Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 13 (1940-1941)

Artikel: Les réseaux Riemanniens.
Autor: Blanc, Charles
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13549

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Les réseaux Riemanniens

Par CHARLES BLANC (Lausanne)

On a montré[1]) comment on pouvait retrouver, pour des fonctions définies sur un ensemble discontinu de points, des propriétés absolument analogues à celles des fonctions analytiques d'une variable complexe; il s'agissait en particulier des propriétés du module d'une fonction analytique dans une région du plan, propriétés qui correspondent exactement à des propriétés des fonctions harmoniques.

Nous nous proposons ici d'élargir ces résultats, en introduisant des *réseaux Riemanniens*, analogues discontinus des surfaces de Riemann; ces réseaux se répartissent en deux types, que l'on peut encore appeler parabolique et hyperbolique; on peut également, en introduisant une certaine notion de courbure, retrouver une formule analogue à celle de Gauss-Bonnet sur les surfaces, et qui conduit à un critère de type assez précis.

§ 1. Les réseaux Riemanniens

Soit dans un plan un ensemble discontinu de points, sans point d'accumulation à distance finie: relions des points de cet ensemble par des arcs sans points communs autres que les points de l'ensemble considéré, et tels que deux arcs au moins aboutissent en chaque point donné. Nous appellerons cette figure un *réseau Riemannien*, ou plus simplement un *réseau;* dans la suite, nous serons amenés à faire deux restrictions à cette définition:

A. Le réseau décompose le plan en un ensemble de triangles (alors qu'en général il s'agit de polygones quelconques).

B. Le réseau peut être décomposé en une suite de polygones $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, la couronne comprise entre C_i et C_{i+1} étant traversée par les arcs du réseau.

On remarque sans peine que les réseaux déjà envisagés[2]) vérifient la condition B. Le réseau formé en décomposant un plan en hexagones réguliers, puis en divisant chacun de ces hexagones en 6 triangles remplit les conditions A et B.

D'autre part, la condition A n'est pas essentielle: on pourrait remplacer

---

[1]) *Ch. Blanc:* Une interprétation élémentaire des théorèmes fondamentaux de M. Nevanlinna. Comm. Math. Helv. 12 (1939), 153—163. Ce travail sera désigné dans la suite par I.

[2]) I, p. 153.

triangle par *hexagone* ou *quadrilatère:* il n'y aurait alors à apporter dans la suite que quelques modifications sans importance.

Réseau conjugué. A tout réseau E (ne satisfaisant pas nécessairement aux conditions A et B) correspond un réseau E^*, que nous appellerons *réseau conjugué.* On le construit de la façon suivante: à tout polygone élémentaire de E on fait correspondre un sommet de E^*, et à toute arête de E on fait correspondre une arête de E^*, reliant les deux sommets de E^* qui correspondent aux polygones de E séparés par l'arête envisagée. On pourra même définir un sens sur toute arête de E^* à partir d'un sens sur l'arête de E, en fixant une fois pour toutes un sens positif de rotation sur E.

§ 2. Fonctions pré-harmoniques sur un réseau

Considérons une région E d'un réseau Riemannien quelconque. En associant à chaque sommet P de E un nombre réel $u(P)$, on définit une *fonction* sur E. Nous dirons que cette fonction est *pré-harmonique*[3]) en P si l'on a

$$\lambda(P)\, u\,(P) = \Sigma u(P')\,, \tag{2.1}$$

$\lambda(P)$ étant le nombre d'arêtes issues de P, et la somme étant étendue aux sommets P' de E voisins de P. Si $u(P)$ n'est pas p. h. en P, on posera

$$\beta_u(P) = \lambda(P)\, u\,(P) - \Sigma u(P')\,.$$

Si $u(P)$ est p. h. en tous les sommets P de E, on dit qu'elle est p. h. dans E. On a sans autre le théorème:

Une fonction p. h. dans E atteint son maximum et son minimum sur le contour.

Cela permet de démontrer le

Théorème d'existence: Si l'on se donne une fonction $\alpha(P)$ sur le contour Γ de E, et une fonction $f(P)$ en tout point intérieur de E, il existe une fonction et une seule $u(P)$ telle que:

1° $u(P) = \alpha(P)$ *sur* Γ;

2° $\beta_u(P) = f(P)$ *dans* E.

En effet, il ne peut exister, en vertu du théorème du maximum, qu'une solution. Or la recherche de cette solution conduit à la résolution d'un

[3]) Cette dénomination est due à M. *G. Bouligand:* Sur le problème de Dirichlet. Ann. Soc. Pol. Math. **1925**, p. 59—112. Nous l'ignorions lors de la rédaction de I, où nous avons employé l'expression fonction harmonique. Nous écrirons désormais p. h. pour pré-harmonique.

système de n équations linéaires à autant d'inconnues; il suffit de montrer que le déterminant n'en est pas nul; on le vérifie en remarquant que ce déterminant ne dépend que de Γ, mais est indépendant du choix de $\alpha(P)$ et de $f(P)$. Prenons $\alpha(P) = a \neq 0, f(P) = 0$. La fonction $u(P) = a$ est alors solution, et elle est unique, donc le déterminant n'est pas nul.

Il résulte en particulier de ce théorème l'existence d'une fonction p. h. dans E, prenant des valeurs données sur le contour Γ. Cette fonction réalise le minimum de la somme $\Sigma[u(P) - u(Q)]^2$ étendue à toutes les paires de points voisins sur E. Pour la démonstration, voir I, p. 154.

Dérivée d'une fonction. On peut considérer, à côté des fonctions des sommets d'un réseau, des fonctions des arêtes. On dira qu'une fonction d'arête $f(q)$ est la *dérivée* d'une fonction $u(P)$ des sommets si

$$f(q) = u(P_2) - u(P_1) = u'(q),$$

P_1 et P_2 étant l'origine et l'extrémité de l'arête orientée q.

La somme $\Sigma u'(q)$ étendue aux arêtes d'un polygone fermé de E est nulle, si on prend pour origine d'une arête l'extrémité de l'arête précédente. Cela résulte sans autre du fait que la fonction $u(P)$ est uniforme. De plus, *la somme $\Sigma u'(q)$ étendue aux arêtes issues d'un sommet P où $u(P)$ est p. h., est nulle,* pour autant que l'on ait choisi pour toutes ces arêtes un sens convenable (par exemple en prenant P pour origine de toutes ces arêtes). La réciproque est vraie, elle est la définition même de la notion de fonction p. h.

On peut aussi parler d'une intégration: *étant donnée une fonction $f(q)$ des arêtes d'un réseau telle que $\Sigma f(q) = 0$ si la somme est étendue aux arêtes d'un polygone fermé quelconque de E* (en choisissant convenablement le sens de chaque arête), *il existe une fonction $u(P)$ avec*

$$u'(q) = f(q).$$

Il en existe même une infinité, la différence de deux d'entre elles étant une constante.

Prenons en effet en un point P_0 de E, $u(P_0) = 0$, et posons

$$u(P) = \Sigma f(q),$$

la somme étant étendue à un polygone reliant P_0 à P, les arêtes étant prises toutes dans le même sens. Le résultat ne dépend pas du polygone choisi, $u(P)$ est donc bien définie, et sa dérivée est $f(q)$.

Si, en plus de l'hypothèse sur $\Sigma f(q)$ étendue à tout polygone fermé, *on suppose que cette somme étendue aux arêtes issues d'un sommet quelconque est nulle, les fonctions primitives $u(P)$ sont p. h.*

Revenons sur l'hypothèse relative à la somme $\Sigma f(q)$ étendue aux arêtes d'un polygone fermé: *pour que cette somme soit toujours nulle, il suffit qu'elle le soit pour tous les polygones élémentaires.* Or, si l'on passe d'un réseau E au réseau conjugué E^*, on fait correspondre aux arêtes d'un polygone élémentaire de E les arêtes issues d'un sommet Q de E^*, et aux arêtes issues d'un sommet P de E les arêtes d'un polygone élémentaire de E^*. Considérons donc une fonction $f(q)$ sur les arêtes de E, dérivée d'une fonction $u(P)$ p. h. sur E; à $f(q)$ sur E correspond une fonction $g(q^*)$ sur les arêtes de E^*, si l'on convient de poser $f(q) = g(q^*)$, où q et q^* sont deux arêtes correspondantes: *il en résulte que $g(q^*)$ à son tour est la dérivée d'une fonction p. h. sur E^*.* On appellera *fonction conjuguée* de $u(P)$ toute fonction $v(Q)$ ayant $g(q^*)$ pour dérivée.

L'uniformité de la fonction conjuguée $v(Q)$ résulte donc du fait que $u(P)$ est p. h. Il est intéressant de voir ce qui se passe lorsque $u(P)$ cesse d'être p. h. Toutes les propriétés envisagées étant additives, on peut supposer que $u(P)$ est partout p. h. excepté en un sommet P_0 où $u(P_0) = a$. La dérivée $f(q)$ de $u(P)$ est bien définie, sa somme étendue à un polygone fermé est nulle, et celle étendue aux arêtes issues d'un sommet P est nulle excepté en P_0 où elle est égale à a. Il en résulte pour la fonction $g(q^*)$ sur E^* que sa somme étendue à un polygone fermé simple entourant une fois P_0 dans le sens positif est égale à a et qu'elle est nulle si ce polygone n'entoure pas P_0; elle est nulle si elle est étendue aux arêtes issues d'un sommet Q; $g(q^*)$ est par conséquent la dérivée d'une fonction $v(Q)$ p. h. et multiforme; cette fonction prend en chaque sommet une infinité de valeurs, dont la différence est toujours un multiple entier de a. On peut la rendre uniforme en sectionnant convenablement le réseau E^* ou en substituant à E^* un *réseau de recouvrement.*

§ 3. Type d'un réseau

On considérera dans ce paragraphe des réseaux au sens large, illimités en tout sens, sur lesquels il existe par conséquent une suite illimitée de contours $C_1, C_2, \ldots, C_n \ldots$ fermés simples, tout sommet du réseau étant intérieur à un tel contour, pour n assez grand.

Une fonction $u(P)$ est *normée* en P_0 si

$$u(P_0) = 0\,, \quad \beta_u(P_0) = -1\,.$$

Type d'un réseau : soit une suite de contours polygonaux fermés simples $C_1, \ldots, C_n, \ldots$ d'un réseau, entourant un sommet P_0 ; soit $u_n(P)$ la fonction p. h. dans C_n excepté en P_0 où elle est normée, et constante sur C_n (cette fonction existe et est unique); *soit $r_n = u_n(P)$ sur C_n. Si*

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \infty ,$$

on dit que le réseau est du type parabolique ; si

$$\lim_{n\to\infty} r_n < \infty ,$$

le réseau est du type hyperbolique.

Il faut montrer que cette définition ne dépend ni de P_0, ni, P_0 étant choisi, de la suite C_n. Montrons tout d'abord le second point. Supposons $\lim r_n = \infty$ et considérons une autre suite de contours fermés $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n, \ldots$ et les valeurs correspondantes $\varrho_1, \ldots, \varrho_n, \ldots$. A tout contour C_n correspond un contour Γ_{ν_n} extérieur à C_n ; on a par conséquent $\varrho_{\nu_n} > r_n$, d'où $\lim \varrho_n = \infty$.

Il reste à montrer que la définition est indépendante de P_0. Supposons qu'il existe deux sommets, P_0 et P_1 donnant des types différents. Soit donc une suite de contours C_n entourant P_0 et P_1, et $u_n(P)$ normée en P_0 et égale à r_n sur C_n, $v_n(P)$ normée en P_1 et égale à ϱ_n sur C_n. Supposons que r_n est borné.

La fonction

$$z_n(P) = [u_n(P) - r_n] - [v_n(P) - \varrho_n]$$

est nulle sur C_n ; $\beta_z(P_0) = -1$; $\beta_z(P_1) = +1$; ailleurs $z_n(P)$ est p. h. Il en résulte que $z_n(P_0) < 0$, $z_n(P_1) > 0$. Or

$$z_n(P_0) = -r_n + \varrho_n - v_n(P_0) < 0 ,$$

d'où

$$\varrho_n - v_n(P_0) < r_n \leqslant A$$

et

$$\varrho_n < v_n(P_0) + A .$$

Il s'ensuit que ϱ_n est borné. Considérons en effet un contour Γ, entourant P_1, passant par P_0 et intérieur à C_n pour $n > n_0$; $v_n(P)$ est toujours positive sur ce contour. Soit alors $x(P)$ la fonction p. h. dans Γ, nulle sur Γ excepté en P_0 où $x(P_0) = 1$; soit ensuite $y(P)$ la fonction p. h. dans Γ excepté en P_1 où $\beta_y = 1$, et nulle sur Γ. On a, puisque $v_n(P) > 0$ sur Γ,

$$v_n(P_1) > x(P_1)\, v_n(P_0) - y(P_1)$$

et, puisque $v_n(P_1) = 0$ et $x(P_1) > 0$,

$$v_n(P_0) < \frac{y(P_1)}{x(P_1)} ,$$

d'où

$$\varrho_n < A + \frac{y(P_1)}{x(P_1)} ;$$

le second membre ne dépend pas de n, on a donc

$$\lim \varrho_n < \infty .$$

Ainsi, le type d'un réseau est parfaitement déterminé.

Remarquons que nous avons démontré en passant le lemme suivant: *étant donnés un domaine E d'un réseau, et deux sommets P_0 et P_1 dans E* (P_1 éventuellement sur la frontière), *il existe un nombre $K = K\ (E, P_0, P_1)$ tel que toute fonction $u(P)$ p. h. dans E excepté en P_0 où elle est normée, vérifie l'inégalité $u(P_1) < K$* si $u(P) \geqslant 0$ sur la frontière.

On connaît des réseaux de l'un et l'autre types. Les réseaux introduits dans l'article I sont du type parabolique. On peut construire de la façon suivante un réseau du type hyperbolique. Prenons une suite illimitée de cercles $C_1, \ldots, C_n, \ldots$ de centre P_0 et de rayon croissant. Prenons sur C_1 3 sommets que nous relions à P_0, puis sur C_2 6 sommets reliés chacun à un sommet de C_1, de façon que de chaque sommet de C_1 partent 2 arêtes vers C_2; puis sur C_3 3.2^2 sommets reliés de la même façon aux 6 sommets de C_2, etc. La fonction

$$u(P) = \frac{1}{3}\left(1 + \sum_1^{n-1} \frac{1}{2^k}\right) \quad \text{si} \quad P \text{ sur } C_n \ , \quad u(P_0) = 0$$

est p. h. sur tout le réseau excepté en P_0 où elle est normée. Elle est constante sur tout C_n et elle est bornée. Le réseau est donc hyperbolique.

Etant donné un réseau illimité E et un sommet P_0 de E, il existe toujours une fonction p. h. sur E et normée en P_0; cette fonction est bornée si E est hyperbolique.

Considérons en effet une suite de polygones C_n du réseau, et la suite correspondante des fonctions $u_n(P)$ normées en P_0 et constantes sur C_n. L'ensemble des sommets du réseau étant dénombrable, nous pouvons les appeler $P_0, P_1, \ldots, P_k, \ldots$ On a vu qu'une fonction de la suite $u_n(P)$, normée en P_0 vérifie en tout sommet de E une inégalité $u_n(P) < K(P)$,

$K(P)$ ne dépendant que de P, quel que soit n (mais à condition bien entendu que P soit intérieur à C_n). Il en résulte qu'on peut extraire de la suite $S_0 : u_1, u_2, \ldots$ une suite S_1 qui converge en P_1 vers une valeur finie $u(P_1)$; puis de S_1 une suite S_2 qui converge en P_2 vers $u(P_2)$, etc. Le procédé diagonal[4]) nous permet donc d'extraire de la suite S_0 une suite S qui converge dans tout le réseau vers une fonction $u(P)$, qui possède les propriétés requises; cette fonction est bornée si E est hyperbolique, puisqu'alors les fonctions $u_n(P)$ sont bornées dans leur ensemble.

Formule de Green. On peut établir pour toute région finie E d'un réseau une formule analogue à celle de Green. Soit Γ l'ensemble des sommets limitant E; si $u(P)$ et $v(P)$ sont deux fonctions dans E, on a en tout point de $E^* = E - \Gamma$

$$u(P)\,\beta_v(P) - v(P)\,\beta_u(P) = -u(P)\,\Sigma v(P') + v(P)\,\Sigma u(P')\,,$$

les sommes étant étendues aux sommets voisins de P. Si on fait la somme des deux membres de cette relation pour tous les sommets de E^*, on obtient

$$\sum_{E^*}[u(P)\,\beta_v(P) - v(P)\,\beta_u(P)] = -\Sigma u(Q)\,v(P) + \Sigma v(Q)\,u(P)\,,$$

les sommes du second membre étant étendues à tous les couples de sommets PQ, P sur Γ et Q voisin dans E^*. On peut écrire

$$-u(Q)\,v(P) + v(Q)\,u(P) = -[u(P)\,v'(q) - v(P)\,u'(q)]\,,$$

q étant l'arête QP. On a donc

$$\sum_{E^*} u\beta_v - v\beta_u = -\Sigma[u(P)\,v'(q) - v(P)\,u'(q)]\,, \tag{3.1}$$

où la somme du second membre est étendue à toutes les arêtes QP reliant E^* à Γ.

Il en résulte une formule permettant la résolution du problème de Dirichlet dans E. Soit en effet $G(P, Q)$ la fonction de P telle que $G(P, Q) = 0$ si P est sur Γ, $\beta_G(P) = 0$ excepté en Q où $\beta_G = -1$. En posant alors $v(P) = G(P, Q)$ dans la relation (3.1) il vient, si $u(P)$ est p. h. dans E,

$$u(Q) = \sum_{\Gamma} u(P)\,G'(q, Q)\,, \tag{3.2}$$

formule qui permet de résoudre le problème de Dirichlet dans E dès que l'on connaît les fonctions $G(P, Q)$.

[4]) Voir *P. Montel:* Familles normales de fonctions analytiques, p. 15—18.

Posons encore dans (3.1) $v(P) = 1$, d'où $\beta_v(P) = 0$ et soit $\beta_u(P) = 0$ excepté en P_0 où $\beta_u(P_0) = -1$. Alors

$$1 = \sum_{\Gamma} u'(q) . \tag{3.3}$$

Cette relation s'établirait plus simplement en partant du fait que la fonction conjuguée de $u(P)$ est multiforme.

On en déduit un théorème précis sur le type d'une catégorie assez restreinte de réseaux. Soit un réseau E formé d'un sommet P_0 et d'une suite illimitée de cercles $C_1, \ldots, C_n, \ldots$ de rayons croissants reliés entre eux par des arêtes, les nombres d'arêtes issues d'un sommet de C_n vers C_{n+1} et vers C_{n-1} étant les mêmes pour tous les sommets de C_n. Par symétrie il existe une fonction $u(P)$ normée en P_0, p. h. sur tout le reste de E et constante sur chaque C_n. Soient u_n la valeur de $u(P)$ sur C_n, $\nu(n)$ le nombre de sommets de C_n, enfin $\sigma(n)$ le nombre d'arêtes issues d'un sommet de C_n vers C_{n-1}. On a

$$1 = \sum_{C_n} u'(q) = \nu(n)\, \sigma(n)\, (u_n - u_{n-1})$$

et

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{\nu(n)\, \sigma(n)} ,$$

d'où, en sommant

$$u_n = \sum_1^n \frac{1}{\nu(i)\, \sigma(i)} .$$

Si la série $\sum \frac{1}{\nu(n)\, \sigma(n)}$ *diverge, le type est parabolique; si elle converge, il est hyperbolique.*

Les exemples de réseaux qui ont été donnés correspondent le premier (voir I) à $\nu(n) = p$ (= constante), $\sigma(n) = 1$; le second à $\nu(n) = 3.2^{n-1}$, $\sigma(n) = 1$.

On remarquera que la précision du résultat a été obtenue grâce à une hypothèse très forte de symétrie pour E. Il s'agit là d'un fait général qui a déjà été signalé: il est impossible de donner un critère de type reposant uniquement sur le degré de ramification.

§ 4. Un lemme sur le type d'un réseau

Considérons maintenant des réseaux dans un sens plus étroit: nous supposons qu'ils remplissent la condition B. Appelons alors E_n la partie du réseau E formée de P_0 et de $C_1, \ldots, C_n$; soit sur E_n une fonction $u(P)$

normée en P_0, et p. h. ailleurs: nous nous proposons d'évaluer $\sum_{E_{n-1}} u'^2(q)$, cette somme étant étendue à toutes les arêtes reliant deux sommets de E_{n-1}. On a, si $q = P_1P_2$,

$$u'(q) = u(P_2) - u(P_1) = v(Q_2) - v(Q_1)\,,$$

où Q_1 et Q_2 sont les deux sommets du réseau conjugué qui correspondent à P_1 et P_2, et $v(Q)$ une fonction conjuguée de $u(P)$ (cette fonction est multiforme: elle interviendra toujours par des différences au sujet desquelles il n'y a aucune ambiguïté). On a alors

$$u'^2(q) = [u(P_2) - u(P_1)]\,[v(Q_2) - v(Q_1)]\,,$$

et en faisant la somme pour toutes les arêtes PP' issues d'un sommet P de E_{n-1}:

$$\sum_P u'^2(q) = \sum u(P')\,[v(Q_2) - v(Q_1)]$$

puisque, si $P \neq P_0$, $\sum[v(Q_2) - v(Q_1)] = 0$ et $u(P_0) = 0$.

Donc, si $P = P_0$

$$\sum_{P_0} u'^2(q) = \sum_{C_1} u(P)\,u'(q) \tag{4.1}$$

où il faut entendre par q l'arête PP_0. Ensuite, si $i \leqslant n-1$,

$$\sum_{C_i}\sum_P u'^2(q) = \sum_{C_{i+1}} [u(P)\sum_{\underline{P}} u'(q)] + \sum_{C_{i-1}} [u(P)\sum_{\overline{P}} u'(q)] + \\ + \sum_{C_n}[u(P)\sum_P{}' u'(q)] \tag{4.2}$$

où $\sum_{\underline{P}} u'(q)$ est étendue aux arêtes PP' de P vers l'intérieur, $\sum_{\overline{P}} u'(q)$ aux arêtes PP' de P vers l'extérieur et $\sum_P{}' u'(q)$ aux arêtes $P'P$ et PP'' sur le contour C_i passant par P.

Si maintenant nous faisons la somme de (4.1) et de (4.2) pour i allant de 1 à $(n-1)$, nous obtenons

$$\sum_{E_{n-1}}\sum_P u'^2(q) = \sum_{C_n}[u(P)\sum_{\underline{P}} u'(q)] + \sum_{C_{n-1}}[u(P)\sum_{\overline{P}} u'(q)]$$

en tenant compte du fait que

$$\sum_{\overline{P}} u'(q) + \sum_{\underline{P}} u'(q) + \sum_P{}' u'(q) = 0\,.$$

Or

$$\sum_{E_{n-1}} \sum_{P} u'^2(q) = 2 \sum_{E_{n-1}} u'^2(q) + \sum_{C_{n-1}} u'^2(q)$$

où $\sum_{C_{n-1}} u'^2(q)$ est étendue aux arêtes de C_{n-1} vers C_n, donc

$$2 \sum_{E_{n-1}} u'^2(q) = \sum_{C_n} [u(P) \sum_{P} u'(q)] + \sum_{C_{n-1}} [u(P) \sum_{P} u'(q)] - \sum_{C_{n-1}} u'^2(q) . \quad (4.3)$$

On peut simplifier cette relation. Supposons que $u(P) = r_n$ (= constante) sur C_n. Alors

$$2 \sum_{E_{n-1}} u'^2(q) = r_n + \sum_{C_{n-1}} [u(P) \sum_{P} u'(q)] - \sum_{C_{n-1}} u'^2(q)$$

puisque $\sum_{C_i} u'(q) = \sum_{C_i} u'(q) = 1$. Mais sur C_{n-1} $u(P) = r_n - u'(q)$, donc dans ce cas

$$\sum_{E_{n-1}} u'^2(q) = r_n - \sum_{C_{n-1}} u'^2(q)$$

ou encore, puisque $u'(q) = 0$ sur C_n,

$$\sum_{E_n} u'^2(q) = r_n . \quad (4.4)$$

Si enfin E est du type hyperbolique, r_n est borné, d'où le lemme:

Soit E un réseau remplissant la condition B : s'il est du type hyperbolique, il existe une fonction $u(P)$ normée en P, p. h. sur le reste du réseau et telle que

$$\sum_{E} u'^2(q) = A \ (< \infty) .$$

Cette fonction est celle qui a été définie au cours du § 3.

La réciproque est immédiate.

§ 5. Une formule analogue à la formule de Gauss-Bonnet

Il s'agira ici de réseaux au sens étroit, vérifiant les conditions A et B.

Par définition, la *courbure* d'un réseau en un point P sera la quantité

$$\gamma(P) = 6 - \lambda(P) . \quad (5.1)$$

Soit $\nu(n)$ le nombre de sommets sur C_n et, si P est sur C_n, $\bar{\lambda}(P)$ et $\underline{\lambda}(P)$ les nombres d'arêtes issues de P vers C_{n+1} resp. vers C_{n-1}. On a $\bar{\lambda}(P) = 2 + \bar{\lambda}(P) + \underline{\lambda}(P)$ et $\gamma(P) = 4 - \bar{\lambda}(P) - \underline{\lambda}(P)$. De plus, si $n > 1$,

$$\sum_{C_n} \underline{\lambda}(P) = \sum_{C_{n-1}} \bar{\lambda}(P) = \nu(n-1) + \nu(n) ,$$

et si $n = 1$

$$\sum_{C_1} \underline{\lambda}(P) = \nu(1) .$$

Faisons la somme de $\gamma(P)$ sur E_n

$$\sum_{E_n} \gamma(P) = 6 - \nu(1) + 4\nu(1) - [\nu(1) + \nu(2)] - \nu(1) - \sum_{2}^{n} \sum_{C_i} [\bar{\lambda}(P) + \underline{\lambda}(P)]$$
$$= 6 - \nu(n+1) + \nu(n)\,,$$

donc

$$[\nu(n+1) - \nu(n)] + \sum_{E_n} \gamma(P) = 6\,. \tag{5.2}$$

La somme étendue à tout E_n joue le rôle de l'intégrale de la courbure totale. Le premier terme $[\nu(n+1) - \nu(n)]$ peut être interprété comme un accroissement de longueur: on sait que, suivant des conventions convenables, c'est ce que représente l'intégrale de la courbure géodésique.

Remarquons encore que la définition même de la courbure est la réduction à un point de la formule (5.2). On peut établir, parallèlement, une relation entre la courbure totale en un point P d'une surface et la longueur $l(r)$ du contour limitant les points de cette surface dont la distance à P est inférieure à r: cette relation peut même être prise pour définition de la courbure totale.

§ 6. Un critère de type en relation avec la courbure

Il s'agit encore de réseaux au sens restreint.

Si la somme $\sum \gamma(P)$ étendue aux sommets d'un réseau est bornée inférieurement, le réseau est du type parabolique.

Soit $u(P)$ une fonction normée en P_0, p. h. sur le reste de E. On a vu que

$$\sum_{C_n} u'(q) = 1\,.$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz, on en tire

$$1 \leqslant [\sum_{C_n} | u'(q) |]^2 \leqslant [\nu(n) + \nu(n+1)] \sum_{C_n} u'^2(q)\,.$$

D'autre part, en vertu du théorème du § 5 et de l'hypothèse sur $\sum \gamma(P)$

$$\sum_{E_n} \gamma(P) = 6 + \nu(n) - \nu(n+1) > -K_1$$

d'où

$$\nu(n+1) < \nu(n) + 6 + K_1 < nK_2$$

pour $n > n_0$. Donc

$$\sum_{C_n} u'^2(q) \geqslant \frac{1}{\nu(n) + \nu(n+1)} > \frac{K_3}{n}\,,$$

d'où il résulte que $\sum_{E} u'^2(q)$ diverge. D'après le lemme du § 4, la surface est alors parabolique.

§ 7. Une inégalité isopérimétrique sur les réseaux

On sait qu'il existe, pour toute courbe fermée plane une inégalité liant la longueur de cette courbe et l'aire comprise à l'intérieur. M. *F. Fiala*[5]) a énoncé une inégalité plus générale, relative aux courbes fermées tracées sur une surface dont la courbure totale n'est jamais négative.

On peut établir une inégalité analogue pour les réseaux, en faisant comme plus haut les hypothèses restrictives A et B sur ces réseaux.

Si la courbure est toujours non négative, on a

$$\nu(n+1) - 2\nu(n) + \nu(n-1) \leqslant 0 . \tag{7.1}$$

En effet, en tout point P de C_n, $\underline{\lambda}(P) + \bar{\lambda}(P) \leqslant 4$ d'où

$$\nu(n+1) + 2\nu(n) + \nu(n-1) \leqslant 4\nu(n) .$$

Appelons maintenant $F(n)$ le nombre de triangles du réseau intérieurs à C_n. Alors, *si la courbure est toujours non négative,*

$$\nu^2(n) \geqslant F(n)\,[\nu(n) - \nu(n-1)] . \tag{7.2}$$

Soit, en effet $\Delta F(n) = F(n) - F(n-1)$. On a, si $n > 1$, $\Delta F(n) = \nu(n) + \nu(n-1)$, d'où

$$\Delta F(n)\,[\nu(n) - \nu(n-1)] = \nu^2(n) - \nu^2(n-1) ,$$

et si $n = 1$ $\Delta F(1) = \nu(1)$, d'où $\Delta F(1)\,\nu(1) = \nu^2(1)$.

En faisant la somme de 1 à n

$$\nu^2(n) = \Delta F(1)\,\nu(1) + \sum_2^n \Delta F(i)\,[\nu(i) - \nu(i-1)] .$$

On peut transformer la somme du second membre au moyen d'un artifice inspiré de l'intégration par parties. Un calcul simple montre que l'on a

$$\sum_1^n (a_i - a_{i-1})\,b_i = a_n b_n - a_0 b_0 - \sum_1^n (b_i - b_{i-1})\,a_{i-1} ,$$

donc ici, en posant $F(0) = 0$, $\nu(0) = 0$,

$$\begin{aligned}\nu^2(n) &= \sum_1^n \Delta F(i)\,[\nu(i) - \nu(i-1)] \\ &= F(n)\,[\nu(n) - \nu(n-1)] - \sum_1^n [\nu(i) - 2\nu(i-1) + \nu(i-2)]\,F(i-1).\end{aligned}$$

---

[5]) *F. Fiala:* Une inégalité isopérimétrique sur les surfaces ouvertes à courbure positive. C. R. Acad. Sc. Paris 209 (1939), 821—823.

La somme du second membre est, on vient de le voir, toujours inférieure ou égale à zéro, donc

$$\nu^2(n) \geqslant F(n)\,[\nu(n) - \nu(n-1)]\,.$$

On peut remplacer $\nu(n) - \nu(n-1)$ au moyen de la formule (5.2), et on obtient

$$\nu^2(n) \geqslant F(n)\,[6 - \sum_{E_{n-1}} \gamma(P)]\,. \tag{7.3}$$

Cette relation peut être généralisée. Si l'on ne fait plus aucune hypothèse sur $\gamma(P)$, on a en tout point

$$\underline{\lambda}(P) + \bar{\lambda}(P) = 4 - \gamma(P)$$

d'où

$$\nu(n+1) - 2\nu(n) + \nu(n-1) = -\sum_{C_n} \gamma(P)\,,$$

et, en introduisant ce terme dans l'expression de $\nu^2(n)$

$$\nu^2(n) = F(n)\,[\nu(n) - \nu(n-1)] + \sum_{1}^{n-1} [F(i) \sum_{C_i} \gamma(P)]\,,$$

ou encore, d'après la formule (5.2)

$$\nu^2(n) = 6F(n) - \sum_{1}^{n-1} \{[F(n) - F(i)] \sum_{C_i} \gamma(P)\}\,.$$

Revenons aux réseaux pour lesquels la courbure est toujours non-négative. La somme $\sum_{E_n} \gamma(P)$ est une fonction non décroissante de n; il résulte alors de la formule (5.2) que si pour une valeur de n $\sum_{E_n} \gamma(P) > 6$, la suite $\nu(n)$ est décroissante (au sens strict), et le réseau est limité. Donc *sur un réseau illimité à courbure non négative, on a toujours* $\sum \gamma(P) \leqslant 6$.

Soit alors $C = \lim \sum \gamma(P)$ et n_0 la plus petite valeur de n pour laquelle $\sum_{E_n} \gamma(P) = C$. On a, pour $n > n_0$

$$\nu(n) = (n - n_0)\,(6 - C) + K\,,$$

d'où

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\nu(n)}{n} = 6 - C\,.$$