Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 14 (1941-1942)

Artikel: Le type d'une surface et sa courbure totale.
Autor: Blanc, Ch.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14305

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Le type d'une surface et sa courbure totale

Par Ch. Blanc, Lausanne, et F. Fiala, Genève

L'un de nous a démontré[1]) pour les réseaux Riemanniens un critère de type parabolique reposant sur la notion de courbure totale. On peut étendre ce critère aux surfaces en suivant en somme pas à pas la démonstration donnée dans le cas discontinu; les seules difficultés qui s'introduisent alors sont résolues grâce à la notion de vrai cercle, cas particulier des vraies parallèles, définies et étudiées dans un récent travail[2]).

Ce critère se rattache à certains théorèmes connus sur le type des surfaces de Riemann; en particulier il doit être rapproché du théorème d'Ahlfors sur les surfaces de Riemann n'ayant que des singularités algébriques[3]). Signalons aussi que notre critère met le problème du type en relation avec celui des inégalités isopérimétriques, constatation déjà faite par Ahlfors dans son travail sur les surfaces de recouvrement[4]).

Enfin ce théorème doit être rattaché aux critères qui reposent sur le degré de ramification d'une surface de Riemann; le degré de ramification est à remplacer ici par la notion de courbure totale.

1. Nous appelons *plan de Riemann* (voir F. p. 303) un plan aux coordonnées rectangulaires x, y, dans lequel la métrique est définie au moyen d'une forme quadratique définie positive

$$ds^2 = E(x, y)dx^2 + 2F(x, y)dxdy + G(x, y)dy^2$$

remplissant les conditions suivantes:

a) $E(x, y)$, $F(x, y)$, $G(x, y)$ sont des fonctions analytiques réelles de x et de y,

b) la longueur de toute ligne divergente, c'est-à-dire extérieure, à partir d'un certain moment, à tout domaine borné, est infinie.

On sait comment l'on calcule les quantités qui ne dépendent que de l'élément d'arc, la courbure totale en particulier.

Le théorème que nous nous proposons de démontrer est le suivant:

Théorème. — Si l'intégrale de la courbure totale d'un plan de Riemann est bornée inférieurement, ce plan est de type parabolique.

---

[1]) *Ch. Blanc:* Les réseaux Riemanniens. Comm. Math. Helv. 13 (1940), p. 54—67.

[2]) *F. Fiala:* Le problème des isopérimètres sur les surfaces ouvertes à courbure positive. Comm. Math. Helv. 13 (1941), p. 293—346, cité F. dans le texte.

[3]) *L. Ahlfors:* Zur Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche. Comm. Math. Helv. 3 (1931), p. 173—177.

[4]) *L. Ahlfors:* Zur Theorie der Überlagerungsflächen. Acta Math. 65 (1935), p. 157—194.

Ce théorème s'applique naturellement en particulier aux surfaces analytiques de l'espace ordinaire, homéomorphes au plan euclidien et satisfaisant à la condition b).

2. Soit un point fixe O du plan de Riemann. Nous appelons *vrai cercle* de centre O et de rayon r, le lieu des points situés à une distance r du point O — la distance entre deux points étant la borne inférieure de la longueur des arcs joignant ces deux points; rappelons qu'entre deux points quelconques existe au moins un arc de longueur minimum, que nous avons appelé arc minimum. On sait (F. p. 332) que les vrais cercles peuvent être considérés comme un cas particulier des vraies parallèles à une courbe analytique simplement fermée. Nous pouvons donc leur appliquer les théorèmes établis dans ce cas général:

Le vrai cercle de centre O et de rayon r se compose d'un nombre fini d'arcs analytiques appartenant au cercle géodésique (au sens de Gauss) de centre O et de rayon r. Ces arcs forment un nombre fini de courbes fermées.

Nous désignons par Γ_r le vrai cercle de centre O et de rayon r et par Σ_r le domaine situé à l'intérieur de Γ_r, c'est-à-dire l'ensemble des points dont la distance à O est $\leqq r$.

Soient $L(r)$ la longueur de Γ_r et $C(r)$ l'intégrale de la courbure totale sur Σ_r.

La fonction $L(r)$ jouit des propriétés suivantes:

a) $L(0) = 0$,

b) $\dfrac{dL(0)}{dr} = 2\pi$,

c) $L(r)$ est une fonction continue pour toute valeur de r,

d) $L(r)$ est une fonction analytique, sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de r ou pour une suite de valeurs de r tendant vers l'infini,

e) $\dfrac{dL(r)}{dr} \leqq 2\pi - C(r)$.

Les deux premières propriétés sont bien connues, les autres sont démontrées dans F. (p. 326—330).

3. Considérons maintenant un plan de Riemann pour lequel l'intégrale de la courbure totale est bornée inférieurement; c'est dire que l'intégrale de la courbure totale sur un domaine borné quelconque est plus grande qu'une constante finie C_0. On a en particulier $C(r) > C_0$ d'où l'on tire grâce à e)

$$\frac{dL(r)}{dr} < 2\pi - C_0 \,.$$

En posant $2\pi - C_0 = C$ et en intégrant entre 0 et r, ce que nous permettent les propriétés c) et d), on obtient le

Lemme 1. — Etant donné, dans un plan de Riemann dont l'intégrale de la courbure totale est bornée inférieurement, un point O, il existe une constante C telle que la longueur des vrais cercles de centre O satisfait à l'inégalité

$$L(r) < C \cdot r \,.$$

4. Une fonction analytique réelle u étant définie en tout point du plan de Riemann, nous désignons par $\nabla(u, u)$ et Δu les deux opérateurs de Beltrami[5]). On sait que si Σ est un domaine dont la frontière Γ se compose d'un nombre fini d'arcs analytiques, on a

$$\iint_{\Sigma} \nabla(u, u)\, d\omega = \int_{\Gamma} u \frac{\partial u}{\partial n}\, ds - \iint_{\Sigma} u \Delta u\, d\omega \;,$$

où la dérivée normale doit être prise vers l'extérieur de Σ.

La démonstration de notre théorème se base encore sur le

Lemme 2. — Si un plan de Riemann de type hyperbolique est représenté de manière conforme sur l'intérieur d'un cercle $|\zeta| = 1$, la fonction $u = \log|\zeta|$, harmonique dans tout le plan de Riemann, sauf au point qui correspond à $\zeta = 0$, est telle que l'intégrale

$$I = \iint_{\Sigma} \nabla(u, u)\, d\omega \;,$$

où Σ est un domaine borné quelconque extérieur à Γ_ε $(\varepsilon > 0)$, est bornée.

En effet, on augmente l'intégrale en remplaçant Σ par un domaine Σ^* contenant Σ. Soit alors Σ^* le domaine limité par Γ_ε et par la courbe γ sur laquelle $u = M = \operatorname{Max} u$ dans Σ. On a

$$\iint_{\Sigma} \nabla(u, u)\, d\omega \leqq \iint_{\Sigma^*} \nabla(u, u)\, d\omega$$
$$\leqq \int_{\gamma} u \frac{\partial u}{\partial n}\, ds + \int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial u}{\partial n}\, ds - \iint_{\Sigma^*} u\, \Delta u\, d\omega \,.$$

---

[5]) voir *Blaschke*, Differentialgeometrie I, 3e éd., Berlin 1930, p. 168—174.

La première intégrale est négative, car sur $\gamma, u < 0$ et $\dfrac{\partial u}{\partial n} > 0$; la seconde ne dépend pas de Σ: soit A sa valeur; la troisième enfin est nulle, puisque u est harmonique dans Σ^*. On a donc

$$\iint \nabla(u, u)\, d\omega < A \,,$$

ce qui démontre le lemme.

5. *Démonstration du théorème.* — Considérons l'intégrale

$$I(r) = \iint_{\Sigma_r - \Sigma_\varepsilon} \nabla(u, u)\, d\omega \,.$$

Introduisons dans le plan de Riemann le système de coordonnées formé par les lignes géodésiques issues d'un point O et arrêtées aux points extrêmes sur ces lignes et par les vrais cercles de centre O (F. p. 324 et suiv.).

Comme on a démontré que la fonction $L(r)$ est continue on peut démontrer que la fonction $F(r) = \int_{\Gamma_r} \nabla(u, u) ds$ est continue, la fonction $\nabla(u, u)$ étant aussi continue. Notre intégrale peut alors s'écrire

$$I(r) = \int_\varepsilon^r \Big(\int_{\Gamma_r} \nabla(u, u) ds\Big) dr = \int_\varepsilon^r F(r) dr \,.$$

La formule de Green appliquée au domaine compris entre Γ_ε et Γ_r nous permet d'affirmer que $\int_{\Gamma_r} \dfrac{\partial u}{\partial n} ds = 2\pi$. On en tire $\int_{\Gamma_r} \left|\dfrac{\partial u}{\partial n}\right| ds \geqq 2\pi$ et, grâce à l'inégalité de Schwarz,

$$4\pi^2 \leqq \Big(\int_{\Gamma_r} \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| ds\Big)^2 \leqq \int_{\Gamma_r} ds \cdot \int_{\Gamma_r} \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2 ds \leqq \int_{\Gamma_r} ds \cdot \int_{\Gamma_r} \nabla(u, u)\, ds = L(r) \cdot F(r) \,.$$

On peut déduire de ce qui précède et du lemme 1 que

$$F(r) > \frac{K}{r}$$

d'où l'on tire immédiatement

$$I(r) > K \log \frac{r}{\varepsilon} \,.$$

En prenant r suffisamment grand, $I(r)$ peut dépasser toute limite, ce qui montre en tenant compte du lemme 2 que le plan de Riemann considéré est bien de type parabolique. Notre théorème est démontré.

(Reçu le 23 juillet 1941.)