Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 14 (1941-1942)

Artikel: Complexes à n dimensions et intégrales abéliennes.
Autor: Blanc, Ch.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14304

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Complexes à n dimensions et intégrales abéliennes

Ch. Blanc, Lausanne

On sait que l'étude de l'équation aux différences qui donne, par passage à la limite, l'équation de Laplace, conduit à des résultats souvent très analogues aux propriétés connues des fonctions harmoniques. On a montré[1]) qu'en poursuivant l'analogie, on retrouvait pour les polyèdres illimités un *problème du type*, dont certaines solutions partielles permettent de penser qu'il ressemble beaucoup au problème classique du même nom, et on peut espérer que les recherches consacrées à l'un feront avancer la solution de l'autre.

Il est naturel de chercher ce qui se passe pour les polyèdres finis, analogues aux surfaces de Riemann algébriques. On retrouve une théorie analogue à celle des intégrales abéliennes; mais alors on peut aussi, sans compliquer notablement l'exposé, le traiter dans le cas de n dimensions; c'est ce que nous avons fait.

La dualité *champ-forme* et la dualité *intersection-intégrale* qui en résulte, sont empruntées en particulier à la thèse de M. *de Rham*[2]); certaines de nos propositions se trouvaient déjà énoncées dans une conférence que M. de Rham a présentée à l'Université de Budapest en 1940, et qui n'a pas été publiée. Il s'agit en particulier des théorèmes de décomposition du § 3, qui, sous la forme où ils sont exprimés ici, appartiennent à M. de Rham. Ils ont été énoncés déjà, d'une façon un peu moins précise, par M. *H. Whitney*[3]).

Introduction

On considérera un complexe C^n au sens de la topologie combinatoire. C^n est constitué par des éléments a^p, de dimension p ($p = 0, \ldots, n$); on supposera C^n orientable.

Tout a^p (avec $p>0$) possède une frontière, qui est un ensemble d'éléments a^{p-1}, pourvus d'une orientation; on l'écrit $f(a^p)$.

---

[1]) *Ch. Blanc:* Les réseaux Riemanniens. Comm. Math. Helv., vol. 13 (1940), p. 54—67.

[2]) *G. de Rham:* Sur l'Analysis Situs des variétés à n dimensions. J. de Math. p. et appl. 10 (1931), p. 115—200.

On pourra consulter également, du même auteur, le mémoire: Über mehrfache Integrale, Abh. aus dem Math. Sem. der Hansischen Univ. 12 (1938), p. 313—339.

[3]) *H. Whitney:* On products in a complex. Annals of Math., 39 (1938), p. 397—432 (voir en particulier le § 26, p. 430).

A C^n correspond le complexe *conjugué* $\overline{C}^n$ (ou complexe dual, ou réciproque); on notera par b^{n-p} l'élément de $\overline{C}^n$ conjugué de a^p dans C^n; les éléments conjugués de ceux de la frontière de b^{n-p} constituent la *cofrontière* de a^p : cof (a^p).

On appelle *p-champ* sur C^n un ensemble d'éléments a^p de C^n pris chacun avec un coefficient $x(a^p)$, nombre réel quelconque. Le p-champ γ^p s'écrit

$$\gamma^p = \Sigma x(a^p) a^p$$

Si $x(a^p) \equiv 0$, on écrit $\gamma^p = 0$. La frontière $f(\gamma^p)$ est donnée par

$$f(\gamma^p) = \Sigma x(a^p)\, f(a^p)$$

et la cofrontière par

$$\operatorname{cof}(\gamma^p) = \Sigma x(a^p) \quad \operatorname{cof}(a^p)$$

Si $f(\gamma^p) = 0$, γ^p est un *cycle*; on vérifie que la frontière d'un p-champ est un cycle. Si un p-champ est une frontière, il est dit *homologue à zéro:* $\gamma^p \sim 0$. La somme de deux p-champs s'obtient en additionnant leurs coefficients; le produit d'un champ par une constante s'obtient en multipliant ses coefficients par cette constante.

Deux cycles sont *homologues* si leur différence est homologue à zéro. Les k cycles $\gamma_1^p, \ldots, \gamma_k^p$ sont linéairement indépendants si l'on ne peut pas trouver k nombres x_i, non tous nuls, avec

$$\Sigma x_i \gamma_i^p \sim 0$$

Ils sont linéairement dépendants dans le cas contraire. Soit R^p le nombre maximum de cycles linéairement indépendants sur C^n. Si $\gamma_1^p, \ldots, \gamma_{R^p}^p$ sont R^p cycles linéairement indépendants, tout cycle γ^p est homologue à une combinaison linéaire de ces γ_i^p. Ces γ_i^p constituent une *base.*

On définit de la même façon les p-champs et les p-cycles sur $\overline{C}^n$. On montre que $R^p = R^{n-p}$.

Intersection. a_i^p et b_j^{n-p} étant deux éléments de C^n, resp. $\overline{C}^n$, on pose

$$I(a_i^p, b_j^{n-p}) = \delta_{ij}$$

(δ_{ij} est égal à *un* si $i = j$, il est nul dans le cas contraire).

Etant donnés les deux p-champs $\gamma_1^p = \Sigma x_1(a^p)\, a^p$ et $\gamma_2^p = \Sigma x_2(a^p) a^p$, et leurs conjugués $\overline{\gamma}_1^{n-p}$, $\overline{\gamma}_2^{n-p}$, on pose

$$\begin{aligned} I(\gamma_1^p, \overline{\gamma}_2^{n-p}) &= \Sigma x_1(a_i^p)\, x_2(a_j^p)\, I(a_i^p, b_j^{n-p}) \\ &= \Sigma x_1(a^p)\, x_2(a^p) \end{aligned}$$

Voici quelques propriétés des p-champs que nous aurons à utiliser:

I. *Deux champs* γ_1^p *et* $\bar{\gamma}_2^{n-p+1}$ *étant donnés, on a*

$$I[f(\gamma_1^p), \bar{\gamma}_2^{n-p+1}] = (-1)^p I[\gamma_1^p, f(\bar{\gamma}_2^{n-p+1})].$$

II. *Si* $\gamma_1^p \sim 0$, *alors* $I(\gamma_1^p, \bar{\gamma}_2^{n-p}) = 0$, *quel que soit le cycle* $\bar{\gamma}_2^{n-p}$.

III. *Si* $\gamma_1^p \sim \gamma_2^p$ *et si* $\bar{\gamma}_3^{n-p}$ *est un cycle*

$$I(\gamma_1^p, \bar{\gamma}_3^{n-p}) = I(\gamma_2^p, \bar{\gamma}_3^{n-p})$$

IV. *Si* $I(\gamma_1^p, \bar{\gamma}_2^{n-p}) = 0$ *quel que soit le cycle* $\bar{\gamma}_2^{n-p}$, *alors le cycle* γ_1^p *est homologue à zéro.*

V. *On peut construire sur* C^n *une base* c_i^p *et sur* $\bar{C}^n$ *une base* $\bar{d}_i^{n-p}$ *telles que*

$$I(c_i^p, \bar{d}_j^{n-p}) = \delta_{ij}.$$

Les bases considérées dans la suite seront toujours de telles bases.

§ 1. Les p-formes

On appellera *p-forme* une fonction $\omega(a^p)$ des éléments a^p de C^n.

Une p-forme peut être *intégrée*, par quoi il faut entendre qu'on en peut déduire une fonction des p-champs par la définition suivante:

Si $\gamma^p = \Sigma \alpha(a^p) a^p$, on a

$$\int_{\gamma^p} \omega(a^p) = \Sigma\, \alpha(a^p)\omega(a^p).$$

La *dérivée* d'une p-forme $\omega(a^p)$ est une $(p+1)$-forme $\omega'(a^{p+1})$ définie par

$$\omega'(a^{p+1}) = \int_{f(a^{p+1})} \omega(a^p).$$

On vérifie que la dérivée de la dérivée d'une p-forme est identiquement nulle. Si la dérivée d'une p-forme est nulle, cette p-forme est une *p-forme exacte*; si une p-forme est dérivée d'une $(p-1)$-forme, cette p-forme est *homologue à zéro.*

Formule de Stockes. Etant donné un p-champ γ^p *et une* $(p-1)$*-forme* $\omega(a^{p-1})$, *on a*

$$\int_{\gamma^p} \omega'(a^p) = \int_{f(\gamma^p)} \omega(a^{p-1}).$$

Il suffit en effet de démontrer cette relation pour un élément a^p: mais alors elle constitue précisément la définition de ω'.

On en tire la conséquence immédiate suivante:

Si $\omega(a^p)$ est exacte, et si $\gamma^p \sim 0$, alors $\int_{\gamma^p} \omega(a^p) = 0$.

Par contre, si γ^p est un cycle, soit par exemple $\gamma^p \sim \Sigma x_i c_i^p$, on a

$$\int_{\gamma^p} \omega(a^p) = \Sigma x_i \int_{c_i^p} \omega(a^p) = \Sigma\, x_i\, \sigma_i\,,$$

où les σ_i sont les *périodes* de la p-forme exacte $\omega(a^p)$.

Si $\gamma^p = \Sigma a^p$ (ensemble des éléments a^p de C^n), $f(\gamma^p) = 0$ d'où $\sum_{C^n} \omega'(a^p) = 0$.

Forme conjuguée: à toute p-forme $\omega(a^p)$ correspond une $(n-p)$-forme $\overline{\omega}(b^{n-p})$, dite *forme conjuguée,* définie sur $\overline{C}^n$ en posant

$$\overline{\omega}(b^{n-p}) = \omega(a^p)\,,$$

où a^p et b^{n-p} sont deux éléments conjugués.

La forme $\overline{\omega}(b^{n-p})$ possède à son tour une dérivée $\overline{\omega}'(b^{n-p+1})$. Si $\overline{\omega}' = 0$, $\overline{\omega}$ est exacte, et on définit ses périodes, qui sont les périodes conjuguées de ω.

Les formes et les champs correspondants. On vient de faire correspondre à toute p-forme $\omega(a^p)$ sa $(n-p)$-forme conjuguée. On va lui faire correspondre deux champs γ_ω^p et $\overline{\gamma}_\omega^{n-p}$. On pose

$$\gamma_\omega^p = \Sigma\omega(a^p)\, a^p\,, \quad \overline{\gamma}_\omega^{n-p} = \Sigma\, \overline{\omega}(b^{n-p})\, b^{n-p}\,.$$

Réciproquement, à tout p-champ γ_ω^p correspondront une p-forme $\omega(a^p)$, sa conjuguée $\overline{\omega}(b^{n-p})$ et un $(n-p)$-champ $\overline{\gamma}_\omega^{n-p}$.

Si la p-forme $\omega(a^p)$ est exacte, $\overline{\gamma}_\omega^{n-p}$ est un cycle.

On a en effet

$$\overline{\gamma}_\omega^{n-p} = \Sigma\,\overline{\omega}(b^{n-p})\, b^{n-p}\,,$$

d'où

$$f(\overline{\gamma}_\omega{}^{n-p}) = \Sigma\,\overline{\omega}(b^{n-p})\, f(b^{n-p}) = \Sigma\Big[\sum_{\mathrm{cof}\,(b^{n-p-1})} \overline{\omega}(b^{n-p})\Big]\, b^{n-p-1}$$

$$= \Sigma\Big[\sum_{f(a^{p+1})} \omega(a^p)\Big]\, b^{n-p-1} = \Sigma\,\omega'(a^{p+1})\, b^{n-p-1} = 0\,.$$

Si la p-forme $\omega(a^p)$ est homologue à zéro, $\overline{\gamma}_\omega^{n-p} \sim 0$.

En effet

$$\omega(a^p) = u'(a^p)\,,$$

alors si

$$\bar{\gamma}_u^{n-p+1} = \Sigma\, \bar{u}(b^{n-p+1})\, b^{n-p+1}$$

il vient

$$f(\bar{\gamma}_u^{n-p+1}) = \Sigma\, \bar{u}(b^{n-p+1})\, f(b^{n-p+1})$$

$$= \Sigma \Big[\sum_{\mathrm{cof}\,(b^{n-p})} \bar{u}(b^{n-p+1}) \Big]\, b^{n-p} \;;$$

le conjugué de $\sum_{\mathrm{cof}\,(b^{n-p})} \bar{u}(b^{n-p+1})$ est $u'(a^p)$, donc $f(\bar{\gamma}_u^{n-p+1}) = \bar{\gamma}_{u'}^{n-p}$, et par conséquent $\bar{\gamma}_{u'}^{n-p} \sim 0$, d'où $\bar{\gamma}_\omega^{n-p} \sim 0$.

Il existe une relation étroite entre les intégrales et les intersections:

Soit une p-forme $\omega(a^p)$ et le $(n-p)$-champ $\bar{\gamma}_\omega^{n-p}$. Quel que soit le p-champ Γ^p,

$$\int_{\Gamma^p} \omega(a^p) = \mathrm{I}(\Gamma^p, \bar{\gamma}_\omega^{n-p}) \;.$$

En effet,

$$\mathrm{I}(\Gamma^p, \bar{\gamma}_\omega^{n-p}) = \Sigma\, \bar{\omega}(b^{n-p})\, \mathrm{I}(\Gamma^p, b^{n-p}) \;,$$

et si

$$\Gamma^p = \Sigma\, \alpha(a^p)\, a^p \;,$$

$$I(\Gamma^p, \bar{\gamma}_\omega^{n-p}) = \Sigma\, \bar{\omega}(b_i^{n-p})\, \alpha(a_j^p)\, I(a_j^p, b_i^{n-p})$$

$$= \Sigma\, \omega(a^p)\, \alpha(a^p) \;.$$

Il en résulte que *si $\bar{\gamma}_\omega^{n-p}$ est un cycle, $\omega(a^p)$ est une p-forme exacte.*

En effet

$$\omega(a^p) = I(a^p, \bar{\gamma}_\omega^{n-p}) \;,$$

d'où

$$\omega'(a^{p+1}) = \sum_{f(a^{p+1})} I(a^p, \bar{\gamma}_\omega^{n-p}) = I(f(a^{p+1}), \bar{\gamma}_\omega^{n-p})$$

$$= \pm I(a^{p+1}, f(\bar{\gamma}_\omega^{n-p})) = 0 \;.$$

Une p-forme exacte dont toutes les périodes sont nulles est homologue à zéro; le $(n-p)$-champ conjugué correspondant est aussi homologue à zéro.

Soit $\omega(a^p)$ cette p-forme, et $\bar{\gamma}_\omega^{n-p}$ le $(n-p)$-champ correspondant. On a, quel que soit le cycle Γ^p

$$\int_{\Gamma^p} \omega(a^p) = 0$$

donc

$$I(\Gamma^p, \bar{\gamma}_\omega^{n-p}) = 0,$$

d'où $\bar{\gamma}_\omega^{n-p} \sim 0$. Ainsi, il existe un $(n-p+1)$-champ $\bar{\Lambda}^{n-p+1}$ dont la frontière est $\bar{\gamma}_\omega^{n-p}$. Soit $\bar{\Lambda}^{n-p+1} = \Sigma \bar{y} . b^{n-p+1}$.

On a
$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_\omega^{n-p} &= f(\bar{\Lambda}^{n-p+1}) = \Sigma \bar{y} . f(b^{n-p+1}) \\ &= \Sigma y'(a^p)\, b^{n-p}\end{aligned}$$
d'où $\omega(a^p) = y'(a^p)$ et $\omega(a^p) \sim 0$.

Il résulte de ce que nous venons de dire que *si* $\bar{\gamma}_\omega^{n-p} \sim 0$, $\omega(a^p) \sim 0$.

§ 2. Intégrale du produit de deux formes

Considérons deux p-formes $\omega_1(a^p)$ et $\omega_2(a^p)$, leurs formes conjuguées et les champs correspondants. *On a la relation*

$$\int_{C^n} \omega_1(a^p)\, \omega_2(a^p) = I(\gamma_{\omega_1}^p , \bar{\gamma}_{\omega_2}^{n-p}) \tag{2.1}$$

En effet,
$$\begin{aligned}I(\gamma_{\omega_1}^p , \bar{\gamma}_{\omega_2}^{n-p}) &= \Sigma\, \omega_1(a_i^p)\, \bar{\omega}_2(b_j^{n-p})\, I(a_i^p , b_j^{n-p}) \\ &= \Sigma\, \omega_1(a^p)\, \bar{\omega}_2(b^{n-p}) \\ &= \int_{C^n} \omega_1 \cdot \omega_2 \ .\end{aligned}$$

Par raison de symétrie, on a aussi
$$\int_{C^n} \omega_1 \cdot \omega_2 = I(\gamma_{\omega_2}^p , \bar{\gamma}_{\omega_1}^{n-p})$$
d'où
$$I(\gamma_{\omega_1}^p , \bar{\gamma}_{\omega_2}^{n-p}) = I(\gamma_{\omega_2}^p , \bar{\gamma}_{\omega_1}^{n-p}) \ . \tag{2.2}$$
Si, en particulier,
$$\omega_1 = \omega_2 = \omega(a^p)$$
$$\int_{C^n} \omega^2(a^p) = I(\gamma_\omega^p , \bar{\gamma}_\omega^{n-p}) > 0 \ . \tag{2.3}$$

Si ω_1 et $\bar{\omega}_2$ sont des formes exactes, on a $\bar{\gamma}_{\omega_1}^{n-p} \sim \Sigma\, \sigma_{1,i}\, \bar{d}_i^{n-p}$ et $\gamma_{\omega_2}^p \sim \Sigma\, \bar{\sigma}_{2,j}\, c_j^p$, d'où
$$\int_{C^n} \omega_1(a^p)\, \omega_2(a^p) = \Sigma\, \sigma_{1,i}\, \bar{\sigma}_{2,i} \ .$$

Si, en particulier, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, et si ω et $\bar{\omega}$ sont exactes

$$\int_{C^n} \omega^2(a^p) = \Sigma\, \sigma_i\, \bar{\sigma}_i > 0 \ ;$$

donc, *si une p-forme est exacte, ainsi que sa conjuguée, ses périodes ne peuvent être toutes nulles, sans que la p-forme soit identiquement nulle.*

Supposons maintenant que la p-forme $\omega_1(a^p)$ est homologue à zéro:

$$\omega_1(a^p) = x_1'(a^p) \ ,$$

et soit un p-champ $D = \Sigma\, \alpha(a^p) a^p$. On a

$$\begin{aligned}\int_D \omega_1 \cdot \omega_2 &= \int_D x_1'(a^p)\, \omega_2(a^p) \\ &= \sum_{C^n} \Big[x_1(a^{p-1}) \sum_{\mathrm{cof}(a^{p-1})} \omega_2(a^p)\, \alpha(a^p)\Big] \ ,\end{aligned}$$

donc

$$\int_D \omega_1 \omega_2 = \sum_{C^n} \Big[x_1(a^{p-1}) \sum_{f(b^{n-p+1})} \bar{\omega}_2(b^{n-p})\, \bar{\alpha}(b^{n-p})\Big] \ .$$

Si en particulier le p-champ D est constitué par un ensemble d'éléments a^p pris chacun avec le coefficient *un*, et si $f(D) = \Gamma$, alors

$$\int_D \omega_1 \omega_2 = \sum_{D_0} x_1(a^{p-1})\, \bar{\omega}_2'(b^{n-p+1}) + \sum_{\Gamma} \Big[x_1(a^{p-1})\, \Sigma' \bar{\omega}_2(b^{n-p})\Big] \ ,$$

où D_0 est l'ensemble des a^{p-1} appartenant à la frontière d'éléments a^p de D, mais non à Γ; la somme Σ' doit être étendue aux éléments a^p communs à $\mathrm{cof}(a^{p-1})$ et à D.

Si, en particulier, $\omega_2 \sim 0$, soit $\omega_2 = x_2'$, on a, par symétrie

$$\sum_{D_0} (x_1 \bar{\omega}_2' - x_2 \omega_1') + \sum_{\Gamma} [x_1 \Sigma' \bar{\omega}_2' - x_2\, \Sigma' \bar{\omega}_1] = 0 \ .$$

Si, de plus, $\bar{\omega}_1$ est exacte, et si $\bar{\omega}_2' = 0$ excepté pour b_0^{n-p+1} où $\bar{\omega}_2'(b_0^{n-p+1}) = 1$,

$$x_1(a_0^{p-1}) = - \sum_{\Gamma} [x_1 \Sigma' \bar{\omega}_2 - x_2\, \Sigma' \bar{\omega}_1] \ ;$$

enfin, si $x_2 = 0$ sur Γ ,

$$x_1(a_0^{p-1}) = - \sum_{\Gamma} [x_1\, \Sigma' \bar{\omega}_2] \ .$$

Cette dernière relation résoud pour Γ un problème de Dirichlet; ω_2 joue le rôle de fonction de Green.

§ 3. Classification des p-formes

Parmi les p-formes, nous distinguerons:

1° *les p-formes de première espèce:* $\omega(a^p)$ est de première espèce si elle est exacte, ainsi que sa conjuguée;

2° *les p-formes de deuxième espèce:* $\omega(a^p)$ est de deuxième espèce si elle est homologue à zéro;

3° *les p-formes de troisième espèce:* $\omega(a^p)$ est de troisième espèce si sa conjuguée est homologue à zéro.

Nous allons voir qu'il existe effectivement des p-formes de chacune de ces trois espèces; nous verrons ensuite que toute p-forme est égale à la somme de trois p-formes, de première, deuxième et troisième espèces.

Existence des p-formes de première espèce.

Etant donnés R^p nombres, non tous nuls, $\sigma_1, \ldots, \sigma_{R^p}$, il existe une p-forme de première espèce, et une seule, ayant pour périodes ces nombres σ_i.

Considérons en effet une p-forme exacte $\zeta(a^p)$ ayant pour périodes les σ_i. Il en existe certainement une: soit le $(n-p)$-cycle $\overline{\gamma}_x^{n-p} = \sum \sigma_i \overline{d}_i^{n-p} = \sum \overline{x}(b^{n-p})\, b^{n-p}$. La p-forme $x(a^p)$ est exacte, puisque $\overline{\gamma}_x^{n-p}$ est un cycle. De plus, sa période relative à c_i^p est

$$\int_{c_i^p} x(a_p) = \mathrm{I}(c_i^p, \overline{\gamma}_x^{n-p}) = \sigma_i \ .$$

Ensuite, $\alpha(a^{p-1})$ étant une $(p-1)$-forme quelconque, $\zeta(a^p) = x(a^p) + \alpha'(a^p)$ est aussi exacte, et a également les périodes σ_i. L'intégrale $\int_{C^n} \zeta^2(a^p)$ est bornée inférieurement, puisque les σ_i ne sont pas tous nuls. Parmi toutes les formes $\zeta(a^p)$, exactes et de périodes σ_i, il en est une au moins pour laquelle le minimum de $\int \zeta^2(a^p)$ est atteint: on considère en effet une suite $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ pour laquelle $\int \zeta_k^2(a^p)$ tend vers sa borne inférieure. On peut extraire de cette suite une suite qui converge en tout a^p, et la limite constitue la p-forme cherchée: elle est exacte, ses périodes sont les σ_i. Soit $\omega(a^p)$ cette p-forme. Posons $\zeta(a^p) = \omega(a^p) + \lambda\alpha'(a^p)$ et calculons $\int \zeta^2(a^p)$. On a

$$\int \zeta^2(a^p) = \int \omega^2(a^p) + 2\lambda \int \omega . \alpha' + \lambda^2 \int \alpha'^2 \ .$$

Puisque $\int \omega^2 \leqslant \int \zeta^2$ quel que soit λ et $\alpha(a^{p-1})$,

$$\int \omega . \alpha' = 0 \ ;$$

or

$$\int \omega \cdot \alpha' = I(\gamma_\omega^p, \overline{\gamma}_{\alpha'}^{n-p}) \ ,$$

et $\overline{\gamma}_{\alpha'}^{n-p}$ est un $(n-p)$-champ ~ 0, mais à part cela, quelconque. Soit, par exemple,

$$\bar{\gamma}_{\alpha'}^{n-p} = f(b_0^{n-p+1}) \;\;;$$

alors

$$I(\gamma_\omega^p, f(b_0^{n-p+1}) = 0$$

c'est-à-dire

$$I(f(\gamma_\omega^p), b_0^{n-p+1}) = 0$$

quel que soit l'élément b_0^{n-p+1}. Donc $f(\gamma_\omega^p) = 0$, γ_ω^p est un cycle, et $\bar{\omega}$ est exacte; il existe ainsi au moins une p-forme satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Mais elle est unique: en effet, si on en avait deux, leur différence serait de première espèce, avec des périodes nulles, elle serait identiquement nulle. Le théorème est ainsi démontré.

On appellera *p-formes normales de première espèce* les p-formes de première espèce $s_i(a^p)$ de périodes $\sigma_{i,k} = \delta_{i,k}(i, k = 1, \ldots, R^p)$.

Existence des p-formes de deuxième espèce.

Il existe une p-forme de deuxième espèce, et une seule, dont la conjuguée a une dérivée égale à une dérivée donnée.

Reprenons le raisonnement que nous venons d'utiliser. Soit $\bar{y}(b^{n-p})$ la $(n - p)$-forme dont la dérivée est la dérivée donnée. Considérons les p-formes $\zeta(a^p) = y(a^p) + u(a^p)$, $\bar{u}(b^{n-p})$ étant ~ 0. On a $\bar{\zeta}'(b^{n-p+1}) = \bar{y}'(b^{n-p+1})$. On forme l'intégrale $\int \zeta^2$ qui est bornée inférieurement, si y n'est pas identiquement nulle (ce que nous supposerons). Le minimum de cette intégrale est atteint pour une p-forme $\omega(a^p)$. On démontre, comme plus haut, que $\omega'(a^{p+1}) = 0$; si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ sont les périodes de ω, la p-forme

$$t(a^p) = \omega(a^p) - \Sigma\, \varphi_i\, s_i(a^p)$$

satisfait entièrement aux conditions de l'énoncé. Elle est unique, car la différence de deux solutions du problème est de première espèce, avec des périodes nulles.

Prenons en particulier

$$\bar{y}(b^{n-p}) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad b^{n-p} = b_0^{n-p} \\ \;\;0 & \text{si} \quad b^{n-p} \neq b_0^{n-p} \end{cases} \qquad .$$

b_0^{n-p} étant un élément choisi arbitrairement. On appellera *p-forme normale de deuxième espèce* la p-forme $t(a^p, a_0^p)$ dont la conjuguée a une dérivée égale à $\bar{y}'(b^{n-p+1})$.

Le p-champ $\gamma_t^p + a_0^p$ est alors un cycle, soit

$$\gamma_t^p + a_0^p \sim \Sigma\, \bar{\tau}_i(a_0^p)\, c_i^p \;\;;$$

les $\bar{\tau}_i(a_0^p)$ sont les *périodes* de $\bar{t}(b^{n-p}, a_0^p)$. Il faut remarquer qu'il s'agit ici d'une généralisation de la notion de période, qu'on n'avait définie au § 1 que pour les formes exactes.

Existence des p-formes de troisième espèce.

La même méthode de démonstration nous conduirait au théorème:

Il existe une p-forme de troisième espèce, et une seule, dont la dérivée est égale à une dérivée donnée.

Si la dérivée donnée est celle de la p-forme

$$y(a^p) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad a^p = a_0^p \\ 0 & \text{si} \quad a^p \neq a_0^p \end{cases}$$

on a la *p-forme normale de troisième espèce* $z(a^p, a_0^p)$. Ses périodes $\zeta_i(a_0^p)$ sont définies par la relation

$$\Sigma\, \zeta_i(a_0^p)\, \bar{d}_i^{n-p} \sim \bar{\gamma}_z^{n-p} + b_0^{n-p} \; .$$

Décomposition d'une p-forme quelconque.

Toute p-forme $\omega(a^p)$ est la somme d'une p-forme de première espèce, d'une p-forme de deuxième espèce et d'une p-forme de troisième espèce.

Soit en effet $y(a^p)$ une p-forme de deuxième espèce avec $\bar{y}'(b^{n-p+1}) = \bar{\omega}'(b^{n-p+1})$; soit ensuite $z(a^p)$ une p-forme de troisième espèce, avec $z'(a^{p+1}) = \omega'(a^{p+1})$. La p-forme $x(a^p) = \omega(a^p) - y(a^p) - z(a^p)$ est exacte, ainsi que sa conjuguée; elle est par conséquent de première espèce, ce qui démontre notre affirmation.

Cette décomposition est unique : en effet, soient deux décompositions

$$x(a^p) + y(a^p) + z(a^p) = x_1(a^p) + y_1(a^p) + z_1(a^p) ;$$

$y(a^p) - y_1(a^p)$ est une p-forme de deuxième espèce, dont la conjuguée a une dérivée identiquement nulle; donc $y = y_1$. De même $z = z_1$, puis, par conséquent, $x = x_1$.

On en déduit un théorème de décomposition des champs:

Un p-champ γ^p est la somme de trois champs : une frontière, une co-frontière, et un cycle dont le conjugué est un cycle. Cette décomposition est unique.

Les p-formes de chaque espèce peuvent à leur tour se décomposer en sommes de p-formes normales.

Si $\omega(a^p)$ est une p-forme de première espèce, de périodes σ_i, on a

$$\omega(a^p) = \Sigma\ \sigma_i s_i(a^p)$$

et cette représentation est unique.

La démonstration en est immédiate.

Nous verrons plus loin la décomposition des p-formes de deuxième et de troisième espèces.

§ 4. Relations entre les périodes

En reprenant les relations (2.1) et (2.2), nous établirons une série de relations entre les périodes des p-formes ou celles de leurs conjuguées.

Soient deux p-formes normales de première espèce s_i et s_k; (2.2) donne, pour les périodes $\bar{\sigma}$ des conjuguées

$$\bar{\sigma}_{k,i} = \bar{\sigma}_{i,k} \quad ; \tag{4.1}$$

si $i = k$, il vient

$$\bar{\sigma}_{i,i} = \Sigma s_i^2(a^p) > 0 \ . \tag{4.2}$$

Si maintenant, on fait dans (2.2) $\omega_1 = s_i(a^p)$ et $\omega_2 = t(a^p, a_0^p)$, alors:

$$\bar{\gamma}_{\omega_2}^{n-p} \sim 0 \qquad\qquad \gamma_{\omega_1}^p \sim \Sigma\ \bar{\sigma}_{i,k}\ c_k^p$$

$$\gamma_{\omega_2}^p \sim \Sigma\ \bar{\tau}_j(a_0^p)\ c_j^p - a_0^p \qquad \bar{\gamma}_{\omega_1}^{n-p} \sim \bar{d}_i^{n-p}$$

d'où

$$\begin{aligned} I(\gamma_{\omega_2}^p, \bar{\gamma}_{\omega_1}^{n-p}) &= \Sigma\ \bar{\tau}_j(a_0^p)\ I(c_j^p, \bar{d}_i^{n-p}) - I(a_0^p, \bar{\gamma}_{\omega_1}^{n-p}) \\ &= \bar{\tau}_i(a_0^p) - s_i(a_0^p) \end{aligned}$$

et

$$I(\gamma_{\omega_1}^p, \bar{\gamma}_{\omega_2}^{n-p}) = 0$$

donc

$$\bar{\tau}_i(a_0^p) = s_i(a_0^p) \ . \tag{4.3}$$

Si, ensuite, $\omega_1 = t(a^p, a_0^p)$ et $\omega_2 = t(a^p, a_1^p)$, alors

$$I(\gamma_{\omega_2}^p, \bar{\gamma}_{\omega_1}^{n-p}) = -t(a_1^p, a_0^p)$$

donc

$$t(a_1^p, a_0^p) = t(a_0^p, a_1^p) \ . \tag{4.4}$$

On peut, dans une p-forme normale de deuxième espèce, permuter l'argument et le paramètre.

Si $a_0^p = a_1^p$, il vient

$$\int t^2(a^p, a_0^p) = -t(a_0^p, a_0^p) > 0$$

donc

$$t(a_0^p, a_0^p) < 0 \ . \tag{4.5}$$

Soit maintenant $\omega_1 = s_i(a^p)$ et $\omega_2 = z(a^p, a_0^p)$; alors $\gamma_{\omega_2}^p \sim 0$

$$\bar{\gamma}_{\omega_2}^{n-p} \sim \Sigma\, \zeta_k(a_0^p)\, \bar{d}_k^{n-p} - b_0^{n-p}$$

d'où

$$I(\gamma_{\omega_1}^p, \bar{\gamma}_{\omega_2}^{n-p}) = \Sigma\, \bar{\sigma}_{i,k}\, \zeta_k(a_0^p) - s_i(a_0^p)$$

$$I(\gamma_{\omega_2}^p, \bar{\gamma}_{\omega_1}^{n-p}) = 0$$

et

$$s_i(a_0^p) = \Sigma\, \bar{\sigma}_{i\,k}\, \zeta_k(a_0^p) \quad . \tag{4.6}$$

La relation (4.6) constitue un système de R^p équations entre les R^p périodes $\zeta_k(a_0^p)$. Le déterminant de ce système n'est pas nul; car s'il en était ainsi, il existerait une p-forme de première espèce, non identiquement nulle, mais dont la conjuguée aurait toutes ses périodes nulles, ce qui est impossible. En résolvant le système (4.6), on a alors une relation

$$\zeta_k(a_0^p) = \Sigma A_{k,i} s_i(a_0^p) \quad . \tag{4.7}$$

Soit enfin $\omega_1 = z(a^p, a_0^p)$ et $\omega_2 = z(a^p, a_1^p)$. Ici

$$\gamma_{\omega_1}^p \sim 0 \quad ; \quad \gamma_{\omega_2}^p \sim 0 \ ;$$

$$\bar{\gamma}_{\omega_1}^{n-p} \sim \Sigma\, \zeta_k(a_0^p)\, \bar{d}_k^{n-p} - b_0^{n-p} \quad ; \quad \bar{\gamma}_{\omega_2}^{n-p} \sim \Sigma\, \zeta_k(a_1^p)\, \bar{d}_k^{n-p} - b_1^{n-p} \ ;$$

d'où, si $a_0 \neq a_1$

$$z(a_1^p, a_0^p) = z(a_0^p, a_1^p) \tag{4.8}$$

et si $a_0 = a_1$

$$z(a_0^p, a_0^p) < 0 \quad . \tag{4.9}$$

On peut encore prendre $\omega_1 = t(a^p, a_0^p)$ et $\omega_2 = z(a^p, a_1^p)$; alors

$$I(\gamma_{\omega_2}^p, \bar{\gamma}_{\omega_1}^{n-p}) = 0$$

et

$$I(\gamma_{\omega_1}^p, \bar{\gamma}_{\omega_2}^{n-p}) = I(\gamma_{\omega_1}^p + a_0^p, \bar{\gamma}_{\omega_2}^{n-p}) - I(a_0^p, \bar{\gamma}_{\omega_2}^{n-p}) \ ;$$

or

$$I(\gamma_{\omega_1}^p + a_0^p, \bar{\gamma}_{\omega_2}^{n-p}) = I(\gamma_{\omega_1}^p + a_0^p, \Sigma\, \zeta_k(a_1^p)\, \bar{d}_k^{n-p}) - I(\gamma_{\omega_1}^p + a_0^p, b_1^{n-p})$$

$$= \Sigma\, \bar{\tau}_j(a_0^p)\, \zeta_k(a_1^p)\, I(c_j^p, \bar{d}_k^{n-p}) - I(\gamma_{\omega_1}^p, b_1^{n-p}) - I(a_0^p, b_1^{n-p})$$

$$= \Sigma\, \bar{\tau}_k(a_0^p)\, \zeta_k(a_1^p) - t(a_1^p, a_0^p) - I(a_0^p, b_1^{n-p}) \ ;$$

de plus

$$I(a_0^p, \bar{\gamma}_{\omega_2}^{n-p}) = z(a_0^p, a_1^p) \ ,$$

donc

$$\Sigma\, \bar{\tau}_k(a_0^p)\, \zeta_k(a_1^p) = z(a_0^p, a_1^p) + t(a_1^p, a_0^p) + I(a_0^p, b_1^{n-p}) \quad . \tag{4.10}$$

Retour sur les décompositions.

Calculons, $\omega(a^p)$ étant une p-forme de deuxième espèce, la somme $\Sigma\,\omega(a_i^p)\,t(a^p,a_i^p)$ étendue à tous les éléments a_i^p de C^n. D'après (4.4)

$$\begin{aligned}\Sigma\,\omega(a_i^p)t(a^p,a_i^p) &= \Sigma\,\omega(a_i^p)t(a_i^p,a^p)\\ &= I\,[\Sigma\bar{\tau}_k(a^p)\,c_k^p - a^p,\bar{\gamma}_\omega^{n-p}]\ ,\end{aligned}$$

et, puisque $\bar{\gamma}_\omega^{n-p} \sim 0$,

$$\Sigma\,\omega(a_i^p)t(a^p,a_i^p) = -\,\omega(a^p)\ ,$$

donc

$$\omega(a^p) = -\,\Sigma\,\omega(a_i^p)\,t\,(a^p,a_i^p)\ . \tag{4.11}$$

Il faut remarquer que *cette décomposition n'est pas unique.*

Si on fait, en particulier, $\omega(a^p) = t(a^p\ a_0^p)$, il vient

$$t(a^p,a_0^p) = -\,\Sigma t(a_i^p,a_0^p)\ t(a_i^p,a^p)\ ,$$

ce que l'on savait déjà.

Pour les p-formes de troisième espèce, on trouvera pareillement

$$\omega(a^p) = -\,\Sigma\,\omega(a_i^p)\,z\,(a^p,a_i^p)\ . \tag{4.12}$$

Terminons ce paragraphe par la remarque suivante: soit un ensemble Γ de R^p éléments a_i^p ; *le déterminant du système*

$$\sum_i x_i s_k(a_i^p) = 0 \qquad k = 1, \ldots, R^p$$

ne peut être identiquement nul (c'est-à-dire quel que soit le choix de Γ). En effet, s'il l'était, il existerait une relation linéaire entre les s_k, c'est-à-dire une homologie entre les cycles c_k^p, ce qui est exclu. Il en résulte que l'on peut choisir arbitrairement les valeurs d'une p-forme de première espèce pour R^p éléments, sauf peut-être dans certains cas exceptionnels.

§ 5. Les p-formes rationnelles

Appelons *p-forme rationnelle toute p-forme égale à la somme d'une p-forme de deuxième espèce et d'une p-forme de troisième espèce.*

Une p-forme rationnelle $\omega(a^p)$ est orthogonale à toute p-forme de première espèce, c'est-à-dire que

$$\int_{C^n} \omega(a^p)\,s\,(a^p) = 0 \tag{5.1}$$

quelle que soit la p-forme de première espèce $s(a^p)$.

Il suffit de le montrer pour les p-formes normales de première espèce. Mais on a

$$\omega(a^p) = t(a^p) + z(a^p)$$

$t(a^p)$ étant de deuxième espèce, $z(a^p)$ de troisième espèce. Il résulte du paragraphe précédent qu'elles sont orthogonales à toute p-forme normale de première espèce; cela démontre notre affirmation.

La réciproque est vraie: *si* $\int \omega(a^p)\, s\,(a^p) = 0$ *quelle que soit la p-forme de première espèce* $s(a^p)$, $\omega(a^p)$ *est rationnelle.*

Soit en effet $\omega(a^p) = S(a^p) + t(a^p) + z(a^p)$ la décomposition de $\omega(a^p)$ en trois p-formes, une de chaque espèce. On a vu que

$$\int s(a^p)\, t\,(a^p) = 0 \qquad \int s(a^p)\, z\,(a^p) = 0\ ,$$

donc

$$\int \omega(a^p)\, s\,(a^p) = \int s(a^p)\, S\,(a^p) = 0\ ,$$

et cette quantité ne peut être nulle pour toute p-forme de première espèce $s(a^p)$ que si $S(a^p) \equiv 0$.

L'existence de p-formes rationnelles est assurée, puisque toute combinaison linéaire de p-formes de deuxième et de troisième espèces est une p-forme rationnelle. Nous allons chercher le nombre de p-formes rationnelles, linéairement indépendantes, satisfaisant à certaines conditions qui seront précisées.

Nous démontrerons tout d'abord trois lemmes.

Lemme 1: soit un système d'équations linéaires, homogènes

$$\sum_{k=1}^{\nu} a_{i,k} x_k = 0 \qquad i = 1, \ldots, p \tag{5.2}$$

et soit r_j le rang de la matrice M_j

$$M_j = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1j} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{p1} \ldots a_{pj} \end{pmatrix}.$$

Si (5.2) *possède une solution pour laquelle x_ν est différent de zéro, alors* $r_\nu = r_{\nu-1}$.

En effet, r_ν est égal, ou bien à $r_{\nu-1}$, ou à $r_{\nu-1} + 1$. Posons

$$f_i(x) = \sum_1^{\nu-1} a_{ik} x_k$$

On a

$$f_i(x) = - a_{i\nu} x_\nu$$

et puisque $x_\nu \neq 0$, le système $f_i(u) = a_{i\nu}$ a une solution. On peut supposer que le système a été écrit de façon que, si $j > r_{\nu-1}$,

$$f_j(x) = \sum_{k=1}^{r_{\nu-1}} \gamma_{jk} f_k(x) \qquad j = r_{\nu-1} + 1 \, , \, \ldots$$

et par conséquent

$$a_{j\nu} = \sum_{1}^{r_{\nu-1}} \gamma_{jk} a_{k\nu} \, ,$$

d'où il résulte que M_ν a le même rang que $M_{\nu-1}$.

Lemme 2: si, réciproquement, $r_\nu = r_{\nu-1}$, (5.2) *a une solution où* x_ν *est différent de zéro.*

On le voit immédiatement, en écrivant le système de façon que

$$f_j(x) = \sum_{1}^{r_{\nu-1}} \gamma_{jk} f_k(x) \; . \tag{5.3}$$

Lemme 3: ordonnons les éléments de C^n*:* a_1^p , a_2^p , ... *et soit* $\Gamma_k^p = \sum_1^k a_i^p$. *Pour tous les* Γ_k^p, *excepté pour* R^p *d'entre eux, le système*

$$\sum_{1}^{k} x_j \, s_i(a_j^p) = 0 \qquad i = 1, \ldots, R^p \tag{5.4}$$

admet une solution telle que $x_k \neq 0$.

Considérons en effet la matrice

$$M_k = \begin{pmatrix} s_1(a_1^p) & \ldots & s_1(a_k^p) \\ \vdots & & \vdots \\ s_{R^p}(a_1^p) & \ldots & s_{R^p}(a_k^p) \end{pmatrix} ;$$

son rang r_k ne peut dépasser R^p, mais pour k assez grand, il est égal à R^p exactement. Il y a donc R^p valeurs de k pour lesquelles r_k est supérieur d'une unité à r_{k-1} (en posant $r_0 = 0$). Le système (5.4) a donc toujours une solution avec $x_k \neq 0$, excepté pour ces R^p valeurs *lacunaires* de k.

Il faut remarquer qu'en général ces R^p valeurs sont les R^p premiers nombres naturels.

$R^p - r_k$ est le nombre de solutions linéairement indépendantes du système (5.4): $\mu_k = R^p - r_k$ est donc le nombre de p-formes de première espèce, linéairement indépendantes et nulles sur Γ_k^p: on les appellera les *multiples* de l'ensemble Γ_k^p.

Revenons maintenant aux p-formes rationnelles $\omega(a^p)$. On a vu que l'on a, pour tout i,

$$\Sigma\omega(a^p)s_i(a^p) = 0; \tag{5.5}$$

reprenant l'ensemble Γ_k^p du lemme 3, on dira que $\omega(a^p)$ est un diviseur de Γ_k^p si elle est nulle en dehors de Γ_k^p. Nous nous proposons de déterminer le nombre de solutions de (5.5), linéairement indépendantes, et diviseurs de Γ_k^p. Cela revient à résoudre le système

$$\sum_{j=1}^{k} x_j s_i(a_j^p) = 0 \ . \qquad i = 1, \ldots, R^p \tag{5.6}$$

Disons que a_k^p est *congru* à Γ_k^p s'il n'existe aucune solution de (5.6) telle que $x_k = 0$:

L'élément a_k^p est congru à Γ_k^p pour R^p valeurs de l'indice k.

En effet, l'élément a_k^p est congru à Γ_k^p si la matrice M_k de (5.6) a un rang d'une unité supérieur au rang de M_{k-1}; le rang atteint, pour k assez grand, la valeur R^p sans la dépasser. Le théorème est ainsi démontré.

Les solutions de (5.6) dépendent linéairement de $k - r(\Gamma_k^p)$ constantes arbitraires, ou, en posant $r(\Gamma_k^p) = R^p - \mu_k$, de $k - [R^p - \mu_k]$ constantes. Par conséquent:

Entre le nombre N_k de p-formes rationnelles linéairement indépendantes diviseurs de Γ_k^p, et le nombre μ_k de p-formes de première espèce nulles sur Γ_k^p, on a la relation

$$N_k = k - (R^p - \mu_k) \tag{5.7}$$

C'est l'analogue du théorème de *Riemann-Roch.*

Considérons maintenant un ensemble Γ_k^p tel que $r(\Gamma_k^p) = R^p - 1$ et tel que l'adjonction d'un seul élément, quel qu'il soit, élève le rang d'une unité. Décomposons Γ_k^p en deux ensembles A et B, de ν_1 et ν_2 éléments, et de rangs $r(A)$ et $r(B)$. On a $N_k = k - (R^p - 1)$. Ecrivons qu'une p-forme rationnelle est diviseur de A: on peut le faire de deux façons: ou bien, directement, et la relation (5.7) nous donne le nombre N' de constantes arbitraires qui interviennent; ou bien, on écrit qu'une p-forme diviseur de Γ_k^p est nulle sur B. La première méthode nous donne

$$N' = \nu_1 - r(A) = \nu_1 - (R^p - \mu_1)$$

où μ_1 est le nombre de multiples, linéairement indépendants, de A. La seconde méthode donne

$$N' = k - (R^p - 1) - r(B)$$
$$= k - (R^p - 1) - (R^p - \mu_2)$$

d'où, en égalant,

$$\nu_1 - R^p + \mu_1 = k - 2R^p + 1 + \mu_2$$

ou

$$\mu_2 = \mu_1 - \nu_2 + R^p - 1 \;;$$

par symétrie

$$\mu_1 = \mu_2 - \nu_1 + R^p - 1 .$$

On obtient, par addition et soustraction,

$$k = 2R^p - 2$$
$$2(\mu_1 - \mu_2) = \nu_2 - \nu_1 \; . \tag{5.8}$$

Ce sont les formules de réciprocité, analogues à celles de *Brill-Noether.*

Appelons *ensemble canonique* tout ensemble tel que l'ensemble Γ_k^p qui vient d'être considéré:

Si Γ_k^p est canonique, et si $\Gamma_k^p = a_0^p + A + B$, l'élément a_0^p est congru à l'un des deux ensembles $(A + a_0^p)$ ou $(B + a_0^p)$, et à l'un seulement.

Si ν_1 et ν_2 sont les nombres d'éléments de A et B,

$$\nu_1 + \nu_2 + 1 = 2R^p - 2$$

et

$$2r(A + a_0^p) - (\nu_1 + 1) = 2r(B) - \nu_2$$
$$2r(A) - \nu_1 = 2r(B + a_0^p) - (\nu_2 + 1) ,$$

d'où en soustrayant

$$r(A + a_0^p) - r(A) + r(B + a_0^p) - r(B) = 1;$$

il en résulte que l'une des deux expressions

$$r(A + a_0^p) - r(A) , \qquad r(B + a_0^p) - r(B)$$

est égale à *un*, l'autre est nulle. D'où le théorème.

Cette propriété caractérise les ensembles canoniques parmi les ensembles de $2R^p - 2$ éléments.

Soit en effet Γ^p un ensemble de $2R^p - 2$ éléments $a_1^p, a_2^p, \ldots;$ A_1^p étant l'ensemble vide, posons

$$A_{i+1}^p = A_i^p + a_i^p \quad , \quad B_i^p = B_{i-1}^p - a_i^p \quad , \quad B_0^p = \Gamma^p \; ;$$

on a, par l'hypothèse faite,

$$r(A_{i+1}^p) - r(A_i^p) + r(B_{i-1}^p) - r(B_i^p) = 1$$

d'où, en faisant la somme de $i = 1$ à $i = 2R^p - 2$

$$r(\Gamma^p) - r(A_1^p) - r(B_{2R^p-2}^p) + r(B_0^p) = 2R^p - 2$$

donc

$$2r(\Gamma) = 2R^p - 2$$

et

$$\mu(\Gamma) = 1,$$

ce qui démontre notre affirmation.

Remarque: nous n'avons pas utilisé toutes les hypothèses de l'énoncé: il n'est pas nécessaire de supposer que la réciprocité a lieu pour toutes les décompositions de Γ^p, mais pour une suite de décompositions seulement.

(Reçu le 26 juin 1941.)