Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 14 (1941-1942)

Artikel: Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni razionali, e aventi curve-sezioni canoniche.

Autor: Fano, Gino di

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-14303

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni razionali, e aventi curve-sezioni canoniche

Di Gino Fano, Lausanne

1. Nella mia Memoria „Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche"[1]) ho dimostrato che queste varietà (M_3^{2p-2} di S_{p+1}, p essendo il genere delle curve-sezioni) per $p > 10$ sono tutte razionali, all'infuori forse della M_3^{24} di $S_{14} (p = 13)$ le cui superficie sezioni sono riferibili al sistema delle intersezioni di una forma cubica generale di S_4[2]) colle quadriche. Mostrerò ora che queste varietà, se contenenti soltanto superficie intersezioni complete con forme del loro spazio, sono pure razionali nei due casi $p = 9$ e $p = 10$. Il fatto di contenere soltanto superficie intersezioni complete implica che la superficie F^{2p-2} sezione sia di 1ª specie, a sensi del n. 6 della mia Mem. cit., e che perciò la M_3^{2p-2} contenga ∞^1 rette; mentre per $p = 9$, come vedremo, la F^{2p-2} può anche essere di 2ª specie (come nel caso $p = 13$ suindicato) e la M_3^{2p-2} in tal caso probabilmente non razionale. Le M_3^{2p-2} contenenti soltanto superficie intersezioni complete, e per conseguenza rette, sono pertanto tutte razionali per $p > 8$.

In altra mia Memoria[3]) ho dimostrato altresì che la M^{2p-2} di S_{p+1}[4]) contenente del pari soltanto superficie intersezioni complete è pure razionale nel caso $p = 7$ (mentre è tuttora dubbio, con probabilità negativa, il caso $p = 8$); e ne ho data una rappresentazione sullo spazio S_3. A questa rappresentazione sono pervenuto proiettando la M^{12} di S_8 da una sua retta r in una M^8 di S_6 contenente una rigata cubica R^3, e poi ancora questa M^8 da una generatrice di R^3 in una M^4 di S_4; il che equivale a proiettare direttamente la M^{12} dallo spazio S_3 tangente ad essa in un punto della r. Il procedimento riesce però più semplice e chiaro proiettando la M^{12} dallo spazio S_3 tangente ad essa in un punto generico.

---

[1]) Mem. R. Accad. d'Italia, Classe di scienze mat. fis. e nat., vol. VIII (1937 — XV), n° 2.

[2]) Col nome di „forme" di uno spazio S_k designo le varietà algebriche a $k - 1$ dimensioni di questo spazio (dette anche „ipersuperficie").

[3]) Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi curve-sezioni canoniche (Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari, Pavia 1936), n. 5—6.

[4]) Indicando con M, nel presente lavoro, esclusivamente varietà a tre dimensioni, sopprimerò d'ora in poi l'indice 3, mantenendo solo l'indice superiore dell'ordine. Così F^n, φ^n, ψ^n,... R^n indicheranno superficie, in particolare superficie rigate di ordine n. Il fatto che la M abbia un punto P, o una retta r, o una linea γ come multiplo di ordine k verrà indicato con $M(P^k)$, $M(r^k)$ $M(\gamma^k)$; e analogamente per le superficie.

Comincio pertanto coll'esporre quest'ultimo procedimento, insieme a due altre rappresentazioni della stessa M^{12}, non prive d'interesse (n. 2—4).

2. Ricordiamo dalla Memoria[3]) che la M^8 di S_6, proiezione della nostra M^{12} da una sua retta r, contiene tre rigate: la R^3 immagine di r; una R^{74} proiezione dell'unica rigata R^{84} contenuta in M^{12}; e una R^{51}, proiezione della superficie $F^{9.12}(r^{16})$ luogo delle coniche di M^{12} appoggiate a r [5]). Vediamo così che per ogni punto di r passano 16 coniche generalmente irriducibili contenute in M^{12}, più le altre 8, riducibili, composte di r e di una seconda retta incidente a r. *La congruenza delle coniche contenute in M^{12} è dunque di ordine* 24[6]).

Dallo spazio S_3 tangente in un suo punto generico P la M^{12} si proietta in una M^4 di S_4, contenente una superficie φ^4, proiezione (generica) della superficie di Veronese, immagine di P; e su questa 24 punti doppi, immagini delle coniche di M^{12} passanti per P. Le F^4 sezioni iperpiane di M^4 sono proiezioni delle $F^{12}(P^2)$. Per φ^4 passano ∞^6 forme cubiche, che incontrano ulteriormente M^4 secondo superficie razionali $F^8 = 3F^4 - \varphi^4$, a sezioni di genere 6, proiezioni di $F^{3.12}(P^7)$ [7]). Queste F^8 incontrano φ^4 secondo curve C_{15}^{14} (riferibili a C^7 piane generali) passanti per i 24 punti doppi di M^4, e aventi perciò 25 intersezioni variabili. Il sistema $|F^8|$ ha le curve caratteristiche di ordine 10 e genere 1, e è di grado 5; rappresenta perciò una ben nota V_3^5 di S_6, razionale, a curve-sezioni ellittiche[8]). — D'altra parte la φ^4 (la cui proiezione generale su S_3 è una superficie di Steiner) ha *un* punto triplo apparente; perciò la M^4 anzidetta, e quindi la M^{12} di S_8, risultano rappresentate sul sistema $\infty^3\,\Gamma$ delle trisecanti di M^4, che è l'intersezione generale di tre complessi lineari di S_4 [9]); cioè

---

[5]) Le tre rigate di M^8 ne costituiscono complessivamente l'intersezione completa con una forma di ordine 16, e sono perciò proiezioni di superficie di M^{12} formanti ivi insieme una $F^{16.12}(r^{16})$. La R^3 essendo immagine di r, e la R^{74} proiezione di una $R^{84} = F^{7.12}(r)$, la R^{51} sarà appunto proiezione di una $F^{9.12}(r^{16})$. Si osservi anche, per eventuali analoghi controlli in seguito, che $F^{9.12}(r^{16}) = 9\,F^{12}(r) - 7r$; e ha quindi per proiezione su M^8 una superficie $9F^8 - 7R^3$, di ordine $9.8 - 7.3 = 51$.

[6]) Ciò è confermato da particolari M^{12} di S_8, rappresentate sullo spazio S_3 da sistemi lineari semplici di superficie; p. es. dalle F^4 passanti per una curva γ_7^8 (di ordine 8, genere 7), o per una γ_3^7. Le coniche di queste due M^{12} hanno per immagini soltanto corde, e coniche 6-secanti delle due linee; e queste formano per la γ_7^8 congruenze di ordini 14 e 10, per la γ_3^7 due congruenze di ordine 12.

[7]) Le $F^{3.12}$ generiche su M^{12} sono superficie di genere 35, e il punto 7plo ne riduce appunto il genere a zero.

[8]) *Enriques*, Math. Annalen 46 (1895), p. 179; *Scorza*, Annali di Matem. (3), vol. 15 (1908), p. 217. La V_3^5 incontrata nella Memoria [3]), n. 6, è caso particolare della presente avendo (a differenza di questa) un punto doppio. E la φ^4 di M^4 è ivi spezzata in una rigata R^3 e un piano.

[9]) *Castelnuovo*, Atti R. Ist. Veneto (7), vol. 2° (1891), p. 855; in part. n. 9.

appunto la V_3^5, sezione della Grassmanniana della rette di S_4 con uno spazio S_6. Le ∞^6 forme cubiche passanti per φ^4 sono luoghi di ∞^2 rette di Γ, segate a loro volta su Γ da ulteriori complessi lineari; hanno 10 punti doppi in punti variabili di φ^4 [10]), e sono generabili proiettivamente[11]). Fra le ∞^3 rette di Γ trisecanti φ^4, ∞^1 stanno su M^4, sono proiezioni di curve C^7 di M^{12} aventi P come punto triplo, e formano una rigata R^{12}, di genere 7 [12]); ad esse corrispondono su V_3^5 i punti di una curva canonica δ_7^{12}. Entro M^4, le F^8 segano su R^{12} i gruppi canonici di 12 generatrici; il sistema $|2F^8|$ contiene parzialmente la R^{12}; e il sistema residuo $|2F^8 - R^{12}|$, composto di superficie del 4° ordine, è quello delle sezioni iperpiane F^4. A queste corrispondono su V_3^5 le superficie segate da quadriche passanti per la curva δ_7^{12}.

La rappresentazione della M^{12} di S_8 sulla V_3^5 di S_6 (le cui sezioni iperpiane indicheremo con ψ^5) ha come soli elementi fondamentali su M^{12} il punto P, e su V_3^5 la curva δ_7^{12}. A quest'ultima corrisponde su M^4 la rigata $R^{12}=2F^8-F^4$, e quindi su M^{12} una superficie $2F^{3.12}(P^7) - F^{12}(P^2) = F^{5.12}(P^{12})$. La rappresentazione è perciò data dalle equazioni [13]):

$$\begin{aligned} \psi^5 &= 3F^{12} - 7P \\ \delta &= 5F^{12} - 12P \end{aligned} \quad \text{da cui:} \quad \begin{aligned} F^{12} &= 12\psi^5 - 7\delta \\ P &= 5\psi^5 - 3\delta\,. \end{aligned}$$

D'altra parte la V_3^5 si rappresenta su S_3 mediante le superficie cubiche passanti per una quartica razionale γ; e ciò proiettandola da una sua conica c, la cui immagine è la quadrica contenente γ[14]). Perciò, indicando con π i piani di S_3:

$$\begin{aligned} \psi^5 &= 3\pi - \gamma \\ c &= 2\pi - \gamma \end{aligned} \quad \text{da cui:} \quad \begin{aligned} \pi &= \psi^5 - c \\ \gamma &= 2\psi^5 - 3c\,. \end{aligned}$$

Per rappresentare infine la corrispondenza fra M^{12} e lo spazio S_3, occorre introdurre la curva δ', anche di ordine 12, corrispondente in S_3 a δ_7^{12} (e che si appoggia a γ in 24 punti) e la curva C^{24} (P^{10}) di M^{12} (brevemente C) che corrisponde ivi alla conica c. Si ha allora:

---

[10]) Applicazione particolare di un teorema di *F. Severi*, Mem. R. Accad. di Torino (2), vol. 52 (1902), n. 3.

[11]) *C. Segre*, Mem. R. Accad. di Torino (2), vol. 39 (1888), n. 12 e seg.; *Castelnuovo*, Atti R. Ist. Veneto (6), vol. 5 (1888).

[12]) *J. A. Todd*, Some types of birational quartic primals in four dimensions, London M. S. Proceed. vol. 42 (1937), p. 316, § 7. Ivi è data pure la rappresentazione su S_3 della M^4 di S_4 qui considerata. Questa M^4 contiene 4 rigate; la R^{12} anzidetta, una R^{84} proiezione della rigata contenuta in M^{12}, e due altre, di ordini 164 e 60, le cui generatrici sono proiezioni rispett. delle cubiche passanti per P e delle quintiche con P doppio.

[13]) Nel senso di cui alla mia Nota precedente: Osservazioni sulla rappresentazione ecc., Comm. Math. Helv., vol. 14, p. 193, n. 1—2.

[14]) *Enriques*, lav. cit. in [8]), n. 13—16.

$$
\begin{aligned}
F^{12} &= 36\pi - 7\delta' - 12\gamma & \pi &= 3F^{12} - 7P - C \\
P &= 15\pi - 3\delta' - 5\gamma\,; & \delta' &= 5F^{12} - 12P \\
C &= 2\pi \qquad\quad - \gamma & \gamma &= 6F^{12} - 14P - 3C\,.
\end{aligned}
$$

Alle superficie sezioni iperpiane di M^{12} corrispondono dunque in S_3 superficie di ordine 36 aventi le curve δ' e γ come multiple di ordini risp. 7 e 12. La loro aggiunta (unica) è composta della superficie di ordine 15 corrispondente al punto P, contata due volte, e della quadrica passante per γ[15]). Alle sezioni iperpiane di $M^4 (F^4 = F^{12}(P^2) = F^{12} - 2P)$ corrispondono in S_3 superficie di 6° ordine, passanti doppiamente per γ e semplicemente per δ' [16]).

3. La stessa M^{12} di S_3 si può rappresentare più semplicemente sullo spazio S_3 proiettandola, anche in una M^4 di S_4, dallo spazio S_3 di una sua cubica sghemba γ.

Questa M^4 contiene una rigata razionale R^5, immagine di γ; ha 21 punti doppi, semplici per R^5, immagini delle 3.7 rette di M^{12} (generatrici della sua R^{84}) incidenti a γ, più altri 3, doppi anche per R^5, immagini di coniche bisecanti γ [17]). Il piano α di questi ultimi 3 punti incontra R^5 secondo una direttrice di 4° ordine, cogli stessi 3 punti doppi; la R^5 ha inoltre (come la φ^4 del n° prec.) *un* punto triplo apparente[18]), dal che si trae facilmente la rappresentazione della nuova M^4 e di M^{12} su S_3. — Per la rigata R^5 passano ∞^3 forme cubiche, che contengono di conseguenza il piano α e sono luoghi di trisecanti di R^5. Esse segano ulteriormente M^4 in superficie F^7 a sezioni di genere 3, incontranti R^5 secondo curve C^{17}, quadrisecanti le generatrici; e questo sistema $|F^7|$ ha curve caratteristiche di 4° ordine ed è omaloidico. Riferendo le F^7 ai piani di S_3, alle F^4 sezioni di M^4 corrispondono anche F^4 passanti per una C_7^9 (perciò con intersezioni variabili C_3^7) [19]); e le F^7 risultano rappresentate sui piani omologhi mediante le quartiche passanti per le intersezioni colla C_7^9. Alla R^5 cor-

[15]) Nella Memoria [3]) cit., la quartica γ è spezzata in una cubica e una retta. La differenza, rispetto alla detta Memoria, nell'ordine del sistema rappresentativo della M^{12} e nelle multiplicità delle due curve basi è dovuta a un errore incorso alla fine del n. 6 della Mem. cit., computando la superficie immagine di P come parte semplice dell'aggiunta, anzichè doppia.

[16]) *Todd*, l. c.

[17]) Una rigata R_p^n di S_4 ha $\binom{n-2}{2} - 3p$ punti doppi. V. *C. Segre*, art. III C 7 della „Encykl. d. Mathem. Wiss.", vol. III 2.2. A, nota [434]) a p. 913.

[18]) *Ascione*, Rend. R. Accad. Lincei (5), vol. 6_1 (1° sem. 1897), p. 162; *Severi*, Rend. Palermo 15 (1901), p. 33; *Todd*, Mem. cit. [12]), § 6.

[19]) *Todd*, l. c., § 6; *Babbage*, Cambridge Phil. Soc. Proceed. 32 (1936), p. 13. Le forme cubiche passanti per R^5 hanno 7 punti doppi, dei quali 3 fissi nei punti doppi di R^5 e 4 variabili in punti semplici di R^5.

risponde in S_3 una superficie φ^{11} colla C_7^9 tripla; ai 21 + 3 punti doppi di M^4, le 21 quadrisecanti e le 3 coniche 8-secanti di C_7^9, linee rispett. semplici e doppie per φ^{11}; alle sezioni iperpiane di M^{12}, superficie aventi la φ^{11} come aggiunta, perciò di ordine 15, colla C_7^9 quadrupla. Si ha quindi (indicando di nuovo con π i piani di S_3):

$$F^{12} = 15\pi - 4C_7^9 \quad ; \quad \pi = 3F^{12} - 4\gamma \text{ [20]}$$
$$\gamma = 11\pi - 3C_7^9 \quad ; \quad C_7^9 = 11F^{12} - 15\gamma \text{ [21]} .$$

4. La proiezione della M^{12} dal piano di una sua conica ε conduce invece direttamente a rappresentarla su di una quadrica di S_4. Questa proiezione è una M^6 di S_5, contenente una rigata R^4 razionale normale[22]) e 14 punti doppi, semplici per R^4, immagini delle rette di M^{12} incidenti a ε. Le ∞^5 quadriche passanti per R^4 segnano su M^6 un sistema lineare ∞^4 di F^8 a sezioni di genere 4, che incontrano R^4 secondo curve canoniche C_6^{10}, trisecanti le sue generatrici, passanti tutte pei 14 punti doppi di M^4, e perciò con 10 intersezioni variabili[23]). Il sistema $|F^8|$ ha pertanto curve caratteristiche razionali di ordine 6, è di grado 2, e conduce senz'altro

[20]) È dunque omaloidico il sistema formato su M^{12} dalle $F^{3\cdot 12}$ colla cubica γ quadrupla. L'intersezione di due di queste superficie è infatti di ordine $3.3.12 = 108$. Togliendone la cubica γ ($3.4.4 = 48$ unità) e le linee fondamentali di 2ª specie contenute di conseguenza nelle dette $F^{3\cdot 12}$, cioè le 21 rette di M^{12} incidenti a γ, e le 3 coniche bisecanti γ che ne sono linee doppie (8 unità per ciascuna), rimane una curva di ordine 15, immagine di una retta di S_3, e perciò appoggiata a γ (immagine di φ^{11}) in 11 punti. E $15.3 - 11.4 = 1$.

[21]) Le rette contenute in una M^4 di S_4 formano complessivamente una rigata R^{320}, di cui ogni generatrice si appoggia a altre 81 (*Marletta*, Sulla varietà delle rette..., Atti Accad. Gioenia di Catania (4), vol. 16 (1902)). — Nella M^4 considerata nel presente n°, la R^{320} è composta di 5 rigate parziali, per ciascuna delle quali indichiamo qui sotto la superficie di M^{12} di cui è proiezione: i numeri fra parentesi indicano, per le generatrici di ogni singola rigata, a quante generatrici di ciascuna delle altre o di sè stessa — nel medesimo ordine — esse si appoggiano. Il totale, per ogni parentesi, è sempre 81.

Una R^5, immagine di γ (0, 0, 24, 42, 15).
„ R^{63}, proiezione della R^{84} di M^{12} (0, 8, 27, 35, 11).
„ R^{123}, proiezione di una $F^{27\cdot 12}$ (γ^{24}) luogo delle coniche incidenti a γ (1, 14, 31, 28, 7).
„ R^{105}, proiezione di una $F^{35\cdot 12}$(γ^{42}) luogo delle cubiche bisecanti γ (2, 21, 33, 22, 3).
„ R^{24}, proiezione di una $F^{11\cdot 12}$ (γ^{15}) luogo delle quartiche trisecanti γ (3, 28, 36, 14, 0).

Nello spazio S_3, le generatrici di queste rigate hanno per immagini ordinatamente le quartiche 15-secanti la C_7^9, le cubiche 11-secanti, le coniche 7-secanti, le rette trisecanti, e i punti della detta C_7^9. Le linee anzidette hanno per luoghi superficie di ordini 11 (la φ^{11}), 105, 141, 63, colla C_7^9 multipla degli ordini indicati dai numeri contenuti nell'ultima parentesi.

[22]) Se non fosse normale, dovrebbe avere un punto doppio, tale anche per M^6, e immagine di una conica bisecante la ε, la quale insieme con ε costituirebbe una γ_1^4: mentre sulla M^{12} non esistono γ_1^4 (cfr. la mia Memoria [3]), n° 11).

[23]) Rappresentando R^4 col sistema delle cubiche piane aventi un punto base doppio A e uno semplice B, al sistema delle C_6^{10} corrisponde un sistema ∞^4 di C^7 (A^4B^3) e con 14 punti basi semplici, perciò di grado 10, colle cubiche anzidette come aggiunte pure.

alla rappresentazione voluta; alla rigata R^4 di M^4, cioè alla conica ε di M^{12}, corrisponde sulla quadrica una superficie di ordine 10, a sezioni di genere 6, perciò con curva doppia C anche di ordine 10 e genere 7. Questa curva è immagine di una rigata R^{18} di M^6, proiezione di una superficie $F^{5.12}$ (ε^8) di M^{12}. La rappresentazione di M^{12} sulla quadrica di S_4, le cui sezioni indicheremo con q, è data dalle equazioni:

$$\begin{aligned} q &= 2F^{12} - 3\varepsilon \\ C_7^{10} &= 5F^{12} - 8\varepsilon \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} F^{12} &= 8q - 3C_7^{10} \\ \varepsilon &= 5q - 2C_7^{10} \end{aligned} \quad ^{24)}$$

Osservazione. Abbiamo così rappresentata la M^{12} di S_8 in modo molto semplice sullo spazio S_3 (n. 3), su una quadrica di S_4, e su una V_3^5 di S_6 a curve-sezioni ellittiche: tutte tre varietà razionali, per le quali l'invariante relativo I di Zeuthen-Segre vale *due* [25]). Volendo calcolare questo stesso invariante per la M^{12}, si può osservare che essa si proietta dallo spazio tangente in un suo punto, o da una sua curva razionale (n. 2, 3), in una M^4 di S_4 con 24 punti doppi ordinari, perciò di classe $4.3^3 - 2.24 = 60$, e (riferendosi a un fascio di superficie sue sezioni iperpiane) di invariante $I = 60 - 2.3 - 2.20 = 14$[26]). Per la M^{12} (sulla quale la proiezione aveva un solo punto, o una sola curva razionale fondamentale) è pertanto $I = 16$. La semidifferenza degli invarianti 16 e 2 vale 7; e infatti in ciascuna delle tre varietà su cui abbiamo rappresentata la M^{12} abbiamo trovata un'unica curva fondamentale di genere 7 (mentre le curve razionali su M^{12} non vi influiscono).

5. Una M^{16} di $S_{10}(p = 9)$ con sole superficie intersezioni complete, e perciò contenente rette, si proietta da una di queste r in una M^{12} di S_8 contenente una R^3, immagine di r[27]). Gli ∞^3 iperpiani passanti per R^3

---

[24]) Le rigate contenute in M^6 devono avere ordini di somma 180, e ogni loro generatrice deve incontrarne complessivamente altre 31 (*Marletta*, l. c. in [21])). Esse sono (colla stessa convenzione della nota [21]) per i numeri in parentesi):

La R^4, immagine di ε (0, 0, 23, 8).

Una R^{70}, proiezione della R^{84} di M^{12} (0, 8, 18, 5).

Una R^{88}, proiezione di una $F^{18.12}$ (ε^{23}) luogo delle coniche incidenti a ε (1, 14, 14, 2).

La R^{18}, proiezione di una $F^{5.12}$ (ε^8) luogo delle cubiche bisecanti ε (2, 21, 8, 0).

[25]) Per l'invariante I, come anche per l'invariante i (pure di Zeuthen-Segre) di una superficie, v. le note [8]) e [9]) del mio lavoro preced., e l'enunciato 2) del n. 2 dello stesso lavoro. Per lo spazio S_3 e per la quadrica il calcolo di I è immediato. Per la V_3^5 questo invariante deve avere lo stesso valore che per lo spazio S_3, potendosi queste due varietà rappresentare l'una sull'altra (come qui al n. 2) con una sola curva fondamentale razionale su ciascuna di esse.

[26]) Per una F^4 di S_3 priva di linee eccezionali, quale è la sezione iperpiana di M^4, l'invariante i vale 20.

[27]) Questa M^{12} è caso particolare di quella considerata qui ai n. 2—4. Cfr. la mia Memoria [3]), n. 11, p. 345.

segano ulteriormente su M^{12} superficie F^9 a sezioni di genere 3, che incontrano la R^3 in curve C_1^5, hanno come mutue intersezioni quartiche razionali, e formano un sistema omaloidico. Da ciò appare senz'altro la razionalità della M^{16}, e ovvia ne risulta la rappresentazione su S_3. Alla R^3 corrisponde una superficie cubica (generale) φ^3; alle sezioni iperpiane di R^3, un sistema ∞^4 di quintiche su φ^3; alle sezioni iperpiane di M^{12}, cioè superficie $F^{12} = R^3 + F^9$, superficie F^4 passanti per una γ_3^7 contenuta in φ^3 (curva residua delle anzidette quintiche nell'intersezione $\varphi^3 . F^4$). Infine, alle sezioni iperpiane di M^{16} (le cui proiezioni su M^{12} sono equivalenti alla somma $F^{12} + R^3$), corrisponderanno in S_3 superficie F^{4+3}, cioè F^7 colla γ_3^7 doppia e la φ^3 come unica aggiunta.

Indicando al solito con π i piani di S_3, si hanno le equazioni:

$$\begin{aligned} F^{16} &= 7\pi - 2\gamma_3^7 \\ r &= 3\pi - \gamma_3^7 \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} \pi &= F^{16} - 2r \\ \gamma_3^7 &= 3F^{16} - 7r \end{aligned}$$

dalle quali risulta altresì provata l'effettiva esistenza della M^{16} suddetta.

Alla rigata R^{25} delle trisecanti di γ_3^7 (con tale curva come 7^{pla}), congiunta colla φ^3 immagine di r, corrisponde su M^{16} l'unica rigata R^{64}, intersezione con una forma di 4° ordine, e di cui ogni generatrice ne incontra altre 5. La M^{12} proiezione di M^{16} ha pertanto 5 punti doppi, semplici per R^3, aventi per immagini in S_3 le 5 quadrisecanti di γ_3^7. La M^{12} contiene tre rigate (l. c. in[27])): la R^3; la R^{57} proiezione della R^{64} anzidetta; e una R^{24}, proiezione della $F^{3\cdot 16}(r^7)$ luogo delle coniche di M^{16} appoggiate a r, e alla quale corrisponde in S_3 la γ_3^7 [28]). La somma dei 3 ordini è appunto 84; e l'ordine della congruenza delle coniche contenute in M^{16} è 12 [29]).

L'invariante I della M^{16} vale 8; la rappresentazione su S_3 ha infatti su M^{16} una sola retta fondamentale, e in S_3 una curva di genere $3 = \frac{8-2}{2}$.

6. Al n. 10 della mia Memoria[1]) ho incontrato un'altra M^{16} di S_{10} a curve-sezioni canoniche, priva di rette (con superficie sezioni „di 2ª specie"), ottenuta come intersezione di una quadrica col cono Γ proiettante una M^8 di S_9 le cui sezioni sono riferibili alle quadriche di S_3. Questa M^{16} è rappresentabile sul più generale spazio S_3 doppio con superficie di diramazione del 4° ordine (φ^4); contiene un sistema lineare ∞^3 di F^8 (rappresentabili sul piano mediante sestiche con 7 punti doppi) e aventi

[28]) Nelle tre rigate R^3, R^{57}, R^{24} ciascuna generatrice ne incontra ordinatamente — con notazione conforme alla nota [21]) — altre (0, 1, 7), (0, 5, 3), (1, 7, 0), con somma costante 8.

[29]) Per un punto di r passano 7 coniche generalmente irriducibili, e 5 spezzate in r e una retta incidente a questa.

per immagini in S_3 i piani doppi. Il sistema $|F^8|$ appartiene all'involuzione J_2 le cui coppie stanno sulle generatrici del cono Γ; e ha come sistema lineare doppio il sistema $|F^{16}|$ delle sezioni iperpiane. Questa M^{16} contiene ∞^4 curve γ_1^4, corrispondenti alle rette doppie dello spazio S_3, delle quali ∞^2, corrispondenti alle tangenti doppie di φ^4, si spezzano in coppie di coniche. Da una ε di queste coniche la M^{16} si proietta in una M^{10} di S_7 (sempre della serie M^{2p-2} di S_{p+1}, con $p = 6$) contenente una rigata R^4 immagine di ε, e su questa un punto doppio D, tale anche per M^{10}, immagine della conica bisecante (che forma cioè coppia con) ε; sicchè la R^4 non sarà normale, ma starà in un S_4. Le F^8 generiche si proiettano in F^7; quelle ∞^1 che passano per ε, in superficie cubiche; le une e le altre passanti (semplicemente) per D. Questa M^{10} è quella già considerata nella mia Memoria[3]), al n° 10, 2° capoverso di p. 344; D è il vertice dell' S_0 -cono che la contiene.

L'invariante di Zeuthen-Segre ha per questa M^{16} lo stesso valore che per l' S_3 doppio con φ^4 di diramazione, la corrispondenza fra essi essendo priva di elementi fondamentali. Calcolandolo per l' S_3 doppio mediante un fascio di piani doppi, e poichè la superficie φ^4 è di classe 36, si ha $I = 36 - 2.1 - 2.6 = 20$ [30]).

Questa M^{16} presumibilmente *non* è razionale; come probabilmente non lo è la forma cubica generale di S_4, che dal punto di vista birazionale può considerarsi caso particolare della detta M^{16}, in quanto da un suo punto si proietta anche in un S_3 doppio con una particolare φ^4 di diramazione (avente un piano tangente lungo una conica). Pertanto le M^{2p-2} a curve-sezioni canoniche e contenenti soltanto superficie intersezioni complete diventano razionali già per valori minori di $p (p \geqq 9)$, che — presumibilmente — le altre (ancora non razionali, probabilmente, per $p = 9$ e $p = 13$).

7. Passiamo ora alla M^{18} di S_{11} ($p = 10$), sempre contenente soltanto superficie intersezioni complete. Da una sua retta r, certo esistente, questa si proietta in una M^{14} di S_9, contenente una rigata R^3, e sulla quale gli iperpiani passanti per R^3 segano un sistema lineare ∞^4 di F^{11}, a sezioni di genere 4, incontranti R^3 in curve C_1^5. Si vede facilmente che queste C_1^5 hanno a comune 4 punti fissi, doppi per M^{14} e immagini di altrettante rette di M^{18} incidenti a r. Il sistema $|F^{11}|$ ha le curve caratteristiche di ordine 6 e razionali, e è di grado 2; conduce quindi a rappresentare la M^{18} sopra una quadrica Q di S_4, sulla quale a R^3 cor-

[30]) L'invariante i del piano doppio con C^4 generale di diramazione si può calcolare con un fascio di rette doppie: si trova $i = 12 - 2 - 4.1 = 6$.

risponde una superficie φ^4 (intersezione con altra quadrica). Alle sezioni iperpiane di M^{14} (equivalenti alla somma $R^3 + F^{11}$) corrispondono su Q superficie φ^6, segate da forme cubiche, vincolate a segare φ^4 in curve razionali di 5° ordine, e perciò a passare per una γ_2^7 fissa (contenuta in φ^4); e alle sezioni iperpiane di M^{18}, superficie φ^{10} colla γ_2^7 doppia e la φ^4 come unica aggiunta.

Indicando con q le quadriche di S_3 sezioni iperpiane di Q, si hanno le equazioni:

$$\begin{aligned} F^{18} &= 5q - 2\gamma_2^7 \\ r &= 2q - \gamma_2^7 \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} q &= F^{18} - 2r \\ \gamma_2^7 &= 2F^{18} - 5r \end{aligned} .$$

che dimostrano altresì l'effettiva esistenza della M^{18} in parola.

La M^{14} anzidetta, oltre alla rigata R^3, contiene una R^{19} immagine della curva γ_2^7 su Q, e una R^{48} a cui corrisponde su Q la superficie pure rigata di ordine 26 con γ_2^7 quintupla, luogo delle corde di γ_2^7 contenute in Q. Essendo quest'ultima rigata $= 13q - 5\gamma_2^7 = 3F^{18} - r$, la R^{48} è proiezione dell'unica rigata contenuta in M^{18}; una R^{54}, sua intersezione con una forma cubica [31]. Ogni generatrice di R^{54} è incidente a 4 altre; quelle incidenti a r hanno per immagini su Q le 4 trisecanti di γ_2^7 [32]. La congruenza delle coniche contenute in M^{18} è di ordine 9. L'invariante I della varietà vale 6; e $\frac{6-2}{2} = 2$, genere della γ_2^7 [33].

Per $p > 10$ le M^{2p-2} di S_{p+1} sono tutte razionali (come è dimostrato nella mia Memoria[1])) all'infuori forse del caso $p = 13$; ma non me ne è nota alcuna che contenga soltanto superficie intersezioni complete. Anzi il procedimento che conduce a rappresentare la M^{2p-2}, per $p = 9, 10,$

---

[31]) La R^{19} è invece proiezione di una $F^{2.18}(r^5)$, luogo delle coniche di M^{18} appoggiate a r. La somma degli ordini delle tre rigate contenute nella M^{14} è 70, come nella M^{14} considerata nella mia Nota nei Rend. R. Accad. Lincei (6) vol. 11, 1° sem. 1930, p. 329. Ogni generatrice di ciascuna di esse ne incontra in tutto altre 6, e le consuete parentesi, nell'ordine R^3, R^{48}, R^{19}, sono (0, 1, 5), (0, 4, 2), (1, 5, 0).

[32]) Una curva C_p^n di S_4 ha $\binom{n-2}{3} - (n-4)p$ trisecanti (*C. Segre*, articolo cit. in [17]), n. 25, dove sono indicati i vari lavori sul problema degli spazi plurisecanti una curva).

[33]) Sulla forma cubica generale di S_4 le quadriche passanti per una sua retta s segano un sistema lineare di superficie rappresentante pure una M^{18} di S_{11} a curve-sezioni canoniche, ma che contiene anche superficie *non* intersezioni complete con forme; fra altre una R^4 immagine della retta s e una R^{35} corrispondente alla rigata della forma cubica avente s per direttrice. Ogni generatrice di R^4 ne incontra 5 di R^{35}; ogni generatrice di R^{35} ne incontra una di R^4 e un'altra di R^{35}. Cadono perciò tutte le considerazioni indicate qui sopra: se r è generatrice di R^4, il sistema $|F^{11}|$ è di grado 3 e rappresenta daccapo una forma cubica; se r sta su R^{35}, $|F^{11}|$ appartiene a una congruenza di coniche.

rispett. sullo spazio S_3 e sulla quadrica di S_4 conduce per $p > 10$ a varietà a 3 dimensioni di spazi superiori, a curve-sezioni razionali, che sono notoriamente ∞^1 di piani, oppure coni di S_6 proiettanti una superficie di Veronese[34]), sulle quali le superficie costituenti la base sono in numero > 1. E ciò avvalora la presunzione che non vi siano altre M^{2p-2} del tipo anzidetto. In ogni modo, le M^{2p-2} di S_{p+1} a curve-sezioni canoniche, contenenti sole superficie intersezioni complete e di dubbia razionalità, sono oramai limitate ai tre casi $p = 5, 6, 8$.

---

[34]) *Enriques*, l. c. in [8]), n. 9.

(Eingegangen den 23. Juni 1941.)