Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 13 (1940-1941)

Artikel: Heptaeder aus verschiedenen Netzen.
Autor: Merz, K.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13548

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 20.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Heptaeder aus verschiedenen Netzen

Von K. Merz (Chur)

Das Oktaeder wird durch seine drei Achsenschnitte in acht Zellen zerlegt, von denen je vier Zellen in Scheitellage das Heptaeder bilden, das damit vier nur in Ecken zusammenstoßende Dreiecke besitzt und dazu als Flächen noch die drei Quadrate der Achsenschnitte, die einander in den drei Achsen als Doppelstrecken durchdringen, an denen die vier Lücken der vier herausgenommenen Zellen nach dem Schnittpunkt O einspringen. Das Heptaeder kann aus verschiedenen Netzen, an denen Oberseite o und Unterseite u zu unterscheiden sind, durch Aufklappung erhalten werden, wobei je zwei der Randseiten sich zu Kanten aneinanderfügen, und zwar entweder o an o oder o an u, wobei im letzteren Fall *Wendestrecken* bestehen, welche *Möbiusbänder* schließen. Je nach dem Netz erhalten die Wendestrecken verschiedene Anordnung am Heptaeder, wodurch an der Außenseite der einzelnen Zellen die Flächen verschieden in o und u gegen einander gewendet erscheinen. An der Gesamtfläche des Heptaeders als einseitig können Außen- und Innenseite nicht unterschieden werden, da an den Wendestrecken Übergänge zwischen den Netzseiten stattfinden. Im folgenden sind sieben verschiedene Netze des Heptaeders gezeichnet, wobei die Wendestrecken außer in Kanten auch in Doppelstrecken fallen. Ist ein Netz durch Versuch hergestellt, so erhält man daraus andere, indem man einzelne der Wendestrecken durch Ansetzen der zugehörigen dabei zu wendenden Fläche zum Verschwinden bringt, was die Entstehung anderer Wendestrecken zur Folge hat. Die Aufklappungen der Netze erfolgen um die punktierten inneren Seiten nach oben, um die übrigen entgegengesetzt.

1. *Drei Wendestrecken* an dem Kantendreieck einer Lücke entstehen aus dem Netz Abb. 1_1. Die Wendestrecken sind 1, 2, 3 und die dazu entsprechend windschiefen Doppelstrecken I, II, III, die sich in O als dreifachem Punkt schneiden. Jedes der drei Quadrate der Achsenschnitte ist im Netz durch eine der Doppelstrecken geteilt zur Ermöglichung der Durchdringungen am Modell, an dem diese beiden Teile wieder gleichseitig o an o sich schließen, z. B. I an I, die dann zusammen in die inneren beiden Hälften I fallen. Am aufgeklappten Heptaeder zeigt die Lücke von 1, 2, 3 nach O die Unterseite des Netzes und ebenso die Gegenzelle zu dieser Lücke, während im übrigen außen o erscheint. Jede Zelle für sich besitzt als Flächen ein gleichseitiges Dreieck und drei Viertelsflächen der Quadrate als rechtwinklige Dreiecke.

Im Netz Abb. 1_1 ist ein Streckenzug gezeichnet von P nach V auf o und von $(P) \equiv P$ nach (V) in u, so daß durch die Aufklappung V und (V) auf der Wendestrecke 3 zusammenfallen. Dabei wird P nach Abb. 1_2 ein Punkt auf der Außenseite einer Zelle auf o und der Streckenzug führt als $PQRSTUV$ weiter auf o nach dem Gegenpunkt $(P) \equiv P$ durch (V) (P) in u in der Innenseite der Zelle. Dieser Weg von P auf der Heptaederfläche zu (P) schneidet die Doppelstrecken in D_3, D_1, und D_2. Dabei liegt PQD_3 außen an der 1. Zelle, $D_3\ RSD_1$ innen in der 2. Zelle, $D_1\ TUD_2$ außen an der 3. Zelle und $D_2\ V\ (P)$ innen wieder an der 1. Zelle. Dieser

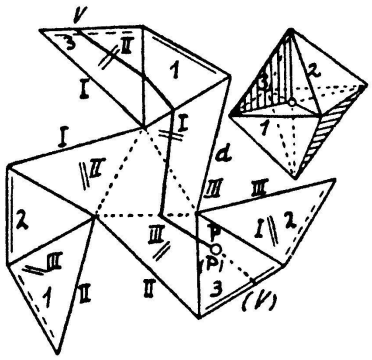

Abb. 1_1

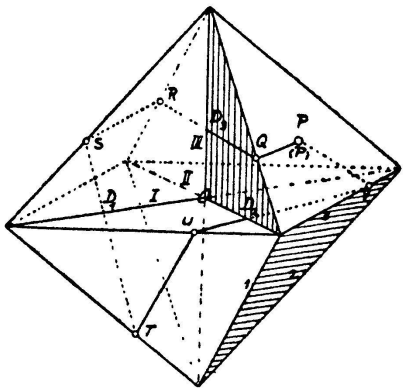

Abb. 1_2

Weg $P\ (P)$ verläuft also durch sechs Flächen, einzig das Dreieck an 2 wird gemieden wie auch die andern Flächenteile dieser Zelle. Gewendet erscheinen an der 3. Zelle eine Fläche, die mit RS und die drei anstoßenden Viertelsflächen der Achsenschnitte und ferner gegenüber an der Lücke der Wendestrecken 1, 2, 3 nochmals drei Viertelsflächen, also sind zusammen gewendet eine Fläche und sechs Viertelsflächen, von den im ganzen 4 Flächen und 12 Viertelsflächen des Heptaeders. Das Wendungsverhältnis nach Flächenzahl ist 5: 14. Fährt man dem Streckenzug 1, 2, 3 der Wendungen nach, so liegen links davon die gewendeten Flächen, an denen außen u erscheint in der Lücke und an deren Gegenzelle, während rechts die Flächen mit o sich zeigen, bis an die Doppelstrecken hin, an denen o ins Innere der Gegenzelle eintritt. Damit ist die Verteilung der Netzseiten am Heptaeder bestimmt aus dem Verlauf der Wendestrecken.

2. *Eine Doppelstrecke* als Wendestrecke entsteht aus dem Netz Abb. 2, das erhalten wird, indem im Netz Abb. 1_1 die Wendestrecke 3 aufgehoben wird durch Ansetzung der zugehörigen Fläche unter Wendung. Dann bilden die Wendestrecken nach Abb. 2 als Viereck einen geschlossenen windschiefen Streckenzug, durch welchen die Endpunkte der im senkrechten Quadrat als Wendestrecke liegenden Doppelstrecke 3, 4 durch 5, 1, 2 verbunden sind. Links dieses Wendestreckenzuges 1 bis 5 liegt o,

wobei bei 3 als Doppelstrecke aber *o* ins Innere der darunter liegenden Zelle kommt. Die Zelle unter 4 zeigt *o*, wie auch die Flächen an 1 und 2 in der Lücke. Damit erscheinen eine Fläche und fünf Viertelsflächen gewendet gegenüber den übrigen Flächen und das Wendungsverhältnis ist 9 : 28. Die Aufklappung vom Netz Abb. 2 erfolgt um die drei inneren punktierten Seiten nach oben, bis die drei Punkte *O* in einen Punkt zusammenfallen, worauf die weiteren Klappungen entgegengesetzt gehen.

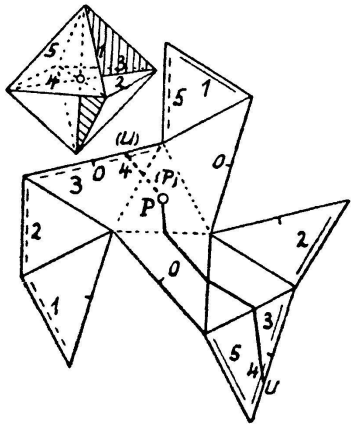

Abb. 2

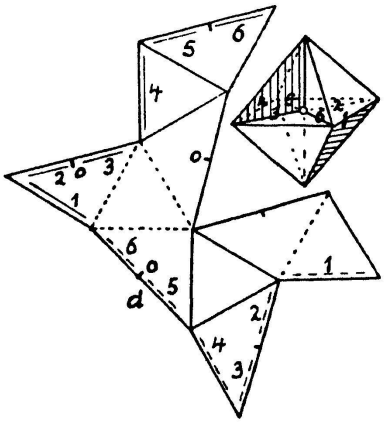

Abb. 3

3. *Zwei Doppelstrecken* als Wendestrecken entstehen aus dem Netz Abb. 3. An 2, 3 wenden sich die beiden Hälften des horizontalen Quadrates und an 5, 6 die eines vertikalen. Die Kanten 1 und 4 schließen den Wendestreckenzug zu einem überschlagenen Viereck mit *O* als Doppelpunkt. Links des Zuges, von außen gesehen, 1 bis 6 liegt *u*, das bei 2 und 5 in die Zellen fällt. Also wird *u* sichtbar an der Fläche über 1 und den beiden anstoßenden Viertelsflächen, ferner an der ganzen Zelle unter 3 und 6 als mit einer Fläche und drei Viertelsflächen und noch an der Viertelsfläche an 4. Damit ist mit zwei Flächen und sechs Viertelsflächen das Heptaeder halb gewendet 1 : 2.

4. *Die drei Doppelstrecken* als Wendestrecken entstehen aus dem Netz Abb. 4, wobei durch die drei Kanten 1, 4, 7 noch als Wendestrecken, drei Dreiecke um *O* entstehen in den drei verschiedenen Achsenschnittebenen oder ein überschlagenes windschiefes Sechseck mit *O* als dreifachem Punkt. Am Streckenzug 1 bis 9 liegt rechts *u*, das bei 3, 6, 9 ins Innere der Zellen fällt; damit erscheint *u* an der ganzen Zelle zwischen 2, 5, 8 und noch an den Viertelsflächen zwischen 2, 1 und 5, 4 und 8, 7, so daß gewendet erscheinen eine Fläche und sechs Viertelsflächen im Verhältnis 5 : 14 wie im 1. Fall.

5. *Zwei Doppelstrecken* werden zu Wendestrecken, nebst zwei Kanten, auch nach Netz Abb. 5, in welchem ein Quadrat ganz gelassen ist, ein

zweites ist halbiert und das dritte muß dann geviertelt werden zu den Dreiecken je mit einer Ecke O. Das Netz wird symmetrisch, aber dabei mit entgegengesetzten Klappungen. Um die punktierten Seiten nach

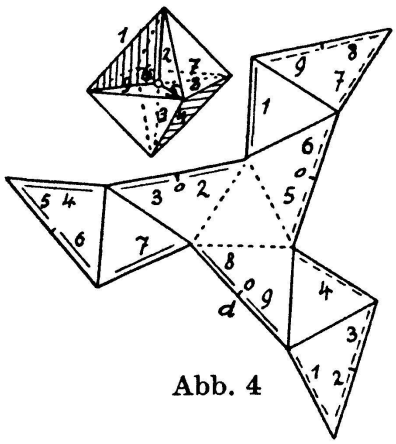

Abb. 4

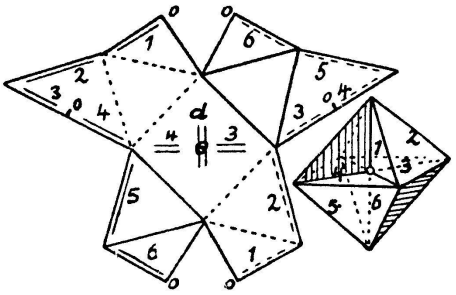

Abb. 5

oben geklappt, entstehen über dem Quadrat zwei Scheitelpyramiden einer Kreuzhaube und ebenso nach unten. Die Verteilung der Netzseiten ist wie im 3. Fall, doch ist die Aufklappung einfacher. Das Heptaeder wird wieder halb gewendet.

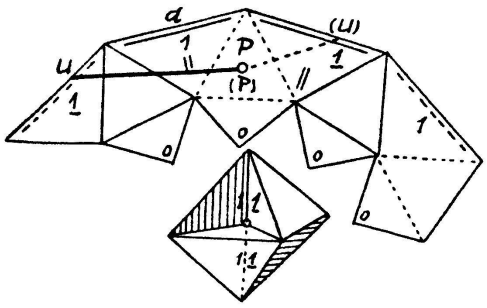

Abb. 6_1

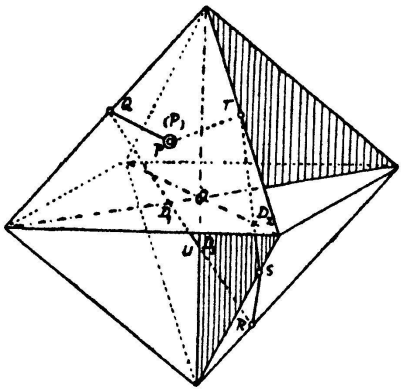

Abb. 6_2

6. *Eine Doppelwendestrecke* entsteht aus dem Netz Abb. 6_1 (S. 25)[1]. Zwei Achsenschnittquadrate sind halbiert, und sie wenden aufgeklappt beide o gegen u in $1 \equiv 1_1$. Das dritte Quadrat ist geviertelt und dessen Dreiecke schließen sich alle gleichseitig nach O. Je zwei Zellen, die an der Doppelwendestrecke zusammenstoßen, zeigen ganz die gleiche Netzseite, das eine Paar zeigt o, das andere u an allen seinen Flächen, womit die einfachste Verteilung der Netzseiten am Heptaeder eintritt und als halbgewendet. In diesem Netz Abb. 6_1 läßt sich ein einfacherer Weg als in Abb. 1_1 einzeichnen, um von einem Punkte P des Heptaeders zu seinem Gegenpunkt (P) zu gelangen. Er ist als PU in o und als $(P)(U)$ in u angenommen, so daß U und (U) durch die Aufklappung in der Doppel-

[1]) *Karl Merz*, Vielflache aus Scheitelzellen und Hohlzellen mit Abbildungen und Netzen. Kommissionsverlag F. Schuler, Chur 1939.

wendestrecke zusammenfallen. Auf dem Heptaeder Abb. 6_2 kommt (P) in u außen auf die 1. Zelle zu liegen, samt dem Weg $(P)\,QD_1$, der dann weiter als D_1D_3 in das Innere der 2. Zelle in u führt, worauf in $D_3 \equiv U$ der Übergang nach o erfolgt, so daß $URSD_2$ außen in o an der 3. Zelle verläuft und dann D_2TP innen in o. Der Weg betritt also, wie der in Abb. 1_2, drei Zellen, aber er geht nur durch vier Flächen: durch zwei Seitenflächen mit P und RS und durch zwei Achsenschnitte QR und ST. Ein solcher Weg durch nur vier Flächen[2]) kann auch aus anderen Netzen erhalten werden, wenn darin mindestens eine Doppelstrecke zugleich Wendestrecke ist, wie z. B. in den Netzen Abb. 2 und 7 eingezeichnet, als PU und $(U)\,(P)$.

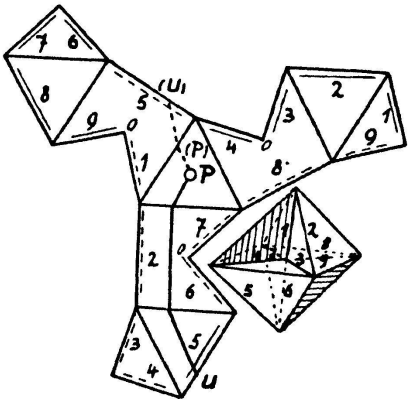

Abb. 7

7. Alle *halben Doppelstrecken* werden zu Wendestrecken aus dem Netz Abb. 7. Aus jedem der drei Achsenschnittquadrate ist ein Viertel längs Doppelstrecken herausgeschnitten. Die Klappungen erfolgen alle nach der gleichen Seite. Die Dreiviertelsquadrate, um die Fläche P geklappt, verschränken sich, wenn die drei O zusammenfallen. Dieses Netz hat noch die besondere Bedeutung, daß es sich für Prismatoide verallgemeinern läßt (S. 91)[1]).

Anmerkung: Das Heptaeder[3]) läßt sich auch verallgemeinern aus dem Netz Abb. 6_1, durch Annahme von $2n$ gleichschenkligen Dreiecken und von n Quadraten durch die Achse als n-fache Wendestrecke und durch Ersetzung des zur Achse senkrechten Quadrates durch ein $2n$-Eck. Es entstehen Polyeder wie Kreisel, die im Grenzfall zu einem gelockerten Doppelkegel führen, und die abwechselnd einseitig oder zweiseitig werden für n gerade oder ungerade.

---

[2]) *Hilbert*, Anschauliche Geometrie, Seite 268. Berlin 1932.

[3]) Commentarii Mathematici Helvetici, Vol. 8, p. 379, 1936.

(Eingegangen den 16. Juni 1940.)