Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 14 (1941-1942)

Artikel: Über die Homotopiegruppen von Gruppenräumen.

Autor: Eckmann, Beno

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14306

Über die Homotopiegruppen von Gruppenräumen

Von Beno Eckmann, Zürich

1. Die Hurewicz'schen Homotopiegruppen[1]) haben sich als wichtige topologische Invarianten erwiesen; ihre Anwendung scheitert aber oft daran, daß man ihre Struktur nur in wenigen Fällen wirklich kennt, und daß überhaupt selbst für spezielle Räume kein allgemein gangbarer Weg zu ihrer Bestimmung bekannt ist. In dieser Arbeit geben wir Beiträge allgemeiner und spezieller Natur zur Kenntnis der *Homotopiegruppen von Gruppenräumen.* Wir formulieren zunächst nur die Ergebnisse: die *allgemeinen* (Nr. 2 und 3) gestatten unmittelbare Anwendungen auf Sphären (Nr. 4), die von den durch stetige Abbildungen bewirkten Homomorphismen der Homotopiegruppen handeln; die *speziellen* betreffen gewisse Homotopiegruppen der *orthogonalen Gruppen* (Nr. 5) und stehen mit dem übrigen nur in losem Zusammenhang.

2. a) Die allgemeinen Sätze formulieren wir nicht für Gruppenräume, sondern für deren *Verallgemeinerungen* im Sinne von Hopf [3], da dies für die Beweise genügt und für die Anwendungen erwünscht ist, und halten uns dabei immer an folgende Definition: R sei ein metrischer (zusammenhängender, lokal zusammenziehbarer) Raum, in welchem eine stetige Multiplikation erklärt ist; das heißt: jedem geordneten Punktepaar (a, b) von R ist als Produkt ein Punkt $a \cdot b$ von R zugeordnet, der stetig vom Paar (a, b) abhängt (die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes wird also nicht gefordert). Ein solcher Raum soll *Γ-Raum* heißen. Besitzt die Multiplikation eine Eins, d. h. gibt es in R einen Punkt e, derart, daß für alle $a \in R$

$$e \cdot a = a \cdot e = a$$

ist, so bezeichnen wir R als Γ_e-Raum. Wir werden in diesem Fall gelegentlich auch annehmen, daß „das Inverse existiert", d. h. daß es zu jedem Punkt $a \in R$ einen Punkt a^{-1} mit

$$a \cdot a^{-1} = e$$

gibt, der von a stetig abhängt.

---

[1]) Definition s. [1], S. 114, ferner [2], S. 203. — *Die Zahlen in eckiger Klammer* [] *beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.*

Jeder Gruppenraum ist ein Γ_e-Raum mit Inversem; unsere Aussagen über Γ- und Γ_e-Räume gelten also insbesondere für Gruppenräume.

b) X sei ein Kompaktum, R^X der Raum der stetigen Abbildungen von X in R. Ist R ein Γ-Raum, so definieren wir für zwei Abbildungen $f, g \in R^X$ ein *Produkt*

$$f \cdot g = h \in R^X$$

durch

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad \text{für alle } x \in X.$$

Dadurch wird auch zwischen den Abbildungsklassen, d. h. den Klassen homotoper Abbildungen von X in R eine Multiplikation induziert: Bezeichnen wir die Klasse von $f \in R^X$ mit $\{f\}$, so ist die Klasse $\{f' \cdot g'\}$ von der Wahl von $f' \in \{f\}$ und $g' \in \{g\}$ unabhängig, also durch $\{f\}$ und $\{g\}$ bestimmt, und wir setzen

$$\{f\} \cdot \{g\} = \{f \cdot g\} .$$

Wir lassen gewöhnlich, wenn kein Mißverständnis möglich ist, die Klammer weg und schreiben auch für Abbildungsklassen nur $f, g, f \cdot g$ usw.

$\pi_n(R)$ sei die n^{te} Homotopiegruppe von R, und für $f, g \in \pi_n(R)$ bedeute $f + g$ die nach der Hurewicz'schen Vorschrift[1]) auszuführende Addition der Homotopieklassen.

c) Wir werden zeigen, daß zwischen $f + g$ und $f \cdot g$ $(f, g \in \pi_n(R))$ folgende Zusammenhänge bestehen:

Satz I: R sei ein Γ-Raum; für $f_i, g_i \in \pi_n(R)$, $i = 1{,}2$ gilt bei beliebigem n

$$(f_1 + f_2) \cdot (g_1 + g_2) = (f_1 \cdot g_1) + (f_2 \cdot g_2) .$$

Daraus folgt leicht (vgl. Hurewicz [1], Satz XI):

Satz II: R sei ein Γ_e-Raum; für $f, g \in \pi_n(R)$ gilt bei beliebigem n

$$f \cdot g = f + g .$$

In einem Γ_e-Raum fällt also die Multiplikation $f \cdot g$ der Homotopieklassen mit der Hurewicz'schen Addition zusammen und ist somit von selbst assoziativ (und für $n \geqslant 2$ kommutativ).

3 a) In einem Γ_e-Raum R definieren wir für $a \in R$ die Potenz $a^k \in R$ durch

$$a^0 = e, \quad a^k = a \cdot a^{k-1}$$

für alle ganzen Zahlen $k \geqslant 0$; wenn sogar das Inverse existiert (vgl. 1a), auch für negative $k = -k'$, $k' > 0$, durch

$$a^k = a^{-k'} = (a^{-1})^{k'} \quad .$$

Ist $f \in R^X$ eine stetige Abbildung des Kompaktums X in R, so ist dann klar, was unter f^k zu verstehen ist:

$$f^k(x) = (f(x))^k, \quad x \in X \quad .$$

Diejenige Abbildung (bzw. ihre Klasse), bei welcher alle Punkte von X in $e \in R$ abgebildet werden, bezeichnen wir ebenfalls mit e, oder auch mit 0 (wegen der additiven Schreibweise, die bei den Homotopiegruppen üblich ist): $f^0 = e$.

b) Folgerungen aus Satz II:

Satz III: R sei ein Γ_e-Raum; für $f \in \pi_n(R)$ gilt bei beliebigem n:

$$f^k = kf$$

für alle ganzen Zahlen $k \geqslant 0$ und, wenn das Inverse existiert, auch für $k < 0$.

Das kann man auch so formulieren: die Abbildung $p_k(x) = x^k$ von R in sich bewirkt eine homomorphe Abbildung der Homotopiegruppen von R in sich, die durch

$$p_k f = kf$$

gegeben ist.

Satz IV: R sei ein Γ_e-Raum; für $f, g \in \pi_n(R)$, $h \in \pi_r(S^n)$ gilt bei beliebigem n und r

$$(f + g)\,h = fh + gh,$$

also auch

$$(-f)h = -(fh)\,.$$

Man beachte, daß dieses „Distributivgesetz" im allgemeinen nicht zu gelten braucht, wenn R kein Γ_e-Raum ist[2]); dagegen gilt immer ($f \in \pi_n(R)$; $g, h \in \pi_r(S^n)$)

$$f(g + h) = fg + fh\,.$$

Die Sätze I—IV werden im § 1 bewiesen.

4. a) Im § 2 (Nr. 8) wenden wir diese Ergebnisse an auf den Fall einer m-dimensionalen Sphäre S^m, die Γ_e-Raum ist. Mit T_k bezeichnen wir eine Abbildung der S^m in sich vom Grade k. Aus Satz IV folgt:

[2]) Gegenbeispiel s. [2], S. 303.

Satz V: S^m sei ein Γ_e-Raum; dann gilt für $f \epsilon \pi_n(S^m)$ bei beliebigem n und k:

$$T_k f = k f .$$

Da bekanntlich[3]) S^3 und S^7 Γ-Räume sind, gilt Satz V insbesondere für $m = 3$ und 7.

Vermöge der Freudenthal'schen „Einhängung"[4]) der Abbildungen von Sphären auf Sphären übertragen wir (Nr. 9 und 10) die Aussage von Satz V auch auf andere Dimensionszahlen m, wenigstens für gewisse n. $\gamma(f)$ bedeute die Hopf'sche Invariante[5]) von $f \epsilon \pi_s(S^r)$, $s \geqslant 2r - 1$. Dann gilt (man beachte Anm. [11])):

Satz VI: Wenn S^m ein Γ_e-Raum ist, so gilt für $f \epsilon \pi_{r+d}(S^r)$ mit $d \leqslant m$ und $r \geqslant d + 1$ und $\gamma(f) = 0$

$$T_k f = k f .$$

Für $r > d + 1$ bedeutet $\gamma(f) = 0$ keine Einschränkung. — Weil S^7 ein Γ-Raum ist, gilt insbesondere für $f \epsilon \pi_{r+d}(S^r)$ mit $d \leqslant 7$, $r \geqslant d + 1$, $\gamma(f) = 0$

$$T_k f = k f .$$

Korollar[6]): Für $f \epsilon \pi_{r+1}(S^r)$, $r \geqslant 3$ gilt

$$T_2 f = 0 .$$

Das folgt nämlich daraus, daß für $r \geqslant 3$ die Gruppe $\pi_{r+1}(S^r)$ die Ordnung 2 hat.

b) In Satz V, angewandt auf $m = 3$ und 7, ist eine Aussage über die Abbildung T_{-1} der S^m auf sich vom Grade -1 enthalten:

Bei beliebigem n gilt für $f \epsilon \pi_n(S^m)$

$$T_{-1} f = - f .$$

Wir schließen hieran in Nr. 11 noch einige Betrachtungen über die Abbildung T_{-1} und zeigen u. a., daß für $n \geqslant 3$, $f \epsilon \pi_n(S^2)$ im Gegensatz zu V und VI

$$T_{-1} f = f$$

ist.

---

[3]) vgl. *Hopf* [4], S. 436—437.
[4]) s. [2], S. 303—304.
[5]) Definition: [5], S. 645ff. und [4], S. 428ff., ferner [2], S. 304—305.
[6]) vgl. [6], Nr. 12b, Hilfssatz.

5. Im § 3 (der vom vorigen nur wenig benützt) bestimmen wir die *dritte, vierte und fünfte Homotopiegruppe der orthogonalen Gruppen,* unter Verwendung einer von mir kürzlich entwickelten Methode[7]. Γ_n bedeute die Gruppe aller orthogonalen $(n+1)$-reihigen Matrizen mit der Determinante $+1$, $\mathfrak{G}$ die additive Gruppe der ganzen Zahlen, $\mathfrak{G}_2$ die Restklassengruppe von $\mathfrak{G}$ mod. 2 ($\approx$ bedeutet isomorph).

Wir fassen die Ergebnisse des § 3 im folgenden Satz zusammen:

Satz VII:

1. *Für* $n \geqslant 4$ *ist* $\pi_3(\Gamma_n) \approx \mathfrak{G}$
2. *Für* $n \geqslant 5$ *ist* $\pi_4(\Gamma_n) = 0$
3. *Für* $n \geqslant 6$ *ist* $\pi_5(\Gamma_n) = 0$

Ferner gilt

4. $\pi_3(\Gamma_2) \approx \mathfrak{G}$, $\pi_3(\Gamma_3) \approx \mathfrak{G} + \mathfrak{G}$.
5. $\pi_4(\Gamma_2) \approx \mathfrak{G}_2$, $\pi_4(\Gamma_3) \approx \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_2$, $\pi_4(\Gamma_4) \approx \mathfrak{G}_2$.
6. $\pi_5(\Gamma_2) = 0$, $\pi_5(\Gamma_3) = 0$, $\pi_5(\Gamma_4) = 0$, $\pi_5(\Gamma_5) \approx \mathfrak{G}$.

§ 1. Beweis der Sätze I—IV

6. a). R sei ein zusammenhängender, lokal zusammenziehbarer metrischer Raum. Wir bezeichnen mit $R^{S^n}(a) \subset R^{S^n}$ den Raum derjenigen Abbildungen $f \in R^{S^n}$, für welche

$$f(x_0) = a$$

ist, wobei x_0 ein beliebiger, aber festgewählter Punkt von S^n, a von R ist. Die Elemente der n^{ten} *Homotopiegruppe* von R, $\pi_n(R)$, sind die Komponenten von $R^{S^n}(a)$, also die Klassen homotoper Abbildungen der S^n in R „unter Festhaltung von a". Wir wählen als Urbild statt der Sphäre S^n auch den *Einheitskubus* E^n des n-dimensionalen Euklidischen Raumes R^n, gegeben durch n reelle Koordinaten x_i

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1 \qquad i = 1, \ldots, n \;;$$

den Punkt mit den Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$ bezeichnen wir auch kurz mit x, einen Punkt auf dem Rande von E^n (d. h. für welchen mindestens eine seiner Koordinaten den Wert 0 oder 1 hat) mit x_0. Elemente von $\pi_n(R)$ sind dann die Komponenten von $R^{E^n}(a)$; das ist der Raum der Abbildungen $f \in R^{E^n}$, bei welchen für alle x_0

$$f(x_0) = a$$

[7]) s. [6], insbesondere die Nr. 6 und 10. — Die Kenntnis der Arbeit [6] wird in Nr. 9 sowie im § 3 vorausgesetzt. Eine wesentliche Rolle spielt im § 3 der Satz ([6], Satz 27), daß die Sphäre S^5 nicht parallelisierbar ist.

ist, und die Hurewicz'sche Summe[1]) $f + g = h$ zweier Abbildungen $f, g \in R^{E^n}(a)$ kann durch

$$h(x) = h(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f(2x_1 \;, \quad x_2, \ldots, x_n) & 0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{1}{2} \\ g(2x_1 - 1, x_2, \ldots, x_n) & \frac{1}{2} \leqslant x_1 \leqslant 1 \end{cases} \tag{1}$$

gegeben werden.

Die Struktur von $\pi_n(R)$ ist von der Wahl von $a \in R$ unabhängig (man kann in naheliegender Weise vermittelst eines Weges von a nach $b \in R$ zwischen den zu a und b gehörigen Gruppen $\pi_n(R)$ einen Isomorphismus herstellen.

b) R sei nun ein Γ-Raum (Nr. 2); dann ist für die Abbildungen (sowie ihre Klassen) $f, g \in R^{E^n}$ das Produkt

$$f \cdot g \in R^{E^n}$$

definiert.

Aus den vier Abbildungen $f_1, f_2, g_1, g_2 \in R^{E^n}(a)$ bilden wir die Abbildung

$$h = (f_1 + f_2) \cdot (g_1 + g_2)$$

also

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f_1(2x_1 \;, \quad \ldots, x_n) \cdot g_1(2x_1 \;, \quad \ldots, x_n) & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ f_2(2x_1 - 1, \ldots, x_n) \cdot g_2(2x_1 - 1, \ldots, x_n) & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

das ist aber definitionsgemäß die Abbildung $(f_1 \cdot g_1) + (f_2 \cdot g_2)$. Es gilt also (*Satz I*):

$$(f_1 + f_2) \cdot (g_1 + g_2) = (f_1 \cdot g_1) + (f_2 \cdot g_2) . \tag{2}$$

Man beachte, daß aus $f, g \in R^{E^n}(a)$ folgt

$$f \cdot g \in R^{E^n}(a \cdot a);$$

in Gleichung (2) stehen also auf beiden Seiten Abbildungen aus $R^{E^n}(a \cdot a)$.

Satz I ist damit nicht nur für Elemente der (zu beliebigem $a \in R$ gehörigen) Homotopiegruppen, sondern für die Sphärenabbildungen selbst bewiesen.

c) In einem Γ-Raum R bezeichnen wir mit l_a die bei festem a und variablem $b \in R$ durch

$$l_a(b) = a \cdot b$$

gegebene Abbildung von R in sich, analog mit r_a die Abbildung

$$r_a(b) = b \cdot a .$$

X sei ein Kompaktum, $f \in R^X$, und die Abbildung von X in R, bei welcher alle Punkte von X auf $a \in R$ abgebildet werden, sei auch mit a bezeichnet. Es gilt dann für $f,\ a \in R^X$

$$f \cdot a = r_a f$$
$$a \cdot f = l_a f \ .$$

Aus (2) folgt also für 2 Abbildungen $f, g \in R^{E^n}(a)$:

$$(f + a) \cdot (a + g) = f \cdot a + a \cdot g = r_a f + l_a g \ .$$

Da aber $f + a$ zu f und $g + a$ zu g homotop ist (in $R^{E^n}(a)$), gilt für die Klassen von f und g in $R^{E^n}(a)$:

$$f \cdot g = r_a f + l_a g \ . \tag{3}$$

7. a) In dieser Nummer soll R ein *Γ_e-Raum* sein (Nr. 7); wir zeichnen für die Bildung der Homotopiegruppen von R den Punkt $e \in R$ aus und betrachten ausschließlich Abbildungen $f \in R^{E^n}(e)$. Da sowohl r_e als auch l_e die Identität von R ist, folgt aus (3) für 2 Elemente $f, g \in \pi_n(R)$ der *Satz II :*

$$f \cdot g = f + g \ . \tag{4}$$

Daraus folgt unmittelbar (wenn die Potenzen a^k, $a \in R$, bzw. f^k, $f \in \pi_n(R)$ gemäß Nr. 2 erklärt sind)

$$f^k = f \cdot f^{k-1} = f + f^{k-1} \ ,$$

und durch vollständige Induktion der *Satz III* für $k \geqslant 0$: Für $f \in \pi_n(R)$ ist

$$f^k = k \cdot f \ ; \tag{5}$$

für negative k folgt er aus

$$f \cdot f^{-1} = f + f^{-1} = 0 \ ,$$

also

$$f^{-1} = -f \ . \tag{5$'$}$$

b) Es seien f, g Elemente von $\pi_n(R)$ und h ein Element von $\pi_r(S^n)$, bzw. Abbildungen, die die betreffenden Klassen repräsentieren. Nach (4) ist

$$(f + g)h = (f \cdot g)h \ ;$$

eine Abbildung dieser Klasse ist durch

$$f(h(x)) \cdot g(h(x)) \quad , \quad x \in S_r$$

gegeben, es gilt also

$$(f + g)h = fh \cdot gh = fh + gh \ .$$

Also gilt für einen Γ_e-Raum das „*Distributivgesetz*" (*Satz IV*) für die Homotopiegruppen: wenn $f, g \in \pi_n(R)$ und $h \in \pi_r(S^n)$, so ist

$$(f+g)h = fh + gh\,. \tag{6}$$

Wegen

$$(f-f)h = fh + (-f)h = 0$$

folgt hieraus

$$(-f)h = -(fh)\,. \tag{6'}$$

Es gilt also insbesondere für alle ganzen Zahlen k:

$$(kf)h = k(fh)\,. \tag{6''}$$

(Daß für $f \in \pi_n(R)$, g, $h \in \pi_r(S^n)$ das Distributivgesetz

$$f(g+h) = fg + fh$$

immer gilt, geht direkt aus der Definition (1) hervor.)

§ 2. Abbildungen von Sphären auf Sphären

8. a) Mit T_k bezeichnen wir immer eine Abbildung (oder Abbildungsklasse) der orientierten r-dimensionalen Sphäre S^r auf sich vom Grade k (r und k beliebig). Faßt man T_k als Element der Homotopiegruppe $\pi_r(S^r)$ auf, so ist

$$T_k = kT_1\,. \tag{7}$$

Wenn die Sphäre S^m ein Γ_e-Raum ist, gilt also nach Satz IV (Formel (6)''):

$$T_k f = (k\,T_1)f = k(T_1 f) = kf\;,$$
$$T_k f = kf\;. \tag{8}$$

Damit ist *Satz V* bewiesen.

b) Für den Fall einer Γ_e-Sphäre S^m ist also der durch $T_k \in \pi_m(S^m)$ bewirkte Homomorphismus der Gruppen $\pi_n(S^m)$ in sich durch $T_k f = kf$ gegeben.

Man kann ganz allgemein die Abbildungen $T_k \in \pi_r(S^r)$ als Operatoren der Homotopiegruppen $\pi_n(S^r)$ auffassen; für sie gilt bei beliebigem $f \in \pi_n(S_r)$

$$T_k(T_{k'}f) = T_{kk'}f\;, \tag{9}$$

hingegen nicht immer

$$(T_k + T_{k'})f = T_k f + T_{k'} f\;, \tag{10}$$

wie das Beispiel $n = 2r - 1$ bei geradem r zeigt (dann gilt nämlich für die Hopf'sche Invariante[8]) γ

$$\gamma((T_k + T_{k'})f) = \gamma(T_{k+k'}f) = (k + k')^2 \gamma(f)$$

aber

$$\gamma(T_k f + T_{k'} f) = \gamma(T_k f) + \gamma(T_{k'} f) = (k^2 + k'^2) \cdot \gamma(f) \ ,$$

was für $\gamma(f) \neq 0$, $k \neq 0$, $k' \neq 0$ unmöglich gleich sein kann).

Für Γ_e-Sphären folgt (10) natürlich aus (8). — Es sei hier noch erwähnt, daß für $f \in \pi_3(S^2)$

$$T_k f = k^2 f$$

ist[9]).

9. a) Nach Freudenthal[4]) verstehen wir unter *Einhängung* $\mathfrak{E}$ eine homomorphe Abbildung der Homotopiegruppe $\pi_n(S^r)$ in $\pi_{n+1}(S^{r+1})$ (für beliebige n und r), die folgendermaßen gegeben ist: E^1 sei die Einheitsstrecke $0 \leqslant t \leqslant 1$; für $x \in S^n$ bedeute (x, t) einen Punkt des topologischen Produkts $S^n \times E^1$, für $y \in S_r$ (y, t) einen Punkt von $S^r \times E^1$. f sei eine Abbildung der S^n in S^r, F die durch

$$F(x, t) = (f(x), t) \qquad x \in S^n, f(x) \in S^r$$

gegebene Abbildung von $S^n \times E^1$ in $S^r \times E^1$. Identifiziert man $S^n \times (1)$ und $S^n \times (0)$ und ebenso $S^r \times (1)$ und $S^r \times (0)$ zu je einem Punkt, so kann man F als Abbildung von S^{n+1} in S^{r+1} auffassen; diese Abbildung bzw. ihre Klasse heißt $\mathfrak{E}f$.

b) *Hilfssatz 1*: Für $g \in \pi_3(S^n)$, $f \in \pi_n(S^r)$ gilt

$$(\mathfrak{E}f)\,(\mathfrak{E}g) = \mathfrak{E}(fg) \,.$$

Beweis: $\mathfrak{E}f$ sei gegeben durch die Abbildung F von $S^n \times E^1$ in $S^r \times E^1$

$$F(u, t) = (f(u), t) \quad u \in S^n, f(u) \in S^r \quad ,$$

und $\mathfrak{E}g$ durch die Abbildung G von $S^s \times E^1$ in $S^n \times E^1$

$$G(x, t) = (g(x), t) \quad x \in S^s, g(x) \in S^n \quad .$$

Dann ist $(\mathfrak{E}f)\,(\mathfrak{E}g)$ gegeben durch die Abbildung FG von $S^s \times E^1$ in $S^r \times E^1$:

$$F(G(x, t)) = F(g(x), t) = (f(g(x)), t) \ ;$$

durch diese Abbildung ist aber gerade $\mathfrak{E}(fg)$ erklärt.

---

[8]) s. [5]), ferner [5], S. 653.

[9]) die Klassen $f \in \pi_3(S^2)$ sind durch die Invariante $\gamma(f)$ bestimmt, vgl. [6], Nr. 12 b, im Beweis des Hilfssatzes.

c) $T_k^{(r)}$ sei wie in Nr. 6a) erklärt; der obere Index (r) soll hervorheben, daß es sich um ein Element von $\pi_r(S^r)$ handelt.

Hilfssatz 2: Für jedes $f \in \pi_n(S^r)$ ist

$$T_k^{(r+1)}(\mathfrak{E}f) = \mathfrak{E}(T_k^{(r)}f) \ .$$

Beweis: Offenbar gilt

$$T_k^{(r+1)} = \mathfrak{E}T_k^{(r)} ,$$

somit nach Hilfssatz 1

$$T_k^{(r+1)}(\mathfrak{E}f) = (\mathfrak{E}\,T_k^{(r)})\,(\mathfrak{E}f) = \mathfrak{E}(T_k^{(r)}f) \ .$$

10. Beweis von Satz VI.

a) *Wenn für ein Element $f \in \pi_n(S^r)$ und eine ganze Zahl k*

$$T_k f = k f$$

gilt, dann gilt dies auch für jede Abbildungsklasse, die aus f durch (evtl. wiederholte) Einhängung hervorgeht.

Dies folgt aus Hilfssatz 2 und der Tatsache, daß $\mathfrak{E}$ ein Homomorphismus ist. — Allgemein gilt

$$T_k(\mathfrak{E}f) - k(\mathfrak{E}f) = \mathfrak{E}(T_k f - kf) \,. \tag{11}$$

b) S^m sei eine Γ_e-Sphäre; dann gilt nach Satz V für $f \in \pi_n(S^m)$

$$T_k f = k f ,$$

und diese Formel läßt sich für gewisse, in Satz VI genannte Zahlen r und d auf $f \in \pi_{r+d}(S^r)$ mit $\gamma(f) = 0$ übertragen ($\gamma(f)$ ist die Hopf'sche Invariante [5]) von f). Wir unterscheiden für den Beweis die Fälle

$$r > m\,, \qquad m \geqslant d$$

und

$$r < m\,, \qquad r \geqslant d + 1$$

($r = m$ ist in Satz V enthalten), die man in der Form

$$m \geqslant d\,, \qquad r \geqslant d + 1$$

zusammenfassen kann.

c) $r > m, m \geqslant d$. In diesem Falle läßt sich jedes Element $f \in \pi_{r+d}(S^r)$ mit $\gamma(f) = 0$ durch (evtl. mehrfache) Einhängung aus einem Element $h \in \pi_{m+d}(S^m)$ erzeugen (nach einem Satze von Freudenthal[10]); nach Nr. 10a) gilt also $T_k f = k f$.

---

[10]) [2], S. 300, Satz I.

d) $r < m$, $r \geqslant d+1$. Ein Element $f \in \pi_{r+d}(S^r)$ geht durch $(m-r)$-fache Einhängung über in $g \in \pi_{m+d}(S^m)$, und gleichzeitig wegen (11) $T_k f - kf$ in $T_k g - kg = 0$. Ferner folgt aus $\gamma(f) = 0$

$$\gamma(T_k f - kf) = (k^2 - k)\gamma(f) = 0$$

und nach Freudenthal[11]) folgt aus $\mathfrak{E}h = 0$, $\gamma(h) = 0$ immer $h = 0$, also $T_k f - kf = 0$.

11a) Wir schließen noch einige Bemerkungen über den durch die Abbildung T_{-1} der Sphäre S^r auf sich vom Grade -1 bewirkten Homomorphismus von $\pi_n(S^r)$ an, die nur teilweise mit dem vorigen zusammenhängen.

In Satz V ist enthalten, daß für $m = 3$ und 7 und beliebiges n und $f \in \pi_n(S^m)$ gilt

$$T_{-1} f = -f. \tag{12}$$

Diese Formel gilt übrigens nach Freudenthal[12]) für *jedes eingehängte* Element $f = \mathfrak{E}g$ einer Homotopiegruppe $\pi_n(S^r)$.

b) Wir benützen im folgenden den Begriff der *retrahierbaren Zerlegung* $\mathfrak{Z}$ (*oder Faserung*) eines Kompaktums R[13]) und der zugehörigen *Projektion P* (oder Faserabbildung) von R auf den Zerlegungsraum Z, ferner verschiedene für solche Zerlegungen geltende Beziehungen, die ich an anderer Stelle [6] bewiesen habe.

L_r sei der Linienelementraum der S^r, d. h. der (in natürlicher Weise topologisierte) Raum aller an die S^r tangentialen Einheitsvektoren; er ist gefasert in die Teilmengen der in einem bestimmten Punkt der S^r angreifenden Einheitsvektoren; diese Teilmengen sind alle der S^{r-1} homöomorph. Diese Zerlegung $\mathfrak{Z}$ ist retrahierbar[14]), und ihr Zerlegungsraum ist zur S^r homöomorph und sei mit ihr identifiziert. Eine Abbildung F eines Kompaktums X in die S^r heißt *Spur in L_r*, wenn es eine Abbildung f von X in L_r gibt, derart, daß

$$F = Pf$$

ist.

---

[11]) [2], S. 300, Satz II. Der Fall $r < m$, $r = d+1$ für ungerades r wird von diesem Satz allerdings nur für $r = 1, 3, 7$ erledigt; für die übrigen ungeraden r folgt der Satz II von [2] erst aus einer Mitteilung von *Freudenthal* (Proc. Akad. Amsterdam 42 (1939), S. 140), deren Beweis noch nicht erschienen und mir unbekannt ist; auf Grund dieser Mitteilung würde Satz II von [2] die Form erhalten: für $f \in \pi_{r+d}(S^r)$, $r \geq d+1$, $\mathfrak{E}f = 0$, $\gamma(f) = 0$ folgt $f = 0$.

[12]) s. [2], S. 304, Nr. 3.7.

[13]) [6], § 1.

[14]) [6], Nr. 14.

c) *Ist r gerade und $F \in S^{nX}$ eine Spur in L_r, so ist $T_{-1}F$ zu F homotop.*

Beweis: Wenn r gerade ist, so hat die Spiegelung der S^r an ihrem Mittelpunkt, die jeden Punkt $a \in S^r$ in seinen Antipodenpunkt a' abbildet, den Grad -1; wir können also für T_{-1} diese Abbildung wählen.

$F \in S^r$ sei eine Spur in L_r; das bedeutet, daß wir dem Punkt $F(x) \in S^r$ in stetiger Weise einen in $F(x)$ angebrachten tangentialen Einheitsvektor und infolgedessen einen durch $F(x)$ gehenden gerichteten Großkreis der S^r zuordnen können. Läßt man für jedes $x \in X$ den Punkt $F(x)$ auf dem zu ihm gehörigen gerichteten Großkreis in den Antipodenpunkt $F'(x) = T_{-1}F(x)$ wandern, so wird F stetig in $T_{-1}F$ übergeführt.

d) Wenn eine Abbildung von X in S^r Spur in L_r ist, so ist auch jede zu ihr homotope Abbildung Spur in L_r[15]); wir sagen deshalb auch von einer *Abbildungsklasse* (oder einem Element einer Homotopiegruppe), sie sei Spur in L_r.

Wenn $f \in \pi_n(S^r)$ eingehängt, d. h. von der Form $f = \mathfrak{E}g$ ist, und wenn bei geradem r f eine Spur in L_r, bei ungeradem r g eine Spur in L_{r-1} ist, so ist $2f = 0$.

Beweis: Wenn $f = \mathfrak{E}g$ ist, so ist[12])

$$T_{-1}f = -f ;$$

r sei gerade: Wenn f Spur in L_r ist, so ist $T_{-1}f = f$, also

$$f = -f .$$

r sei ungerade: Wenn g Spur in L_{r-1} ist, so ist $T_{-1}g = g$, also nach Hilfssatz 2

$$T_{-1}f = T_{-1}\mathfrak{E}g = \mathfrak{E}T_{-1}g = \mathfrak{E}g = f$$

also

$$f = -f .$$

e) *Jedes Element $f \in \pi_n(S^2)$ mit beliebigem $n \geqslant 3$ ist Spur in L_2.*

Beweis: Wegen $\pi_{n-1}(S^1) = 0$ $(n \geqslant 3)$ ist dies eine unmittelbare Folgerung aus den an anderer Stelle[16]) bewiesenen „Hurewicz'schen Formeln".

Aus 9c) folgt also: Für jedes Element $f \in \pi_n(S^2)$ $(n \geqslant 3)$ gilt

$$T_{-1}f = f . \tag{13}$$

Aus 9d) folgt: Für jedes eingehängte Element $f = \mathfrak{E}g \in \pi_n(S^3)$, $(n \geqslant 4)$ gilt $2f = 0$.

[15]) [6], Nr. 3d (Lemma).

[16]) [6], Nr. 6, Satz E mit Korollar.

§ 3. Einige Homotopiegruppen der orthogonalen Gruppen

12. a) Die Methode, mit welcher wir in diesem Paragraphen die 3., 4. und 5. Homotopiegruppe der orthogonalen Gruppen bestimmen, habe ich an anderer Stelle [6] ausführlich entwickelt; wir geben hier nur die wichtigsten Bezeichnungen und Beziehungen an, soweit sie für das Folgende benötigt werden.

b) Γ_m sei die (topologische) Gruppe aller $(m+1)$-reihigen orthogonalen Matrizen $a = (a_{ik})$ mit der Determinante $+1$. Die Untergruppe der Matrizen (a_{ik}) mit

$$a_{1k} = \delta_{1k} \qquad k = 1, \ldots, m+1$$

ist zur Gruppe Γ_{m-1} isomorph und werde ebenfalls mit Γ_{m-1} bezeichnet. *Die Zerlegung* $\mathfrak{Z}_m$ *von* Γ_m *in Restklassen nach der Untergruppe* Γ_{m-1} ist retrahierbar[13]); ihr Zerlegungsraum ist zur Sphäre S^m homöomorph: jede Restklasse von Γ_m nach Γ_{m-1} umfaßt genau alle diejenigen Matrizen (a_{ik}), die in den Elementen a_{1k} der ersten Zeile übereinstimmen, und ist somit gegeben durch $(m+1)$ reelle Zahlen a_{1k}, die der einzigen Bedingung $\sum_{k=1}^{m+1} a_{1k}^2 = 1$ genügen, und die man somit in einem $(m+1)$-dimensionalen euklidischen Raum R^{m+1} als Koordinaten eines Punktes $u = (u_1, \ldots, u_{m+1})$ der Sphäre S^m

$$\sum_{k=1}^{m+1} u_k^2 = 1$$

deuten kann.

Die Abbildung von Γ_m auf S^m, die jedem Punkt $a = (a_{ik})$ von Γ_m seine Restklasse, d. h. den Punkt u

$$u_k = a_{1k} \qquad k = 1, \ldots, m+1$$

der Sphäre S^m zuordnet, heißt *Projektion* und wird mit P_m bezeichnet.

c) Bei der Bildung der Homotopiegruppen von Γ_m sei der Punkt $e = (\delta_{ik}) \in \Gamma_m$ ausgezeichnet (vgl. 4a), bei denen von S^m der Punkt u_0 mit den Koordinaten δ_{1k}:

$$P_m e = u_0 .$$

$\psi_n(\mathfrak{Z}_m)$ *sei die Untergruppe derjenigen Elemente von* $\pi_n(\Gamma_{m-1})$, d. h. Abbildungsklassen von S^n in die Untergruppe Γ_{m-1} von Γ_m, *die in der* 0-*Klasse von* $\pi_n(\Gamma_m)$ *enthalten sind.*

$\varphi_n(\mathfrak{Z}_m)$ *sei die Untergruppe derjenigen Elemente von* $\pi_n(\Gamma_m)$, *die, als Abbildungsklassen aufgefaßt, Elemente von* $\pi_n(\Gamma_{m-1})$ *enthalten.*

Es gelten die „Hurewicz'schen Formeln"[16]) ($\approx$ bedeutet isomorph)

$$\left.\begin{array}{lrcl} \mathrm{I} & \pi_n(S^m)/P_m\,\pi_n(\Gamma_m) & \approx & \psi_{n-1}(\mathfrak{Z}_m) \\ \mathrm{II} & P_m\,\pi_n(\Gamma_m) & \approx & \pi_n(\Gamma_m)/\varphi_n(\mathfrak{Z}_m) \\ \mathrm{III} & \varphi_n(\mathfrak{Z}_m) & \approx & \pi_n(\Gamma_{m-1})/\psi_n(\mathfrak{Z}_m) \end{array}\right\} \tag{14}$$

für beliebiges $n \geqslant 1$ ($\psi_0(\mathfrak{Z}_m)$ ist $= 0$ zu setzen) und $m \geqslant 2$. Der Isomorphismus (14), II wird durch die Projektion P_m selbst vermittelt.

Eine Folge dieser Beziehungen ist insbesondere[17]): Für $m \geqslant n + 1$ ist

$$\pi_n(\Gamma_m) \approx \pi_n(\Gamma_{n+1}) .$$

Es ist also von besonderem Interesse, die Gruppen $\pi_n(\Gamma_{n+1})$ zu bestimmen.

d) Unter einem *Schnittelement t der Zerlegung* $\mathfrak{Z}_m$ verstehen wir eine stetige Abbildung t der m-dimensionalen Vollkugel V^m in Γ_m, bei welcher die Randsphäre Σ^{m-1} von V^m in die Untergruppe Γ_{m-1} von Γ_m abgebildet wird, und derart, daß die Abbildung $P_m t$ das Innere von V^m topologisch auf $S^m - u_0$ abbildet. Die zugehörige Abbildung t' von Σ^{m-1} in Γ_{m-1} (bei welcher ein bestimmter Punkt $\xi_0 \in \Sigma^{m-1}$ auf $e \in \Gamma_{m-1}$ abgebildet werden soll) heißt *Rand des Schnittelements*. Für alle $n < 2m - 1$ (und bei ungeradem m auch für $n = 2m - 1$) ist[18])

$$\psi_{n-1}(\mathfrak{Z}_m) = t'\pi_{n-1}(\Sigma^{m-1}) ;$$

insbesondere ist also $\psi_{m-1}(\mathfrak{Z}_m)$ die von $t' \in \pi_{m-1}(\Gamma_{m-1})$ erzeugte Untergruppe von $\pi_{m-1}(\Gamma_{m-1})$.

Vermöge dieser Beziehung erlaubt die Konstruktion eines Schnittelements in einigen Fällen die Bestimmung von $\psi_{n-1}(\mathfrak{Z}_m)$ und wegen (14) auch von $\pi_n(\Gamma_m)$.

13. a) Wir untersuchen zunächst die Gruppe $\pi_3(\Gamma_2)$. Da Γ_2 zum 3-dimensionalen reellen projektiven Raum homöomorph ist, muß $\pi_3(\Gamma_2)$ (nach [1], Satz IV) eine unendliche zyklische Gruppe sein; genauer: In der Zerlegung $\mathfrak{Z}_2$ gilt nach (14):

$$\pi_3(S^2)/P_2\,\pi_3(\Gamma_2) \approx \psi_2(\mathfrak{Z}_2) \subset \pi_2(\Gamma_1) = 0 ,$$

weil Γ_1 dem Kreis S^1 homöomorph ist, also

$$\pi_3(S^2) = P_2\,\pi_3(\Gamma_2) \approx \pi_3(\Gamma_2)/\varphi_3(\mathfrak{Z}_2) = \pi_3(\Gamma_2) ,$$

17) [6], Satz 9 (Nr. 8).
18) [6], Satz 12 (Nr. 10).
19) [6], Satz 19 (Nr. 14).

denn nach (14), III ist $\varphi_3(\mathfrak{Z}_2)$ einer Faktorgruppe von $\pi_3(\Gamma_1) = 0$ isomorph. Wir finden also

$$\pi_3(\Gamma_2) \approx \pi_3(S^2)\,, \tag{15}$$

und dieser Isomorphismus wird durch die Projektion P_2 von Γ_2 auf S^2 vermittelt. Die Elemente von $\pi_3(S^2)$ lassen sich aber durch die Hopf'sche Invariante charakterisieren [9]).

Jedes Element $f \in \pi_3(\Gamma_2)$ kann also durch eine ganze Zahl $\gamma(f)$ charakterisiert werden, nämlich durch die Hopf'sche Invariante von $P_2 f \in \pi_3(S^2)$.

b) Γ_3 ist dem topologischen Produkt $S^3 \times \Gamma_2$ homöomorph, und zwar gibt es eine solche topologische Abbildung Φ von Γ_3 auf $S^3 \times \Gamma_2$, daß dabei jede Restklasse von Γ_3 nach Γ_2 genau auf eine der Mengen $(u) \times \Gamma_2$ $(u \in S^3)$ abgebildet wird. Diese Abbildung

$$\Phi(a) = (u, v) \qquad a \in \Gamma_3,\ u \in S^3,\ v \in \Gamma_2 \tag{16}$$

können wir geben durch

$$u = P_3 a$$
$$v = P_3' a\,,$$

wo P_3' folgendermaßen erklärt ist:

Wir bilden aus den Elementen der ersten Zeile der Matrix $a = (a_{ik}) \in \Gamma_3$ die Vektoren $\mathfrak{v}_k(a)$ $(k = 1, 2, 3)$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{v}_1 &= (-a_{12}\,, & a_{11}\,, && -a_{14}\,, && a_{13}) \\
\mathfrak{v}_2 &= (-a_{13}\,, & a_{14}\,, && a_{11}\,, && -a_{12}) \\
\mathfrak{v}_3 &= (-a_{14}\,, & -a_{13}\,, && a_{12}\,, && a_{11})\ .
\end{aligned}$$

Wir können sie auffassen als paarweise orthogonale Tangentialvektoren der Sphäre S^3, die im Punkt $P_3 a \in S^3$ angreifen (also ein stetiges tangentiales 3-Feld [20]) auf S^3 bilden). $\mathfrak{a}_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ seien die Zeilenvektoren der Matrix $a = (a_{ik})$; $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4$ können ebenso wie $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3$ als paarweise orthogonale Tangentialvektoren der S^3 im Punkte $P_3 a$ der S^3 aufgefaßt werden.

Wir betrachten nun die skalaren Produkte

$$v_{ik}(a) = \mathfrak{a}_{i+1} \cdot \mathfrak{v}_k(a) \qquad i = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, 3$$

(d. h. die Komponenten von $\mathfrak{a}_{i+1}$ bezüglich des durch die $\mathfrak{v}_k(a)$ gebildeten cartesischen Koordinatensystems) als Elemente einer orthogonalen Matrix

$$v(a) = (v_{ik}(a)) \in \Gamma_2$$

und setzen

$$P_3' a = v(a)\ ;$$

[20]) [7], S. 27 und S. 45.

das ist eine stetige Abbildung von Γ_3 auf Γ_2, bei welcher jede Restklasse von Γ_3 nach Γ_2, d. h. jede Teilmenge aller der Matrizen a, die im ersten Zeilenvektor $\mathfrak{a}_1$ übereinstimmen, topologisch auf Γ_2 abgebildet wird.

c) Die Homotopiegruppen von Γ_3 zerfallen also wie die von $S^3 \times \Gamma_2$ in direkte Summen[21])

$$\pi_n(\Gamma_3) \approx \pi_n(S^3) + \pi_n(\Gamma_2) ,$$

und dieser Isomorphismus kann durch die topologische Abbildung Φ vermittelt werden: für $f \in \pi_n(\Gamma_3)$ ist

$$\Phi f = (P_3 f, P_3' f)$$

wo $P_3 f \in \pi_n(S^3)$ und $P_3' f \in \pi_n(\Gamma_2)$.

Insbesondere ist $\pi_3(\Gamma_3)$ ein 2-*gliedriger Modul*, den wir folgendermaßen beschreiben können: jedes Element $f \in \pi_3(\Gamma_3)$ ist charakterisiert durch 2 ganze Zahlen c und γ, nämlich

$$c = \text{Grad von } P_3 f \in \pi_3(S^3) \quad ,$$
$$\gamma = \text{Invariante von } P_3' f \in \pi_3(\Gamma_2) \qquad \text{(vgl. 11a).}$$

Bezeichnen wir das zu c und γ gehörige Element $f \in \pi_3(\Gamma_3)$ mit $f_{c,\gamma}$, so ist

$$f_{c,\gamma} + f_{c',\gamma'} = f_{c+c',\, \gamma+\gamma'} \quad ,$$

also

$$f_{c,\gamma} = c \cdot f_{1,0} + \gamma f_{0,1} \, .$$

Durch die bisherigen Ausführungen haben wir Satz VII, 4) bewiesen und präzisiert.

14. *Untersuchung einer speziellen Abbildung.*

a) Wir bestimmen die Invarianten c und γ folgender Abbildung s der Sphäre Σ^3 in Γ_3: die Punkte $x \in \Sigma^3$ seien durch 4 reelle Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 mit $\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 1$ gegeben; $a = (a_{ik})$ sei ein Punkt von Γ_3; durch

$$a_{ik}(x) = \delta_{ik} - 2x_i x_k \qquad i = 1, 2, 3 \qquad k = 1, 2, 3, 4 \tag{17}$$

ist eine Matrix

$$a = s(x) \in \Gamma_3$$

21) [6], Satz G (Nr. 9).

bestimmt (die vierte Zeile einer orthogonalen Matrix mit der Determinante $+1$ ist durch die 3 ersten festgelegt). Man verifiziert, daß

$$\sum_{k=1}^{4} a_{ik}(x) \cdot a_{jk}(x) = \delta_{ij} - 4x_i x_j + 4x_i\, x_j \sum_{k=1}^{4} x_k^2 = \delta_{ij}$$

ist. Bedeutet $x_0 \in \Sigma^3$ den Punkt $(0, 0, 0, 1)$, so ist

$$s(x_0) = e\,.$$

b) Die Abbildung $P_3 s$ der Sphäre Σ^3 auf S^3 ist gegeben durch

$$a_{1k}(x) = \delta_{1k} - 2x_1 x_k \qquad k = 1, 2, 3, 4\ ;$$

diese Abbildung hat bekanntlich[22]) den Grad 2.

Die zu s gehörige Zahl γ ist nach Nr. 11 definiert als die Hopf'sche Invariante von $P_2 P_3' s \in \pi_3(S^2)$. Es genügt also, von der Matrix

$$v(s(x)) \in \Gamma_2$$

(vgl. Nr. 11b) die erste Zeile

$$v_{1k}(s(x)) \qquad k = 1, 2, 3$$

zu berechnen; sie gibt uns die Abbildung $P_2 P_3' s$ von Σ^3 auf S^2.

c) Nach 11b) ist

$$v_{1k}(s(x)) = \mathfrak{a}_2(x) \cdot \mathfrak{v}_k(s(x)) \qquad k = 1, 2, 3\,;$$

dabei bedeutet $\mathfrak{a}_2(x)$ den zweiten Zeilenvektor der Matrix $s(x)$:

$$\mathfrak{a}_2(x) = (-2x_2 x_1\ ,\ 1 - 2x_2^2\ ,\ -2x_2 x_3\ ,\ -2x_2 x_4)\ ;$$

$\mathfrak{v}_k(s(x))$ sind die Vektoren

$$\begin{aligned}
\mathfrak{v}_1(s(x)) &= (2x_1 x_2\ ,\ 1 - 2x_1^2\ ,\ 2x_1 x_4\ ,\ -2x_1 x_3)\\
\mathfrak{v}_2(s(x)) &= (2x_1 x_3\ ,\ -2x_1 x_4\ ,\ 1 - 2x_1^2\ ,\ 2x_1 x_2)\\
\mathfrak{v}_3(s(x)) &= (2x_1 x_4\ ,\ 2x_1 x_3\ ,\ -2x_1 x_2\ ,\ 1 - 2x_1^2)\ .
\end{aligned}$$

---

22) Identifiziert man Σ^3 mit S^3, so ist $s(x)$ derjenige Punkt von Σ^3, der aus dem Punkt $(1, 0, 0, 0)$ durch Spiegelung an der zum Durchmesser von x orthogonalen Diametralebene hervorgeht; vgl. [5], S. 434—435.

Also wird

$$v_{11}(s(x)) = -4x_1^2\, x_2^2 + (1-2x_1^2)\,(1-2x_2^2) - 4x_1\, x_2\, x_3\, x_4 + 4x_1\, x_2\, x_3\, x_4$$
$$v_{12}(s(x)) = -4x_1^2\, x_2\, x_3 - 2(1-2x_2^2)\, x_1\, x_4 - 2(1-2x_1^2)\, x_2\, x_3 - 4x_1\, x_2^2\, x_4$$
$$v_{13}(s(x)) = -4x_1^2\, x_2\, x_4 + 2(1-2x_2^2)\, x_1\, x_3 + 4x_1\, x_2^2\, x_3 - 2(1-2x_1^2)\, x_2\, x_4\,,$$

also, wenn wir statt $v_{1k}(s(x)) = u_k(x)$ schreiben

$$u_1(x) = 1 - 2(x_1^2 + x_2^2)$$
$$u_2(x) = -2(x_1x_4 + x_2x_3)$$
$$u_3(x) = 2(x_1x_3 - x_2x_4)\,.$$

Faßt man die Koordinaten von $x \in \Sigma^3$ durch

$$w_1 = x_1 - ix_2$$
$$w_2 = -x_4 + ix_3$$

zu komplexen Zahlen zusammen, so kann man also die Abbildung $P_2P_3's$ von Σ^3 auf die Sphäre S^2 (deren Punkte u durch die reellen Koordinaten u_1, u_2, u_3, gegeben sind) in der Form

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 - 2\bar{w}_1\, w_1 \\ u_2 + iu_3 &= 2\bar{w}_1\, w_2 \end{aligned} \tag{18}$$

darstellen. Das ist aber nichts anderes als die von Hopf[23]) angegebene „Faserabbildung" p von Σ^3 auf S^2 (projiziert man nämlich S^2 stereographisch auf die Ebene der komplexen Zahlen $u_2 + iu_3$, so wird bei der Abbildung (18) dem Punkt $x \in \Sigma^3$ mit den (komplexen) Koordinaten w_1, w_2 der Punkt $w_2 : w_1$ dieser Zahlenebene zugeordnet); *für diese Abbildung hat aber die Hopf'sche Invariante den Wert* 1 (bei geeigneter Orientierung von Σ^3).

Für die Abbildungsklasse von s gilt also (vgl. 11c): $s = f_{2,1} \in \pi_3(\Gamma_3)$.

15. a) Wir konstruieren nun ein *Schnittelement* t (s. Nr. 10d) der Zerlegung $\mathfrak{Z}_4$ von Γ_4 in Restklassen nach der Untergruppe Γ_3. Die Vollkugel V^4 ersetzen wir dabei durch die Halbsphäre H^4, die im R^5 mit den Koordinaten $x_1, \ldots, x_5$ durch

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 1 \qquad x_1 \geqslant 0$$

gegeben sei; die Randsphäre Σ^3 ist also durch $x_1 = 0$ bestimmt.

[23]) [4], S. 654.

t sei die folgende Abbildung von H^4 in Γ_4:

$$t(x) = (a_{ik}(x)) \in \Gamma_4 ,$$

wobei

$$a_{ik}(x) = \delta_{ik} - 2x_i\, x_k \ , \qquad \begin{aligned} i &= 1, 2, 3, 4 \\ k &= 1, 2, 3, 4, 5 \ , \end{aligned}$$

und die fünfte Zeile durch die 4 ersten bestimmt ist. Dann ist $P_4 t$ gegeben durch

$$a_{1k}(x) = \delta_{1k} - 2x_1\, x_k \ , \qquad k = 1, 2, 3, 4, 5 \ ;$$

das ist eine topologische Abbildung[22]) der offenen Halbsphäre $x_1 > 0$ auf $S^4 - u_0$ (u_0 ist der Punkt (1, 0, 0, 0, 0) der Sphäre S^4), während die Randsphäre $\Sigma^3 (x_1 = 0)$ durch t in die Untergruppe Γ_3 von Γ_4 abgebildet wird: t ist also ein Schnittelement von Γ_4. Der Rand dieses Schnittelements, d. h. die Abbildung t' von Σ^3 in Γ_3 hat die Form

$$a_{ik}(x) = \delta_{ik} - 2x_i\, x_k \qquad \begin{aligned} i &= 2, 3, 4 \\ k &= 2, 3, 4, 5 \end{aligned}$$

d. h. t' ist genau die in Nr. 12 untersuchte Abbildung s von Σ^3 in Γ_3. Da die Abbildungsklasse des Randes eines Schnittelementes t durch die Zerlegung eindeutig bestimmt ist[24]), gilt also:

Für den Rand eines Schnittelementes t der Zerlegung $\mathfrak{Z}_4$ gilt

$$t' = f_{2,1} \in \pi_3(\Gamma_3) \ . \tag{19}$$

b) Die Gruppe $\psi_3(\mathfrak{Z}_4)$ ist nach Nr. 10d) die von $f_{2,1} \in \pi_3(\Gamma_3)$ erzeugte Untergruppe von $\pi_3(\Gamma_3)$, also zyklisch von unendlicher Ordnung

$$\psi_3(\mathfrak{Z}_4) = (f_{2,1}) \approx \mathfrak{G} \ .$$

Aus den Formeln (14) folgt ferner:

$$P_4\, \pi_3(\Gamma_3) = 0 \ ,$$

da es sich nach (14), I um eine Untergruppe von $\pi_3(S^4) = 0$ handelt; nach (14), II und III ist also

$$\pi_3(\Gamma_4) = \varphi_3(\mathfrak{Z}_4) \approx \pi_3(\Gamma_3)/\psi_3(\mathfrak{Z}_4) \ .$$

Die Faktorgruppe von $\pi_3(\Gamma_3)$ nach $\psi_3(\mathfrak{Z}_4) = (f_{2,1})$ ist aber zyklisch von unendlicher Ordnung; das sieht man, wenn man als Basis des zwei-

[24]) [6], Nr. 10b.

gliedrigen Moduls $\pi_3(\Gamma_3)$ statt $f_{1,0}$ und $f_{0,1}$ die Elemente $f_{1,0}$ und $f_{2,1}$ wählt (der Übergang wird durch die unimodulare Matrix $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ vermittelt). Also:

$$\pi_3(\Gamma_4) \approx \mathfrak{G} \,. \tag{20}$$

Wegen $\pi_n(\Gamma_m) \approx \pi_n(\Gamma_{n+1})$ für alle $m \geqslant n+1$ (vgl. 10c) ist damit Satz VII, 1) bewiesen.

c) Nach Nr. 10d) gilt für die Untergruppe $\psi_4(\mathfrak{Z}_4)$ von $\pi_4(\Gamma_3)$

$$\psi_4(\mathfrak{Z}_4) = f_{2,1}\pi_4(\Sigma^3)\,, \qquad f_{2,1} \in \pi_3(\Gamma_3)\,;$$

da $\pi_4(\Sigma^3) \approx \mathfrak{G}_2$ nur 2 Elemente besitzt, kann $\psi_4(\mathfrak{Z}_4)$ also höchstens 2 Elemente haben. Wir behaupten:

$$\psi_4(\mathfrak{Z}_4) \approx \mathfrak{G}_2 \,. \tag{21}$$

Beweis: $h \in \pi_4(\Sigma^3)$ sei die (einzige) Klasse wesentlicher Abbildungen von S^4 auf Σ^3. Dann ist

$$f_{2,1}\, h = (f_{2,0} + f_{0,1})h \;,$$

also nach Satz IV

$$f_{2,1}\, h = f_{2,0}h + f_{0,1}\, h.$$

Nach Satz V ist

$$P_3\, f_{2,0}\, h = T_2\, h = 2h = 0 \;;$$

wegen

$$P_3'\, f_{2,0}\, h = 0$$

ist also

$$f_{2,0}\, h = 0$$

und

$$f_{2,1}\, h = f_{0,1}\, h \,.$$

Ferner ist

$$P_2\, P_3'\, f_{0,1} = p \in \pi_3(S^2)$$

die Hopf'sche Faserabbildung (bzw. ihre Klasse) von Σ^3 auf S^2 (vgl. Nr. 12c), also

$$P_2\, P_3'\, f_{0,1}\, h = ph \in \pi_4(S^2)$$

die Abbildung, die man erhält, wenn man die Sphäre S^4 wesentlich auf Σ^3 und dann Σ^3 vermöge der Faserabbildung p auf S^2 abbildet; diese Abbildung ist wesentlich; denn wenn F irgendeine wesentliche Abbildung auf Σ^3 ist, so ist pF immer wesentlich[25]). Also ist

$$ph \neq 0$$

[25]) s. [1], S. 118, oder [6], Satz C (Nr. 4).

und infolgedessen auch $f_{0,1}h = f_{2,1}h \neq 0$; $\psi_4(\mathfrak{Z}_4)$ enthält also 2 Elemente, q. e. d.

d) Nach (14), I ist

$$\pi_4(S^4)/P_4\pi_4(\Gamma_4) \approx \psi_3(\mathfrak{Z}_4) \approx \mathfrak{G} \quad ;$$

das ist nur möglich, wenn

$$P_4\pi_4(\Gamma_4) = 0$$

ist. Somit ist

$$\pi_4(\Gamma_4) = \varphi_4(\mathfrak{Z}_4) \approx \pi_4(\Gamma_3)/\psi_4(\mathfrak{Z}_4) \,.$$

Nach 11c) ist aber

$$\pi_4(\Gamma_3) \approx \pi_4(S^3) + \pi_4(\Gamma_2) \approx \pi_4(S^3) + \pi_4(S^3) \approx \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_2 \,,$$

weil Γ_2 zum reellen projektiven Raum von 3 Dimensionen homöomorph ist und dessen Homotopiegruppen (außer der ersten) mit denen von S^3 übereinstimmen[26]). Wir erhalten also

$$\pi_4(\Gamma_4) \approx \mathfrak{G}_2 \,. \tag{22}$$

(Die Aussagen von Satz VII, 5) sind damit bewiesen.)

c) Wir können nun Satz VII, 2) beweisen. Nach (14), I ist nämlich

$$P_5\, \pi_4(\Gamma_5) = 0 \quad ,$$

also

$$\pi_4(\Gamma_5) = \varphi_4(\mathfrak{Z}_5) \approx \pi_4(\Gamma_4)/\psi_4(\mathfrak{Z}_5) \,.$$

$\psi_4(\mathfrak{Z}_5)$ kann also höchstens 2 Elemente enthalten; ich habe aber an anderer Stelle[27]) bewiesen, daß

$$\psi_4(\mathfrak{Z}_5) \neq 0$$

ist (das ist äquivalent damit, daß die Sphäre S^5 nicht parallelisierbar ist); es muß also

$$\psi_4(\mathfrak{Z}_5) \approx \mathfrak{G}_2 \tag{23}$$

sein, und für $\pi_4(\Gamma_5)$ folgt

$$\pi_4(\Gamma_5) = 0 \,, \tag{24}$$

also

$$\pi_4(\Gamma_m) = 0 \qquad \text{für alle } m \geqslant 5 \,.$$

16. *Die fünfte Homotopiegruppe der Γ_m*. Wir beweisen in dieser Nummer Satz VII, 3) und 6).

a) Daß $\pi_5(\Gamma_2) = 0$ ist, folgt aus

$$\pi_5(\Gamma_2) \approx \pi_5(S^3)$$

---

26) [1], Satz IV. 27) [6], Satz 27 (Korollar).

und dem Satze von Pontrjagin[28]), daß jede Abbildung von S^5 in S^3 unwesentlich ist, ebenso

$$\pi_5(\Gamma_3) \approx \pi_5(S^3) + \pi_5(\Gamma_2) = 0 \,.$$

b) Nach (14), I und (21) ist

$$\pi_5(S^4)/P_4\pi_5(\Gamma_4) \approx \psi_4(\mathfrak{Z}_4) \approx \mathfrak{G}_2 \,;$$

wegen $\pi_5(S^4) \approx \mathfrak{G}_2$ ist also

$$P_4\pi_5(\Gamma_4) = 0 \,,$$

also

$$\pi_5(\Gamma_4) = \varphi_5(\mathfrak{Z}_4) \,;$$

aber $\varphi_5(\mathfrak{Z}_4)$ ist einer Faktorgruppe von $\pi_5(\Gamma_3) = 0$ isomorph, also

$$\pi_5(\Gamma_4) = 0 \,. \tag{25}$$

c) Nach (14), I und (23) ist

$$\pi_5(S^5)/P_5\,\pi_5(\Gamma_5) \approx \psi_4(\mathfrak{Z}_5) \approx \mathfrak{G}_2 \,,$$

also

$$P_5\pi_5(\Gamma_5) = 2\pi_5(S^5) \,.$$

Anderseits ist aber

$$P_5\pi_5(\Gamma_5) \approx \pi_5(\Gamma_5)/\varphi_5(\mathfrak{Z}_5) \,,$$

wobei

$$\varphi_5(\mathfrak{Z}_5) \approx \pi_5(\Gamma_4)/\psi_5(\mathfrak{Z}_5) = 0$$

ist, also

$$P_5\pi_5(\Gamma_5) \approx \pi_5(\Gamma_5) \,.$$

$$\pi_5(\Gamma_5) \approx 2\pi_5(S^5) \approx \mathfrak{G} \,, \tag{26}$$

und dieser Isomorphismus wird durch die Projektion P_5 vermittelt. *Jedes Element $f \in \pi_5(\Gamma_5)$ ist also durch eine gerade Zahl charakterisiert, nämlich durch den Grad von $P_5 f \in \pi_5(S^5)$.*

d) Ganz ähnlich wie in Nr. 13a) konstruieren wir ein *Schnittelement* der Zerlegung $\mathfrak{Z}_6$ von Γ_6 in Restklassen nach der Untergruppe Γ_5 durch die Abbildung

$$t(x) = (a_{ik}(x)) \in \Gamma_6 \,,$$
$$a_{ik}(x) = \delta_{ik} - 2x_i x_k \,, \quad i = 1, \ldots, 6 \quad k = 1, \ldots, 7$$

(letzte Zeile $i = 7$ durch die übrigen bestimmt) der Halbsphäre H^6 :

$$\sum_{i=1}^{7} x_i^2 = 1 \quad , \quad x_1 \geqslant 0$$

[28]) Comptes Rendues de l'Acad. des Sc. de l'URSS., 1938, XIX, 5.

in die Gruppe Γ_6. Der Rand t' dieses Schnittelements ist gegeben durch die Abbildung von $\Sigma^5(x_1 = 0)$ in Γ_5:

$$a_{ik}(x) = \delta_{ik} - 2x_i x_k \,, \qquad \begin{array}{l} i = 2, \ldots, 6 \\ k = 2, \ldots, 7 \end{array}$$

und die Abbildung $P_5 t'$ von Σ^5 auf S^5

$$a_{2k}(x) = \delta_{2k} - 2x_2 x_k \,, \qquad k = 2, \ldots, 7$$

hat den Grad 2; folglich ist $t' \in \pi_5(\Gamma_5)$ nach (26) *ein erzeugendes Element von* $\pi_5(\Gamma_5)$. Anderseits ist $\psi_5(\Gamma_6)$ die von t' erzeugte Untergruppe von $\pi_5(\Gamma_5)$, also

$$\psi_5(\mathfrak{Z}_6) = \pi_5(\Gamma_5) \,, \tag{27}$$

und aus den Formeln (14) folgt:

$$P_6\, \pi_5(\Gamma_6) = 0 \,,$$
$$\pi_5(\Gamma_6) = \varphi_5(\mathfrak{Z}_6) \approx \pi_5(\Gamma_5)/\psi_5(\mathfrak{Z}_6) \,,$$

also

$$\pi_5(\Gamma_6) = 0 \,. \tag{28}$$

Damit ist Satz VII in allen Teilen bewiesen.

LITERATUR:

[1] *W. Hurewicz*, Beiträge zur Topologie der Deformationen I, Proc. Akad. Amsterdam 38 (1935), 112—119.

[2] *H. Freudenthal*, Über die Klassen der Sphärenabbildungen, Comp. math. V, 299—314.

[3] *H. Hopf*, Über die Topologie der Gruppenmannigfaltigkeiten und ihrer Verallgemeinerungen, Annals of Math. 42 (1941).

[4] *H. Hopf*, Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension, Fund. math. XXV (1935), 427—440.

[5] *H. Hopf*, Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, Math. Ann. 104 (1931), 637—714.

[6] *B. Eckmann*, Zur Homotopietheorie gefaserter Räume, Commentarii mathematici helvetici 14 (1942).

[7] *E. Stiefel*, Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Comm. math. helv. 8 (1935), 3 — 51.

(Eingegangen den 17. Juni 1941.)