ldots, Y_h)$ aufgespannt wird; ebenso gibt es in $M^n$ einen Zyklus $Z_2$, der von $(P_1, \ldots, Q_k)$ aufgespannt wird. Da $\alpha_1$ und $\alpha_2$ zu derselben Klasse $\bar{\alpha}$ gehören, gehören nach Satz IIa die Zyklen $Z_1$ und $Z_2$ zu derselben Restklasse $\bar{Z}$ von $\mathfrak{B}^2$ modulo $\mathfrak{S}^2$; nach Nr. 18 ist daher $U \cdot Z_1 \sim U \cdot Z_2$ für jeden $(n-1)$-dimensionalen Zyklus $U$ in $M^n$. Man kann $U$ so wählen, daß $s_U$ mit dem gegebenen Charakter $s$ von $\mathfrak{G}' = \mathfrak{B}^1$ übereinstimmt (Nr. 15d, e); dann ist nach Formel (5) $U \cdot Z_1$ mit der linken Seite von (15), $U \cdot Z_2$ mit der rechten Seite von (15) homolog. Da $U \cdot Z_1 \sim U \cdot Z_2$ ist, stellen also die beiden Seiten von (15) dasselbe Element der Gruppe $\mathfrak{B}^1 = \mathfrak{G}'$ dar; folglich gilt (15).

Auf Grund dieses Hilfssatzes hängt das durch die linke Seite von (15) gegebene Element von $\mathfrak{G}'$ nur von $s$ und $\bar{\alpha}$, aber nicht von dem speziellen Element $\alpha = (X_1, \ldots, Y_h) \epsilon \bar{\alpha}$ ab; wenn wir also

$$[s \cdot \bar{\alpha}] = \sum_{i=1}^{h} [s(Y_i')X_i' - s(X_i')Y_i'] \tag{16}$$

mit beliebigem $\alpha = (X_1, \ldots, Y_h) \epsilon \bar{\alpha}$ setzen, so haben wir durch (16) in eindeutiger Weise ein „Produkt" definiert, wobei der erste Faktor $s \epsilon \mathfrak{Ch}\,\mathfrak{G}'$, der zweite Faktor $\bar{\alpha} \epsilon \mathfrak{G}_1^*$, das Produkt $[s \cdot \bar{\alpha}] \epsilon \mathfrak{G}'$ ist; wir nennen dies das „erste, zu $\mathfrak{G}$ gehörige Gruppen-Produkt". Dieses Produkt ist übrigens distributiv in bezug auf beide Faktoren (wir denken uns nicht nur $\mathfrak{Ch}\,\mathfrak{G}'$, sondern auch $\mathfrak{G}_1^*$ additiv geschrieben).

Wir definieren jetzt das „zweite, zu $\mathfrak{G}$ gehörige Gruppen-Produkt"; in ihm sind beide Faktoren Elemente von $\mathfrak{Ch}\,\mathfrak{G}'$, und das Produkt ist ein Element von $\mathfrak{Ch}\,\mathfrak{G}_1^*$; ist nämlich $s \epsilon \mathfrak{Ch}\,\mathfrak{G}'$, $t \epsilon \mathfrak{Ch}\,\mathfrak{G}'$, $\bar{\alpha} \epsilon \mathfrak{G}_1^*$, so verstehen wir unter $\{t \cdot s\}$ denjenigen Charakter von $\mathfrak{G}_1^*$, der durch

$$\{t \cdot s\}(\bar{\alpha}) = t([s \cdot \bar{\alpha}]) \tag{17}$$

[32]) Ein solcher geometrischer Beweis ist an dieser Stelle unseres Gedankenganges natürlicher und bequemer als ein rein algebraischer Beweis; ein solcher, der aus methodischen Gründen erwünscht ist, wird in dem „Anhang" angegeben werden.

gegeben ist; ausführlicher: ist $[s \cdot \bar{\alpha}] = X'$, so wird durch $\{t \cdot s\}$ dem Element $\bar{\alpha}$ die Zahl $t(X')$ zugeordnet. Ist wieder $(X_1, \ldots, Y_h)$ irgend ein Element von $\Gamma_{\mathfrak{G}}$, das in der Klasse $\bar{\alpha}$ ist, so folgt aus (17) und (16), daß $\{t \cdot s\}$ durch

$$\{t \cdot s\} (\bar{\alpha}) = \sum_{i=1}^{h} \left[t(X_i')\, s(Y_i') - t(Y_i')\, s(X_i')\right] \tag{17'}$$

bestimmt ist. Auch dieses Produkt ist distributiv in bezug auf beide Faktoren; ferner ist übrigens, wie man aus (17′) abliest, $\{s \cdot t\} = -\{t \cdot s\}$, also speziell $\{s \cdot s\} = 0$ .

**20.** *Die Bestimmung von Schnitt-Produkten durch die Fundamentalgruppe.* Wir fahren in der Untersuchung einer Mannigfaltigkeit $M^n$ fort. Es seien wieder: $Z$ eine zweidimensionale Homologieklasse; $\bar{Z}$ das Element von $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2$, zu dem $Z$ gehört; $\bar{\alpha}$ die Menge der $\alpha = (X_1, \ldots, Y_h)$, die $Z$ aufspannen; $U$, $V$ zwei $(n-1)$-dimensionale Homologieklassen; $s_U$, $s_V$ die durch die Schnitte mit $U$, $V$ erzeugten Charaktere von $\mathfrak{B}^1$ . In den Bezeichnungen aus Nr. 15 ist also

$$U = I_2 s_U \ , \quad V = I_2 s_V \ , \quad \bar{Z} = I_3 \bar{\alpha} \ .$$

Nach Nr. 18 können wir auf der linken Seite der Formel (5) statt $U \cdot Z$ auch $U \cdot \bar{Z}$ schreiben; die rechte Seite von (5) ist nach (16) gleich $[s_U \cdot \bar{\alpha}]$ ; die Formel (5) ist also gleichwertig mit [33])

$$U \cdot \bar{Z} = [I_2^{-1} U \cdot I_3^{-1} \bar{Z}] \ . \tag{5*}$$

Nach Nr. 18 ist $V \cdot U \in \mathfrak{W}^{n-2}$, $(V \cdot U)_0 \in \mathfrak{W}_0^{n-2}$ ; die linke Seite von (6) ist daher nach Nr. 15h gleich $s^*(\bar{\alpha})$, wenn man $I_4^{-1}(V \cdot U)_0 = s^*$ setzt; die rechte Seite von (6) ist nach (17′) gleich $\{s_V \cdot s_U\}(\bar{\alpha})$ ; da (6) für beliebige $Z$ gilt, ist (6) also gleichbedeutend mit

$$I_4^{-1}(V \cdot U)_0 = \{s_V \cdot s_U\} \ ,$$

oder, was dasselbe ist, mit

$$(V \cdot U)_0 = I_4\{I_2^{-1} V \cdot I_2^{-1} U\} \ . \tag{6*}$$

Da die Bestimmung der Gruppen-Produkte auf den rechten Seiten von (5*) und (6*) algebraisch, ohne Bezugnahme auf die Mannigfaltigkeit $M^n$ erfolgt, zeigen diese Formeln, daß die Bildung der Schnitt-Produkte $U \cdot \bar{Z}$ und $(V \cdot U)_0$ durch die Fundamentalgruppe bestimmt ist. Wir formulieren dieses Ergebnis noch einmal:

[33]) Führt man wie in Fußnote 29 den Isomorphismus $I_1$ ein, so hat man statt (5*) zu schreiben: $U \cdot \bar{Z} = I_1 \left[I_2^{-1} U \cdot I_3^{-1} \bar{Z}\right]$.

*Satz III. Durch die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ einer Mannigfaltigkeit $M^n$ sind nicht nur — gemäß* (1), (2), (3), (4) *— die Gruppen $\mathfrak{B}^1$, $\mathfrak{B}^{n-1}$, $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2$, $\mathfrak{W}_0^{n-2}$, sondern auch — gemäß den Formeln* (5*), (6*) *— die Bildung des, in $\mathfrak{B}^1$ gelegenen, Schnitt-Produktes je eines Elementes von $\mathfrak{B}^{n-1}$ und eines Elementes von $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2$ sowie die Bildung des, in $\mathfrak{W}_0^{n-2}$ gelegenen, reduzierten Schnitt-Produktes je zweier Elemente von $\mathfrak{B}^{n-1}$ bestimmt.*

Hierin ist enthalten:

*Satz III′. Für zwei Mannigfaltigkeiten $M^n$ und $M_1^{n_1}$ mit isomorphen Fundamentalgruppen sind nicht nur die Gruppen $\mathfrak{B}^1$, $\mathfrak{B}^{n-1}$, $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2$, $\mathfrak{W}_0^{n-2}$ von $M^n$ mit den Gruppen $\mathfrak{B}^1$, $\mathfrak{B}^{n_1-1}$, $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2$, $\mathfrak{W}_0^{n_1-2}$ von $M_1^{n_1}$ isomorph, sondern es sind auch die soeben genannten Produktbildungen in der einen Mannigfaltigkeit isomorph mit den entsprechenden Produktbildungen in der anderen.* [34])

Mit den Sätzen III und III′ ist das Hauptziel dieses Paragraphen erreicht.

**21.** Wir heben eine Konsequenz des Satzes III hervor. Diejenigen $\bar{\alpha} \in \mathfrak{G}_1^*$, für welche $[s\cdot\bar{\alpha}] = 0$ mit allen $s \in \mathfrak{Ch}\,\mathfrak{G}'$ ist, bilden eine Untergruppe $\mathfrak{M}_{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}_1^*$. Aus (5*) geht hervor: der Zyklus $Z$ ist dann und nur dann minimal (Nr. 18), wenn $I_3^{-1}Z \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{G}}$ ist. Die minimalen Homologieklassen $Z$ bilden eine Untergruppe $\mathfrak{M}^2$ von $\mathfrak{B}^2$, die nach Nr. 18 die Gruppe $\mathfrak{S}^2$ enthält; wir haben soeben gesehen, daß $I_3^{-1}(\mathfrak{M}^2/\mathfrak{S}^2) = \mathfrak{M}_{\mathfrak{G}}$ ist. Hieraus und aus (3) folgt weiter, daß $I_3$ auch eine isomorphe Abbildung von $\mathfrak{G}_1^*/\mathfrak{M}_{\mathfrak{G}}$ auf die Restklassengruppe von $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2$ modulo $\mathfrak{M}^2/\mathfrak{S}^2$ vermittelt, die mit $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{M}^2$ isomorph ist. Wir haben also folgendes *Korollar zu Satz III :*

*Bezeichnet $\mathfrak{M}^2$ die Gruppe der minimalen Elemente von $\mathfrak{B}^2$, so sind die Gruppen $\mathfrak{M}^2/\mathfrak{S}^2$ und $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{M}^2$ durch $\mathfrak{G}$ bestimmt; $I_3$ vermittelt nämlich die folgenden Isomorphien:*

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{G}} \cong \mathfrak{M}^2/\mathfrak{S}^2 \;, \quad \mathfrak{G}_1^*/\mathfrak{M}_{\mathfrak{G}} \cong \mathfrak{B}^2/\mathfrak{M}^2 \;.$$

**22.** *Beispiele.* Ähnlich wie in Nr. 13 und Nr. 14 haben wir zwei Methoden zur Behandlung von Beispielen zur Verfügung: die erste besteht darin, daß man zu der $M^n$, die man untersuchen will, eine $M_1^{n_1}$ findet, die dieselbe Fundamentalgruppe besitzt, deren Schnitt-Eigenschaften man aber bereits kennt, und daß man dann Satz III′ anwendet; zweitens kann man $M^n$ direkt mit Hilfe des Satzes III, also der Formeln (5*), (6*) oder,

---

[34]) Die Frage bleibt offen, ob auch die nicht-reduzierten Produktbildungen je zweier Elemente von $\mathfrak{B}^{n-1}$ bzw. von $\mathfrak{B}^{n_1-1}$ miteinander isomorph sind.

was auf dasselbe hinauskommt, der Formeln (5), (6) untersuchen; die Hauptschwierigkeit besteht dabei übrigens oft in der Bestimmung der Gruppe $\mathfrak{G}_1^*$, also in der Lösung einer gruppentheoretischen Aufgabe, die mit Schnitt-Eigenschaften nichts zu tun hat, sondern in den Problemkreis des § 2 gehört. Wir werden hier meistens die zweite der beiden Methoden, gelegentlich aber auch die erste anwenden.

a) *Es sei* $\mathfrak{G}_1^* = 0$; dann ist $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2 = 0$, also sind alle zweidimensionalen Zyklen Kugelbilder; nach Nr. 18 ist daher $U \cdot Z = 0$ für beliebige $U \in \mathfrak{B}^{n-1}, Z \in \mathfrak{B}^2$; aus $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2 = 0$ folgt $\mathfrak{W}_0^{n-2} = 0$, also ist auch $(V \cdot U)_0 = 0$ für beliebige $V \in \mathfrak{B}^{n-1}$, $U \in \mathfrak{B}^{n-1}$.

Die Voraussetzung $\mathfrak{G}_1^* = 0$ ist speziell erfüllt, wenn $\mathfrak{G}$ eine freie Gruppe ist (Nr. 13a). Dann ist übrigens keine eindimensionale, also auch keine $(n-2)$-dimensionale Torsion vorhanden, also $(V \cdot U)_0 = V \cdot U$. Somit gilt:

*Ist die Fundamentalgruppe von $M^n$ eine freie Gruppe, so sind die Schnitt-Produkte je eines $(n-1)$-dimensionalen und eines zweidimensionalen Zyklus sowie je zweier $(n-1)$-dimensionaler Zyklen homolog* 0.

b) $\mathfrak{G}$ *sei Abelsch.* In diesem Fall ist $\mathfrak{G}_1^*$ nach Nr. 13b, c bestimmt. Die Untersuchung ist hier darum besonders einfach, weil für je zwei beliebige Elemente $X, Y$ von $\mathfrak{G}$ der Kommutator $C(X, Y) = 1$ ist, das System $\alpha = (X, Y)$ also immer zu einem Element $\bar{\alpha}$ von $\mathfrak{G}_1^*$ gehört. Wir wollen aber hier keine vollständige Diskussion aller Schnitt-Eigenschaften, die von dem Satz III erfaßt werden, durchführen, sondern nur einige spezielle Punkte hervorheben.

Da $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}$ ist, brauchen wir nicht zwischen den Elementen $X \in \mathfrak{G}$, $X' \in \mathfrak{G}'$ zu unterscheiden. Die Elemente $X_1, \ldots, X_q$ mögen eine eindimensionale Homologiebasis bilden, d. h. $\mathfrak{B}^1 = \mathfrak{G}$ sei direkte Summe von $q$ zyklischen Gruppen, die von den $X_h$ erzeugt werden; für $h = 1, \ldots, p$ seien diese zyklischen Gruppen unendlich, für $h > p$ endlich; dann ist $p$ die erste Bettische Zahl.

Wenn $p = 0$, also $\mathfrak{G}$ endlich ist, so ist $\mathfrak{B}^{n-1} = 0$, die Untersuchung also uninteressant; das gleiche gilt, wenn $q = 1$, also $\mathfrak{G}$ zyklisch ist, da dann nach Nr. 13c $\mathfrak{G}_1^* = 0$ ist, nach dem obigen Satz a) also alle in Frage kommenden Produkte verschwinden. Interesse verdienen also nur die Fälle $p \geqslant 1, q \geqslant 2$, also diejenigen Abelschen Gruppen $\mathfrak{G}$, die unendlich und nicht zyklisch sind.

Setzt man für jedes Element $X = \sum_{i=1}^{q} a_i X_i \in \mathfrak{B}^1$

$$s_h(X) = a_h \,, \quad h = 1, \ldots, p \,, \tag{18}$$

so sind hierdurch $p$ Charaktere $s_h$ von $\mathfrak{B}^1$ definiert; zu ihnen gehören $(n-1)$-dimensionale Zyklen $U_h$ durch die Festsetzung: $s_{U_h} = s_h$; diese $U_h$ bilden die zu $\{X_1, \ldots, X_p\}$ „duale" Basis von $\mathfrak{B}^{n-1}$.

Unter $Z_{ik}$ verstehen wir einen von $(X_i, X_k)$ aufgespannten Zyklus (die $\frac{q(q-1)}{2}$ Zyklen $Z_{ik}$ mit $1 \leqslant i < k \leqslant q$ repräsentieren übrigens eine Basis von $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2$; dies kann man aus Nr. 13b, c entnehmen; wir werden es aber nicht benutzen).

Wir bestimmen $U_h \cdot Z_{ik}$ nach den Formeln (5) und (18):

$$U_h \cdot Z_{ik} = s_h(X_k)X_i - s_h(X_i)X_k = \delta_{hk}X_i - \delta_{hi}X_k \ ,$$

also

$$\begin{aligned} U_k \cdot Z_{ik} &= -U_k \cdot Z_{ki} = X_i \quad \text{für} \quad i \neq k\ ; \\ U_h \cdot Z_{ik} &= 0 \quad \text{für} \quad h \neq i\,,\ h \neq k \quad ; \quad U_h \cdot Z_{ii} = 0\ . \end{aligned} \tag{19}$$

Hieraus sieht man unter anderem:

$\alpha$) *Wenn $p \geqslant 1$, $q \geqslant 2$, wenn also die Abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ unendlich und nicht zyklisch ist, so gibt es einen $(n-1)$-dimensionalen Zyklus $U$ und einen zweidimensionalen Zyklus $Z$, so daß $U \cdot Z \neq 0$ ist.*

Denn man kann in der ersten Gleichung (19) $k = 1$, $i = 2$ wählen.

Aus (19) — oder auch aus (6) — und aus (18) folgt

$$s_{U_j \cdot U_h}(Z_{i\,k}) = \pm\, \delta^{ik}_{jh} \ , \tag{20}$$

wobei $\delta^{ik}_{jh}$ gleich 1 oder 0 ist, je nachdem die ungeordneten Indexpaare $(j, h)$ und $(i, k)$ miteinander übereinstimmen oder nicht. Aus (20) folgt:

$\beta$) *Die $\frac{p(p-1)}{2}$ $(n-2)$-dimensionalen Zyklen $U_j \cdot U_h$, $1 \leqslant h < j \leqslant p$, sind in der Gruppe $\mathfrak{B}^{n-2}_0$ linear unabhängig.*

Denn aus

$$\Sigma a_{jh} U_j \cdot U_h \approx 0 \quad , \qquad 1 \leqslant h < j \leqslant p \ ,$$

— wobei dies eine „schwache" Homologie, d. h. eine Homologie modulo der Torsionsgruppe $\mathfrak{T}^{n-2}$ ist — ergibt sich durch Multiplikation mit $Z_{ik}$ und Anwendung von (20), daß $a_{jh} = 0$ für alle $h, j$ mit $1 \leqslant h < j \leqslant p$ ist. (Man beachte übrigens: die Unabhängigkeit in $\mathfrak{B}^{n-2}_0$ besagt mehr als die Unabhängigkeit in $\mathfrak{B}^{n-2}$.)

Da für je zwei $(n-1)$-dimensionale Zyklen $U$, $U'$ in einer beliebigen Mannigfaltigkeit $M^n$ die Regel $U \cdot U' = -U' \cdot U$ gilt, ist immer

$U \cdot U = 0$, und daher auch immer $U \cdot U' = 0$, falls $U$ und $U'$ linear abhängig sind. Wir behaupten:

*$\gamma$) Ist $\mathfrak{G}$ Abelsch und sind $U, U'$ zwei linear unabhängige Elemente von $\mathfrak{B}^{n-1}$, so ist $U \cdot U' \neq 0$ (in $\mathfrak{B}_0^{n-2}$).*

Denn ist $U = \Sigma a_i U_i$, $U' = \Sigma a_k' U_k$, so ist

$$U \cdot U' = \Sigma\, a_i a_k' U_i \cdot U_k \ , \quad 1 \leqslant i \leqslant p \ , \ 1 \leqslant k \leqslant p \ ,$$

also

$$U \cdot U' = \Sigma\, (a_i a_k' - a_k a_i')\, U_i \cdot U_k \ , \quad 1 \leqslant i < k \leqslant p \ .$$

Nach $\beta$) sind daher, falls $U \cdot U' = 0$ ist, alle Determinanten $a_i a_k' - a_k a_i' = 0$, also sind dann $U$ und $U'$ linear abhängig.

Wir wollen den unter $\alpha$) ausgesprochenen Satz noch etwas anders formulieren, indem wir die Gruppe $\mathfrak{M}^2$ heranziehen (Nr. 21). Der Satz $\alpha$) besagt: Ist $p \geqslant 1$, $q \geqslant 2$, so ist $\mathfrak{M}^2 \neq \mathfrak{B}^2$, also $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{M}^2 \neq 0$.

Im Hinblick auf eine spätere Anwendung (Nr. 27) betrachten wir besonders den Fall $p \geqslant 1$, $q = 2$; dann ist nach Nr. 13c $\mathfrak{G}_1^*$ zyklisch, nach Nr. 21 daher auch $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{M}^2$ zyklisch. — Wir haben also folgendes spezielles Ergebnis:

*$\delta$) Ist $p \geqslant 1$, $q = 2$, also $\mathfrak{G}$ direktes Produkt zweier zyklischer Gruppen, von denen wenigstens eine unendlich ist, so ist $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{M}^2$ eine von 0 verschiedene zyklische Gruppe.*

Alle hiermit bewiesenen Sätze über Mannigfaltigkeiten mit Abelschen Fundamentalgruppen kann man auch dadurch beweisen, daß man ihre Gültigkeit für die in Nr. 13b und c betrachteten speziellen Produkt-Mannigfaltigkeiten verifiziert und dann den Satz III$'$ anwendet.

c) *$\mathfrak{G}$ sei isomorph mit der Fundamentalgruppe der geschlossenen orientierbaren Fläche $M^2$ vom Geschlecht $p > 0$.* Da man die Schnitteigenschaften der Zyklen in $M^2$ kennt, kann man unter Anwendung des Satzes III$'$ den folgenden Satz für eine beliebige Mannigfaltigkeit $M^n$ mit der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ aussprechen:

*Es gibt zueinander duale Homologiebasen $\{X_1', Y_1', \ldots X_p', Y_p'\}$ und $\{U_1, V_1, \ldots, U_p, V_p\}$ der Dimensionen* 1 und $n-1$ *sowie zwei Zyklen $Z$ und $W$ der Dimensionen 2 und $n-2$, so daß die folgenden Schnitt-Relationen bestehen:*

$$U_i \cdot Z = -\, Y_i' \ , \quad V_i \cdot Z = X_i' \ ;$$

$$U_i \cdot V_k = -\, V_k \cdot U_i = \delta_{ik} W \ , \quad U_i \cdot U_k = V_i \cdot V_k = 0 \ .$$

Dieser Satz ist auch als Spezialfall in dem Ergebnis der nächsten Nummer enthalten; dort werden wir direkt mit den Formeln (5) und (6) arbeiten; dadurch wird die Tatsache beleuchtet werden, daß die bekannten und soeben benutzten Schnitteigenschaften auf den Flächen gesetzmäßige Folgen von Eigenschaften der Fundamentalgruppen der Flächen sind.

**23.** $\mathfrak{G}$ *sei eine Gruppe, die von endlich vielen Elementen* $E_1, \ldots, E_m$ *erzeugt wird, zwischen denen eine einzige Relation* $R(E_1, \ldots, E_m) = 1$ *besteht.* Wir haben diese Gruppen bereits in Nr. 14 untersucht, und wir benutzen die dortigen Bezeichnungen und Resultate. Wir verstehen also unter $e_1, \ldots, e_m$ freie Erzeugende einer freien Gruppe $\mathfrak{F}$, die homomorph so auf $\mathfrak{G}$ abgebildet ist, daß die $E_i$ den $e_i$ entsprechen, und wir betrachten wieder das Element $r = R(e_1, \ldots, e_m)$ von $\mathfrak{F}$.

Wir haben gesehen: wenn $r$ nicht Kommutator-Element ist, so ist $\mathfrak{G}_1^* = 0$; daher folgt aus Nr. 21a:

*Wenn $r$ nicht Kommutator-Element ist, so sind alle Schnitte je eines $(n-1)$-dimensionalen und eines zweidimensionalen Zyklus sowie je zweier $(n-1)$-dimensionaler Zyklen homolog* $0$.

Es sei $r \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$. Die Gruppe $\mathfrak{G}' = \mathfrak{B}^1$ wird von den Elementen $E'_1, \ldots, E'_m$ erzeugt; ein System definierender Relationen für $\mathfrak{B}^1$ erhält man, indem man in einem Relationen-System für $\mathfrak{G}$ die Erzeugenden als miteinander vertauschbar ansieht; in unserem Fall verschwindet dabei, da $r \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ ist, die einzige Relation $R = 1$; daher ist $\mathfrak{B}^1$ die von den $E'_h$ erzeugte freie Abelsche Gruppe. $E'_1, \ldots, E'_m$ bilden eine eindimensionale Homologiebasis; die zu ihr duale $(n-1)$-dimensionale Basis sei $\{U_1, \ldots, U_m\}$; es ist also

$$s_{U_k}(E'_h) = \delta_{kh} \ . \tag{21}$$

Nach Nr. 14 ist die Gruppe $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2$ unendlich-zyklisch; folglich ist auch $\mathfrak{W}_0^{n-2}$ unendlich-zyklisch, und da keine eindimensionale Torsion vorhanden ist, $\mathfrak{W}^{n-2} = \mathfrak{W}_0^{n-2}$ (Nr. 15h). Der Zyklus $Z$ repräsentiere, wie in Nr. 14, das erzeugende Element von $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2$ und der Zyklus $W$ das erzeugende Element von $\mathfrak{W}^{n-2}$; dann ist

$$s_W(Z) = 1 \ . \tag{22}$$

Es gibt solche Zahlen $\alpha_{hj}$, daß

$$U_j \cdot Z = \sum \alpha_{hj} E'_h \tag{23}$$

ist; hieraus folgt

$$U_k \cdot U_j \cdot Z = \sum \alpha_{hj} U_k \cdot E'_h \ ,$$

also nach (21)

$$s_{U_k \cdot U_j}(Z) = \alpha_{kj} \ ; \tag{23'}$$

da nach Nr. 18 $U_k \cdot U_j \in \mathfrak{W}^{n-2}$, also $U_k \cdot U_j$ ein Vielfaches von $W$ ist, folgt aus (22) und (23′)

$$U_k \cdot U_j = \alpha_{kj} W \ . \tag{24}$$

Durch (23) und (24) sind alle Schnitt-Relationen gegeben, die für uns in Frage kommen. Unsere Aufgabe besteht darin, die Zahlen $\alpha_{hj}$ aus den Eigenschaften des Elementes $r \in \mathfrak{F}$ zu ermitteln. Da übrigens, wie man aus (24) sieht, $\alpha_{jh} = -\alpha_{hj}$ ist, genügt die Bestimmung der $\alpha_{hj}$ für $1 \leqslant h < j \leqslant m$ .

Die Restklassengruppe $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}/\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}^2$ ist eine freie Abelsche Gruppe vom Range $\frac{m(m-1)}{2}$, und die Kommutatoren $C(e_h, e_i)$ mit $1 \leqslant h < i \leqslant m$ repräsentieren eine Basis dieser Gruppe (Nr. 13b). Daher erfüllt $r$, wie jedes Element von $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$, eine Kongruenz

$$r \equiv \Pi C(e_h, e_i)^{\gamma_{hi}} \ \mathrm{mod.}\ \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}^2 \ , \quad 1 \leqslant h < i \leqslant m \ . \tag{25}$$

Wir behaupten:

$$\alpha_{hj} = \gamma_{hj} \ . \tag{26}$$

*Beweis.* Die Zahlen $\gamma_{hi}$, die bisher nur für $h < i$ erklärt sind, definieren wir für alle $h, i$ aus der Reihe $1, \ldots, m$ durch die Festsetzung

$$\gamma_{ih} = -\gamma_{hi} \ .$$

Dann sei

$$\gamma'_{hi} = \mathrm{Max.}\,(\gamma_{hi}\,, 0) \ ;$$

es ist

$$\gamma_{hi} = \gamma'_{hi} - \gamma'_{ih} \ , \tag{27'}$$

$$\gamma'_{hi} \geqslant 0 \tag{27''}$$

für alle $h, i$ aus der Reihe $1, \ldots, m$ . Da immer $C(y, x) = C(x, y)^{-1}$ ist, können wir statt (25) schreiben:

$$r \equiv \Pi C(e_h\,, e_i)^{\gamma'_{hi}} \ \mathrm{mod.}\ \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}^2 \ , \ 1 \leqslant h \leqslant m \ , \ 1 \leqslant i \leqslant m \ ; \tag{25'}$$

diese Kongruenz ist gleichbedeutend mit einer Gleichung

$$r = \Pi C(e_h\,, e_i)^{\gamma'_{hi}} \cdot \Pi C(x_j\,, y_j) \ , \tag{25''}$$

wobei für jeden Index $j$ wenigstens eines der Elemente $x_j$ und $y_j$ in $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ enthalten ist.

Nach Nr. 14 wird, wenn $r = C(x_1, \ldots, y_t)$ ist, der Zyklus $Z$ von dem System $\alpha = (X_1, \ldots, Y_t)$ aufgespannt. Aus (25″) sieht man, daß es ein solches System $\alpha = (X_1, Y_1, \ldots, X_q, Y_q, \ldots, X_t, Y_t)$ gibt, das folgende Eigenschaften hat: für $k \leqslant q$ ist jedes Paar $(X_k, Y_k)$ mit einem Paar $(E_h, E_i)$ identisch, und zwar kommt für feste $(h, i)$ das Paar $(E_h, E_i)$ genau $\gamma'_{hi}$-mal vor; für jedes $k > q$ ist wenigstens eines der Elemente $X_k$, $Y_k$ Kommutator-Element von $\mathfrak{G}$, also wenigstens eines der Elemente $X'_k$, $Y'_k$ von $\mathfrak{G}'$ gleich 0.

Bilden wir für irgend einen Charakter $s$ der Gruppe $\mathfrak{G}'$ das Gruppenprodukt $[s \cdot \bar{\alpha}]$, wobei $\alpha \in \bar{\alpha}$ ist, so ist infolge der eben genannten Eigenschaften von $\alpha$

$$[s \cdot \bar{\alpha}] = \Sigma\, \gamma'_{hi}\, [s(E'_i)\, E'_h - s(E'_h)\, E'_i] \ ,$$

also nach (27′)

$$[s \cdot \bar{\alpha}] = \Sigma\, \gamma_{hi}\, s(E'_i)\, E'_h \ , \tag{28}$$

wobei $h$ und $i$ immer von 1 bis $m$ laufen. Setzen wir in (28) $s = s_{U_j}$, so erhalten wir nach (5*) und mit Rücksicht auf (21)

$$U_j \cdot Z = \Sigma \gamma_{hj} E'_h \ .$$

Hieraus und aus (23) folgt die behauptete Gleichheit (26).

Es gilt also folgender Satz:

*Ist $r \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$, so erfüllt $r$ eine Kongruenz* (25), *und durch die in ihr auftretenden Exponenten $\gamma_{hi} = \alpha_{hi}$ sind die Schnitt-Relationen* (23) *und* (24) *in $M^n$ bestimmt.*

Ist $r \in \mathfrak{C}^2_{\mathfrak{F}}$, so sind alle $\gamma_{hi} = 0$; ist nicht $r \in \mathfrak{C}^2_{\mathfrak{F}}$, so ist wenigstens ein $\gamma_{hi} \neq 0$; daraus folgt:

*Ist $r \in \mathfrak{C}^2_{\mathfrak{F}}$, so sind alle Schnitte je eines $(n-1)$-dimensionalen und eines zweidimensionalen Zyklus sowie je zweier $(n-1)$-dimensionaler Zyklen in $M^n$ homolog 0 — ebenso wie es der Fall ist, wenn $r$ nicht Kommutator-Element ist. Ist dagegen $r$ zwar in $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$, aber nicht in $\mathfrak{C}^2_{\mathfrak{F}}$ enthalten, so gibt es Elemente $U \in \mathfrak{B}^{n-1}$, $V \in \mathfrak{B}^{n-1}$, $Z \in \mathfrak{B}^2$, so daß $V \cdot U \neq 0$, $U \cdot Z \neq 0$ ist.*

In dem letzten Fall ist, wenn z. B. $\gamma_{12} \neq 0$ ist, nach (23) $U_1 \cdot mZ \neq 0$ für $m \neq 0$; minimal (Nr. 18, 21) sind daher nur die Kugelbilder; folglich gilt:

*Ist $r \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$, aber nicht $\in \mathfrak{C}^2_{\mathfrak{F}}$, so ist die Gruppe $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{M}^2$ unendlich-zyklisch; ist dagegen $r$ nicht $\in \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$, oder ist $r \in \mathfrak{C}^2_{\mathfrak{F}}$, so sind alle zweidimensionalen Zyklen minimal, es ist also $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{M}^2 = 0$.*

Die Schnitteigenschaften der geschlossenen Flächen (Nr. 22c) ergeben sich aus (23), (24), (25), wenn man $m = 2p$ und $\gamma_{12} = \gamma_{34} = \cdots = \gamma_{2m-1,2m} = 1$, alle anderen $\gamma_{hi} = 0$ setzt.

**24.** *Verallgemeinerungen.* Die Sätze dieses Paragraphen lassen sich in zwei Richtungen verallgemeinern.

Erstens braucht man sich für die $(n-1)$-dimensionalen Zyklen nicht auf den ganzzahligen Koeffizientenbereich zu beschränken. Die Formel (5), die ja der Ausgangspunkt für alles Weitere ist, behält nämlich samt ihrem Beweis ihre Gültigkeit, wenn man unter $U$ einen $(n-1)$-dimensionalen Zyklus in bezug auf irgend einen Koeffizientenbereich $\mathfrak{J}$ versteht; dann ist $s_U$ ein $\mathfrak{J}$-Charakter von $\mathfrak{B}^1$, d. h. eine homomorphe Abbildung der (ganzzahligen) Bettischen Gruppe $\mathfrak{B}^1$ in die Gruppe $\mathfrak{J}$, und die rechte Seite von (5) stellt ein Element der ersten Bettischen Gruppe $\mathfrak{B}^1_{\mathfrak{J}}$ in bezug auf $\mathfrak{J}$ dar. In der Formel (6) wird man voraussetzen, daß für $U$ und $V$ ein beliebiger Koeffizienten-Ring zugrundeliegt. Man wird übrigens bereits genügende Verallgemeinerungen und Verfeinerungen unserer Sätze erzielen, wenn man als Koeffizientenbereiche nur die Restklassenringe modulo $m$ mit $m \geqslant 2$ heranzieht. Für die zweidimensionalen Zyklen $Z$ allerdings wird man wohl nicht auf die Ganzzahligkeit verzichten können, wenigstens nicht ohne erhebliche Abänderungen der Begriffe und Sätze aus § 2.

Zweitens kann man die Sätze, die wir für Mannigfaltigkeiten bewiesen haben, auf beliebige Komplexe übertragen, wenn man die alte Schnitttheorie durch die neuere Produkttheorie ersetzt. [3]) Man hat dann die Charaktere der Gruppe $\mathfrak{B}^1$ als eindimensionale Kohomologieklassen zu deuten, und diese treten an die Stelle der $(n-1)$-dimensionalen Homologieklassen $U$; ebenso sind die $(n-2)$-dimensionalen Zyklen $W$ durch zweidimensionale Kozyklen zu ersetzen. Die linke Seite der Formel (5) ist dann das Čech-Whitneysche Produkt — das „cap"-Produkt — einer eindimensionalen Kohomologieklasse mit einer zweidimensionalen Homologieklasse, und die linke Seite von (6) ist das Kolmogoroff-Alexandersche Produkt — das „cup"-Produkt — zweier eindimensionaler Kohomologieklassen; der im Beweis von (5) verwendete Umkehrungs-Homomorphismus existiert auch in der allgemeinen Produkttheorie[35]). Den Inhalt von Nr. 19 (samt dem § 1 und dem Anhang dieser Arbeit) kann man als eine rein algebraische Begründung der cap- und cup-Produkte für die genannten kleinen Dimensionszahlen auffassen, aus welcher hervorgeht, daß diese Produkte in einem Komplex durch dessen Fundamentalgruppe bestimmt sind.

---

[35]) *Whitney*, l. c.[3]), Theorem 6.

## § 5. Dreidimensionale Mannigfaltigkeiten

**25.** Für jede Abelsche Gruppe $\mathfrak{H}$ mit endlich vielen Erzeugenden sollen die Zahlen $p(\mathfrak{H})$, $q(\mathfrak{H})$ analog erklärt sein wie in Nr. 13c: in der Normalform von $\mathfrak{H}$, also in derjenigen Darstellung von $\mathfrak{H}$ als direkte Summe zyklischer Gruppen, in welcher die Ordnung jedes Summanden Teiler der Ordnung des folgenden Summanden ist, ist $q(\mathfrak{H})$ die Anzahl aller Summanden, und $p(\mathfrak{H})$ ist — übrigens in jeder Darstellung von $\mathfrak{H}$ als direkte Summe zyklischer Gruppen — die Anzahl der unendlich-zyklischen Summanden. Zu jeder Gruppe $\mathfrak{G}$ (mit endlich vielen Erzeugenden und Relationen) gehören also, wenn $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}_1^*$ dieselben Bedeutungen haben wie bisher, Zahlen

$$p(\mathfrak{G}') = p_1 \ , \ q(\mathfrak{G}') = q_1 \ , \ p(\mathfrak{G}_1^*) = p^* \ , \ q(\mathfrak{G}_1^*) = q^* \ .$$

Für jeden Komplex $K$ mit der zweiten Bettischen Gruppe $\mathfrak{B}^2$ setzen wir $p(\mathfrak{B}^2) = p_2$, $q(\mathfrak{B}^2) = q_2$. Ist $\mathfrak{G}$ die Fundamentalgruppe von $K$, so folgt aus Nr. 12a, wie schon in Nr. 13c, Formel (5), hervorgehoben wurde,

$$q^* \leqslant q_2 \tag{1}$$

(sowie $p^* \leqslant p_2$, was wir aber im folgenden nicht brauchen).

Jetzt sei $K = M^3$ eine dreidimensionale, geschlossene, orientierbare Mannigfaltigkeit. Nach dem Poincaréschen Dualitätssatz ist $p_2 = p_1$; ferner ist, da keine zweidimensionale Torsion vorhanden ist, $q_2 = p_2$. Hieraus und aus (1) folgt, wenn wir noch die trivialen Beziehungen $p_1 \leqslant q_1$, $p^* \leqslant q^*$ notieren:

*Ist $\mathfrak{G}$ die Fundamentalgruppe einer $M^3$, so bestehen zwischen den durch $\mathfrak{G}$ bestimmten Zahlen $p_1, q_1, p^*, q^*$ die Beziehungen*

$$p^* \leqslant q^* \leqslant p_1 \leqslant q_1 \ . \tag{2}$$

Korollar: *Ist die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ einer $M^3$ endlich, so ist $\mathfrak{G}_1^* = 0$.* Denn aus der Endlichkeit von $\mathfrak{G}$ folgt $p_1 = 0$, aus (2) also $q^* = 0$.

**26.** Wir behaupten zweitens, indem wir die gemäß Nr. 21 zu jeder Gruppe $\mathfrak{G}$ gehörige Gruppe $\mathfrak{M}_{\mathfrak{G}}$ heranziehen:

*Ist $\mathfrak{G}$ die Fundamentalgruppe einer $M^3$, so ist $\mathfrak{G}_1^*/\mathfrak{M}_{\mathfrak{G}}$ nicht eine von 0 verschiedene, zyklische Gruppe.*

Beweis: Nehmen wir an, für die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von $M^3$ sei $\mathfrak{G}_1^*/\mathfrak{M}_{\mathfrak{G}}$ zyklisch und nicht 0. Dann ist nach Nr. 21 auch $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{M}^2$ zyklisch und nicht 0; es gibt also einen solchen zweidimensionalen, nicht minimalen Zyklus $Z_1$, daß sich jeder zweidimensionale Zyklus $U$ als Summe $U = U_0 + mZ_1$ darstellen läßt, wobei $U_0$ minimal ist. Da $Z_1$ nicht minimal ist, gibt es einen zweidimensionalen Zyklus $U$ mit $U \cdot Z_1 \neq 0$; schreiben wir $U$ in der soeben angegebenen Form, so folgt, da $U_0$ minimal ist: $U \cdot Z_1 = mZ_1 \cdot Z_1 \neq 0$. Dies ist unmöglich, da für $(n-1)$-dimensionale Zyklen $Z_1, Z_2$ in einer $M^n$ immer $Z_2 \cdot Z_1 = -Z_1 \cdot Z_2$, also $Z_1 \cdot Z_1 = 0$ ist.

**27.** Die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von $M^3$ sei Abelsch. Nach (2) und nach Nr. 13c, Formel (4), ist dann

$$\frac{q_1(q_1-1)}{2} \leqslant p_1 \leqslant q_1 \quad . \tag{3}$$

Man überzeugt sich ohne Mühe davon, daß die einzigen Paare von ganzen, nicht negativen Zahlen $(q_1, p_1)$, welche (3) erfüllen, abgesehen von dem trivialen Fall $q_1 = p_1 = 0$, die folgenden sind: $q_1 = 1$, $p_1 = 0$; $q_1 = 1$, $p_1 = 1$; $q_1 = 2$, $p_1 = 1$; $q_1 = 2$, $p_1 = 2$; $q_1 = 3$, $p_1 = 3$. Nach Nr. 22b, Satz $\delta$, folgt aus $q_1 = 2$, $p_1 \geqslant 1$, daß $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{M}^2$ zyklisch und nicht 0, also nach Nr. 21, daß auch $\mathfrak{G}_1^*/\mathfrak{M}_{\mathfrak{G}}$ zyklisch und nicht 0 ist; nach Nr. 26 ist dies für eine $M^3$ unmöglich; es bleiben für $q_1$ und $p_1$ also nur folgende Möglichkeiten übrig:

$$q_1 = 1\,,\ p_1 \leqslant 1\,; \qquad q_1 = p_1 = 3\ .$$

$q_1 = 1$ bedeutet: $\mathfrak{G}$ ist zyklisch, und zwar endlich oder unendlich, jenachdem $p_1 = 0$ oder $p_1 = 1$ ist; $q_1 = p_1 = 3$ bedeutet: $\mathfrak{G}$ ist direktes Produkt von drei unendlich-zyklischen Gruppen. Diese Gruppen treten wirklich als Fundamentalgruppen auf, nämlich für die Linsenräume, für das topologische Produkt von Kreis und Kugel und für das topologische Produkt von drei Kreisen. Damit ist bewiesen:

*Die einzigen Abelschen Fundamentalgruppen geschlossener, orientierbarer, dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten sind die zyklischen Gruppen und das direkte Produkt von drei unendlich-zyklischen Gruppen.*

Das ist ein Satz von Reidemeister. [36])

---

[36]) l. c.[4]). Es ist bemerkenswert, daß auch bei Reidemeister die Fälle $q_1 = 2$, $p_1 \geq 1$, besonders behandelt werden müssen; ob ein innerer Zusammenhang zwischen den beiden Methoden besteht, ist mir nicht klar.

28. Aus Nr. 23 und Nr. 26 ergibt sich — in analoger Weise, wie wir soeben die Fälle mit $q_1 = 2$ ausgeschaltet haben — folgender Satz:

*Die Gruppe $\mathfrak{G}$ werde von Elementen $E_1, \ldots, E_m$ erzeugt, zwischen denen eine einzige Relation $R(E_1, \ldots, E_m) = 1$ besteht; das Element $r = R(e_1, \ldots, e_m)$ der von den freien Erzeugenden $e_1, \ldots, e_m$ erzeugten Gruppe $\mathfrak{F}$ sei in $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$, aber nicht in $\mathfrak{C}^2_{\mathfrak{F}}$ enthalten. Dann kann $\mathfrak{G}$ nicht Fundamentalgruppe einer $M^3$ sein.*

Die Voraussetzungen über $\mathfrak{G}$ sind insbesondere erfüllt, wenn — man vgl. Nr. 23 — $\mathfrak{G}$ mit der Fundamentalgruppe einer geschlossenen, orientierbaren Fläche positiven Geschlechtes isomorph ist; diese Gruppen treten also nicht als Fundamentalgruppen dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten auf.

Ich kenne übrigens überhaupt kein Beispiel einer $M^3$, deren Fundamentalgruppe derart erzeugbar ist, daß zwischen den Erzeugenden eine einzige Relation $R = 1$ besteht, wobei $r \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ ist (abgesehen von dem trivialen Fall $r = 1$).

29. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}'_0$ die Faktorgruppe von $\mathfrak{G}'$ nach der Gruppe der Elemente endlicher Ordnung in $\mathfrak{G}'$, so ist, wenn $\mathfrak{G}$ die Fundamentalgruppe von $M^3$ ist, $\mathfrak{B}^2 \cong \mathfrak{G}'_0$; außerdem ist $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2 \cong \mathfrak{G}^*_1$. Da $\mathfrak{B}^2$ eine Abelsche Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden ist, kann man aus den Strukturen von $\mathfrak{B}^2$ und von $\mathfrak{B}^2/\mathfrak{S}^2$ die Struktur von $\mathfrak{S}^2$ bestimmen, z. B. durch Berechnung des Ranges und der Ränge mod. m für $m \geqq 2$. Daher gilt folgender Satz:

*In einer $M^3$ ist die Struktur der Gruppe $\mathfrak{S}^2$, also der Gruppe der Homologieklassen, die Kugelbilder enthalten, durch die Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ bestimmt.*

Speziell ergibt sich:

*$M^3$ ist dann und nur dann homologie-asphärisch* (Nr. 12b), *wenn*

$$\mathfrak{G}^*_1 \cong \mathfrak{G}'_0 \tag{4}$$

*ist.*

Die Isomorphie (4) ist also insbesondere eine notwendige Bedingung dafür, daß eine Gruppe $\mathfrak{G}$ als Fundamentalgruppe einer $M^3$ auftreten kann, deren universeller Überlagerungsraum der euklidische Raum ist; denn jede solche $M^3$ ist sogar homotopie-asphärisch.

Die folgende Frage erscheint mir interessant: Kann man aus den Eigenschaften der Fundamentalgruppe auch erkennen, ob eine $M^3$ homotopie-asphärisch ist?

## ANHANG

### Algebraische Einführung der Gruppen-Produkte

Den Hilfssatz in Nr. 19, der die Definition der Produkte $[s \cdot \bar{\alpha}]$ und $\{s \cdot t\}$ ermöglicht, haben wir dort unter Benutzung topologischer Hilfsmittel bewiesen, die nicht elementar sind. Hier soll ein rein algebraischer Beweis geführt werden; dabei wird sich noch zeigen, daß die frühere Formulierung des Hilfssatzes unnötig eng war und daß daher die beiden Produkte einen größeren Definitionsbereich haben als den, der früher angegeben wurde.

a) $\mathfrak{F}$ sei eine freie Gruppe, $\{e_j\}$ ein freies Erzeugendensystem von $\mathfrak{F}$; die Mächtigkeit dieses Systems ist gleichgültig. Für jedes $x \in \mathfrak{F}$ bezeichne $s_i(x)$ die Anzahl der Faktoren $e_i$, vermindert um die Anzahl der Faktoren $e_i^{-1}$ in einer Darstellung von $x$ als Produkt von Erzeugenden $e_j^{\pm 1}$; da die $e_i$ ein freies Erzeugenden-System bilden, ist $s_i(x)$ eindeutig bestimmt.

$x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ seien Elemente von $\mathfrak{F}$; sie seien als Produkte von Erzeugenden $e_j^{\pm 1}$ dargestellt; die dabei vorkommenden $e_j$ seien etwa $e_1, \ldots, e_q$; die von $e_1, \ldots, e_q$ erzeugte Untergruppe von $\mathfrak{F}$ heiße $\mathfrak{F}_q$; sie ist eine freie Gruppe, und die $e_1, \ldots, e_q$ sind freie Erzeugende von $\mathfrak{F}_q$.

Die Kommutator-Worte $C$ seien wie in Nr. 2 erklärt.

Wir behaupten: *Setzt man*

$$\sum_h \left[s_i(x_h) \cdot s_k(y_h) - s_i(y_h) \cdot s_k(x_h)\right] = \gamma_{ik} \ , \tag{1}$$

*so ist*

$$C(x_1, \ldots, y_n) \equiv \prod_{i<k} C(e_i, e_k)^{\gamma_{ik}} \quad \text{mod. } \mathfrak{C}^2_{\mathfrak{F}_q} \ ; \tag{2}$$

dabei ist $\mathfrak{C}^2_{\mathfrak{F}_q}$ die zweite Kommutatorgruppe von $\mathfrak{F}_q$; da $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}_q}/\mathfrak{C}^2_{\mathfrak{F}_q}$ Abelsch ist, kommt es auf die Reihenfolge der Faktoren des Produktes in (2) nicht an.

Der Beweis dieser Behauptung ergibt sich durch eine einfache Rechnung, indem man $x_1, \ldots, y_n$ als Produkte der $e_1^{\pm 1}, \ldots, e_q^{\pm 1}$ schreibt und dann die — in jeder Gruppe $\mathfrak{G}$ gültigen — Regeln

$$C(a, b) = C(b, a)^{-1} \ ,$$

$$C(a \cdot b, c) \equiv C(a, c) \cdot C(b, c), \quad C(a, b \cdot c) \equiv C(a, b) \cdot C(a, c) \ \text{mod. } \mathfrak{C}^2_{\mathfrak{G}}$$

anwendet, von denen die erste trivial ist und die beiden letzten durch eine kleine Rechnung verifiziert werden können[37]).

---

[37]) Cf. *Witt*, l. c.[22]), § 4; (die dortigen $\mathfrak{G}^n$ sind unsere $\mathfrak{C}^{n-1}_{\mathfrak{G}}$).

b) Wir behaupten weiter: *Ist* $C(x_1,\ldots,y_n)=1$, *so sind alle* $\gamma_{ik}=0$.

Beweis: Da jedes Element $c$ von $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}_q}$ in der Form $c=C(x_1,\ldots,y_n)$ mit $x_h, y_h \in \mathfrak{F}_q$ geschrieben werden kann, sieht man aus (2), daß die Restklassen von $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}_q}$ mod. $\mathfrak{C}^2_{\mathfrak{F}_q}$, welche die $\frac{q(q-1)}{2}$ Elemente $C(e_i, e_k)$ mit $1 \leqslant i < k \leqslant q$ enthalten, die Gruppe $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}_q}/\mathfrak{C}^2_{\mathfrak{F}_q}$ erzeugen; diese Gruppe ist nach einem Satz von Witt[38]) eine freie Abelsche Gruppe vom Range $\frac{q(q-1)}{2}$; daher bilden die genannten Restklassen eine Basis in ihr. Folglich sind die Exponenten $\gamma_{ik}$ in (2) nicht nur durch das System $(x_1,\ldots,y_n)$, sondern sogar durch das Element $C(x_1,\ldots,y_n)$ eindeutig bestimmt. Daraus folgt: wenn $C(x_1,\ldots,y_n)\in\mathfrak{C}^2_{\mathfrak{F}_q}$ ist, so sind alle $\gamma_{ik}=0$. Hierin ist die Richtigkeit der obigen Behauptung enthalten.

c) $\mathfrak{F}$ sei vorläufig eine beliebige Gruppe, frei oder nicht; wie im § 1 verstehen wir unter $\Gamma_{\mathfrak{F}}$ die Menge aller Systeme $(x_1, y_1,\ldots,x_n,y_n)$ mit $x_h, y_h \in \mathfrak{F}$; gemäß Nr. 3 sind in $\Gamma_{\mathfrak{F}}$ Addition und Bildung des Inversen erklärt. Ist $\varphi=(x_1,\ldots,y_n)$, so schreiben wir statt $C(x_1,\ldots,y_n)$ kurz $C(\varphi)$. Für beliebige $\varphi$, $\psi$ ist

$$C(\varphi\pm\psi)=C(\varphi)\cdot C(\psi)^{\pm1}\ . \tag{3}$$

$\mathfrak{F}'$ sei wieder die Gruppe $\mathfrak{F}/\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$, und für jedes $x\in\mathfrak{F}$ sei $x'$ das Element von $\mathfrak{F}'$, zu dem $x$ gehört; wir schreiben $\mathfrak{F}'$ additiv. Ferner betrachten wir Charaktere $f$ von $\mathfrak{F}'$, also homomorphe Abbildungen von $\mathfrak{F}'$ in die additive Gruppe der ganzen Zahlen.

Für beliebiges $\varphi=(x_1,\ldots,y_n)\in\Gamma_{\mathfrak{F}}$ und für einen beliebigen Charakter $f$ von $\mathfrak{F}'$ definieren wir das Produkt $[f\cdot\varphi]$ als

$$[f\cdot\varphi]=\sum_h\,[f(y'_h)\,x'_h-f(x'_h)\,y'_h]\ . \tag{4}$$

$[f\cdot\varphi]$ ist also ein Element von $\mathfrak{F}'$. Die Produktbildung ist distributiv:

$$[f\cdot(\varphi\pm\psi)]=[f\cdot\varphi]\pm[f\cdot\psi]\ ; \tag{5}$$

sie ist übrigens auch distributiv in bezug auf $f$.

Von jetzt an sei $\mathfrak{F}$ wieder eine freie Gruppe; die durch $(x_1,\ldots,y_n)$

---

[38]) l. c.[22]); auf unseren Beweis in Nr. 13 b dürfen wir uns nicht berufen, da der obige „Anhang" einen rein algebraischen Charakter haben soll.

bestimmten Zahlen $\gamma_{ik}$ sind wie in a) erklärt. Wir behaupten: *Ist* $\varphi = (x_1, \ldots, y_n)$, *so ist*

$$[f \cdot \varphi] = \Sigma \gamma_{ik} f(e'_k) e'_i . \tag{6}$$

Beweis: Aus der Definition von $s_i(x)$ folgt

$$x'_h = \Sigma s_i(x_h) e'_i , \quad y'_h = \Sigma s_k(y_h) e'_k .$$

Setzt man dies auf der rechten Seite von (4) ein, so erhält man auf Grund von (1) die behauptete Gleichung (6).

Aus (6) und aus b) folgt: *Ist* $C(\varphi) = 1$, *so ist* $[f \cdot \varphi] = 0$ *für alle Charaktere* $f$ *von* $\mathfrak{F}'$.

Aus diesem Satz, aus (5) und aus (3) ergibt sich:

*Ist* $\mathfrak{F}$ *eine freie Gruppe, und sind* $\varphi$, $\psi$ *Elemente von* $\Gamma_{\mathfrak{F}}$ *mit* $C(\varphi) = C(\psi)$, *so ist* $[f \cdot \varphi] = [f \cdot \psi]$ *für alle Charaktere* $f$.

d) $\mathfrak{G}$ sei eine Gruppe, auf welche die freie Gruppe $\mathfrak{F}$ durch einen Homomorphismus $F$ abgebildet ist. $F$ vermittelt Abbildungen von $\Gamma_{\mathfrak{F}}$ auf $\Gamma_{\mathfrak{G}}$ und von $\mathfrak{F}'$ auf $\mathfrak{G}'$, die wir ebenfalls $F$ nennen: für $\varphi = (x_1, \ldots, y_n) \in \Gamma_{\mathfrak{F}}$ ist $F(\varphi) = (F(x_1), \ldots, F(y_n))$, und für jedes $x \in \mathfrak{F}$ ist $F(x') = (F(x))'$; ferner ordnet $F$ jedem Charakter $s$ von $\mathfrak{G}'$ einen Charakter $f$ von $\mathfrak{F}'$ zu, nämlich den Charakter $f = sF$, der für das Element $x'$ von $\mathfrak{F}'$ denselben Wert hat wie $s$ für das Element $F(x')$. Mit Hilfe der Definition (4) bestätigt man die Regel

$$F([sF \cdot \varphi]) = [s \cdot F(\varphi)] \tag{7}$$

für jedes $\varphi \in \Gamma_{\mathfrak{F}}$ und jeden Charakter $s$ von $\mathfrak{G}'$.

$K_F$ habe dieselbe Bedeutung wie in Nr. 4 und 5; $K_F$ ist also die Menge derjenigen $\alpha \in \Gamma_{\mathfrak{G}}$, zu denen es solche $\varphi \in \Gamma_{\mathfrak{F}}$ gibt, daß $F(\varphi) = \alpha$ und $C(\varphi) \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{N})$ ist, wobei $\mathfrak{N}$ den Kern des Homomorphismus $F$ bezeichnet. Wir behaupten:

*Ist* $\alpha \in K_F$, *so ist* $[s \cdot \alpha] = 0$ *für alle Charaktere* $s$ *von* $\mathfrak{G}'$.

Beweis: Es sei $\alpha \in K_F$, also $\alpha = F(\varphi)$, $C(\varphi) \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}(\mathfrak{N})$; dann ist $C(\varphi) = \Pi C(x_h, y_h)$, wobei für jedes $h$ wenigstens eines der Elemente $x_h$, $y_h$ in $\mathfrak{N}$ enthalten ist; wir setzen $(x_1, y_1, \ldots) = \psi$; dann ist $C(\varphi) = C(\psi)$, also nach c) $[f \cdot \varphi] = [f \cdot \psi]$ für jeden Charakter $f$ von $\mathfrak{F}'$. Nun folgt mit Hilfe von (7) für jeden Charakter $s$ von $\mathfrak{G}'$:

$$\begin{aligned}[s \cdot \alpha] &= [s \cdot F(\varphi)] = F([sF \cdot \varphi]) = F([sF \cdot \psi]) = [s \cdot F(\psi)] \\ &= \Sigma [s(Y'_h) X'_h - s(X'_h) Y'_h] ,\end{aligned}$$

wobei wir $F(x_h) = X_h$, $F(y_h) = Y_h$ gesetzt haben. Da nun für jedes $h$ wenigstens eines der Elemente $x_h$, $y_h$ in $\mathfrak{R}$, also wenigstens eines der Elemente $X_h$, $Y_h$ die Eins von $\mathfrak{G}$, also wenigstens eines der Elemente $X'_h$, $Y'_h$ die Null von $\mathfrak{G}'$ ist, ist in der Tat $[s \cdot \alpha] = 0$.

Aus dem hiermit bewiesenen Satz und aus (5) folgt:

*Ist* $\alpha_1 - \alpha_2 \in K_F$, *so ist* $[s \cdot \alpha_1] = [s \cdot \alpha_2]$ *für alle* $s$.

e) Die in Nr. 5 erklärte Gruppe $\mathfrak{G}^*$ ist eine Restklassengruppe von $\Gamma_{\mathfrak{G}}$, und ihr Kern ist $K_F$. Daher ist dann und nur dann $\alpha_1 - \alpha_2 \in K_F$, wenn $\alpha_1$ und $\alpha_2$ demselben Element $\bar{\alpha}$ von $\mathfrak{G}^*$ angehören. Mithin enthält der soeben bewiesene Satz den Hilfssatz aus Nr. 19.

Wir haben aber in zwei Richtungen mehr bewiesen als diesen Hilfssatz. Erstens ist $\bar{\alpha}$ jetzt ein beliebiges Element von $\mathfrak{G}^*$, während früher außerdem $C(\alpha) = 1$ für $\alpha \in \bar{\alpha}$, also $\bar{\alpha} \in \mathfrak{G}_1^*$ sein mußte. Zweitens haben wir früher vorausgesetzt, daß $\mathfrak{G}$ von endlich vielen Elementen mit endlich vielen Relationen erzeugbar sei, während jetzt $\mathfrak{G}$ ganz beliebig sein kann, da jede Gruppe $\mathfrak{G}$ homomorphes Bild einer freien Gruppe, im allgemeinen einer solchen mit unendlich vielen Erzeugenden, ist. Auf Grund dieser Verallgemeinerungen sieht man: *Die Gruppen-Produkte* $[s \cdot \bar{\alpha}]$ *und* $\{s \cdot t\}$ *sind für beliebige Gruppen* $\mathfrak{G}$ *und beliebige* $\bar{\alpha} \in \mathfrak{G}^*$, $s, t \in \mathfrak{Ch}\,\mathfrak{G}'$ *definiert; und zwar ist* $[s \cdot \bar{\alpha}] \in \mathfrak{G}'$, $\{s \cdot t\} \in \mathfrak{Ch}\,\mathfrak{G}^*$.

Weitere Verallgemeinerungen erhält man in naheliegender Weise, wenn man außer den ganzzahligen Charakteren auch Charaktere modulo $m$ mit $m \geqslant 2$ oder noch allgemeinere Charaktere von $\mathfrak{G}'$ betrachtet.

(Eingegangen den 12. September 1941.)