Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 13 (1940-1941)

Artikel: Nouvelle méthode d'édifier la géométrie plane de Bolyai et de Lobatchefski.

Autor: Kerékjártó, B. de

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13547

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 20.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Nouvelle méthode d'édifier la géométrie plane de Bolyai et de Lobatchefski

Par B. de KERÉKJÁRTÓ, Budapest

INTRODUCTION

Dans le présent mémoire, je donne une nouvelle méthode d'édifier la géométrie hyperbolique plane de *Bolyai* et de *Lobatchefski*. Le système d'axiomes que je prends à la base de mon traitement est équivalent à celui adopté par M. *Hilbert* dans son mémoire: „*Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskischen Geometrie*"[1]) sauf que je ne considère pas la notion d'égalité des angles comme notion primaire, mais je la définis au moyen de l'égalité de segments.

Mon traitement du problème diffère essentiellement de celui de M. *Hilbert* et correspond plutôt au programme réalisé par M. *Hessenberg* pour la géométrie elliptique plane[2]). L'avantage de cette méthode consiste en ce qu'elle fait connaître plus profondément les relations mutuelles entre les géométries euclidienne et hyperbolique.

L'idée guide de mon raisonnement est la suivante. Voici le modèle de la géométrie hyperbolique plane dû à *Poincaré*. Nous entendons par plan hyperbolique le demi-plan euclidien déterminé par une ligne droite l; les droites hyperboliques y sont représentées par les demi-droites et demi-circonférences euclidiennes perpendiculaires sur l. La distance hyperbolique de deux points P et Q est le logarithme du rapport anharmonique:

$$(PQQ'P') = \frac{PQ' \cdot QP'}{PP' \cdot QQ'}$$

où P' et Q' désignent les points communs de l avec la circonférence perpendiculaire sur l, passant par les points P et Q ; ou, si P et Q se trouvent sur une droite perpendiculaire sur l, la distance hyperbolique des points P et Q est le logarithme du rapport

$$(PQQ') = \frac{PQ'}{QQ'}$$

où Q' désigne le point commun de cette droite avec l. De cette façon, nous avons obtenu un modèle dont on peut démontrer par le moyen des

---

[1]) *D. Hilbert:* Grundlagen der Geometrie, Leipzig et Berlin (1930), 7me éd. Anhang III.

[2]) *G. Hessenberg:* Begründung der elliptischen Geometrie. Mathem. Annalen, t. 61.

théorèmes élémentaires de la géométrie euclidienne qu'il satisfait aux axiomes de la géométrie hyperbolique.

Ce modèle sert seulement pour vérifier l'existence de la géométrie hyperbolique; il n'est pourtant pas certain que toute géométrie hyperbolique plane, définie par un système d'axiomes, est équivalente à la géométrie réalisée par ce modèle.

Dans le présent mémoire, je donne la réponse affirmative à cette question. A partir de la géométrie hyperbolique plane définie par un système d'axiomes, j'établis un modèle dont je vérifie qu'il est identique à la géométrie euclidienne. Ensuite je montre que dans cette géométrie euclidienne, la géométrie hyperbolique primitive apparaît sous la forme du modèle de *Poincaré.*

Dans le modèle de la géométrie hyperbolique établi dans le demi-plan euclidien, les demi-droites euclidiennes perpendiculaires sur l forment un faisceau (a) de droites hyperboliques parallèles; les droites euclidiennes parallèles à l sont les horocycles du faisceau (a); les demi-droites euclidiennes obliques à l sont les lignes équidistantes des droites hyperboliques (a).

Pour rétablir le plan euclidien à partir du plan hyperbolique, je prends deux copies de celui-ci que je réunis suivant leurs „points à l'infini". Je prends un faisceau (a) de droites hyperboliques parallèles dans l'une des deux copies et le faisceau correspondant $(\bar{a})$ dans l'autre; je considère leurs horocycles et leurs lignes équidistantes. Par le moyen de ces lignes, je définis les droites euclidiennes et je démontre qu'elles satisfont aux axiomes de la géométrie euclidienne, en particulier à l'axiome des parallèles. En introduisant une notion de distance dans la géométrie ainsi établie, je démontre que la géométrie obtenue est la géométrie euclidienne ordinaire.

Mon procédé peut être caractérisé en disant que *c'est le procédé par lequel il faudrait vérifier l'existence de la géométrie euclidienne si la géométrie hyperbolique avait une évidence de telle sorte qu'on attribue à la géométrie euclidienne.*

Par cette méthode, nous obtenons une représentation analytique uniquement déterminée de la géométrie hyperbolique plane, dans un sens similaire à ce que les recherches de M. *Hilbert* sur les fondements de la géométrie euclidienne ont conduit à une représentation analytique uniquement déterminée, à la géométrie analytique de *Descartes.*

*

Dans une conférence faite à l'Université de Genève le 14 mai 1937, dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques,*

j'ai esquissé la méthode que j'expose dans le présent mémoire. Je tiens à remercier l'Université de Genève et le Comité d'organisation des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* de leur invitation et hospitalité. Le présent mémoire a été présenté en deux parties à l'Académie Hongroise des Sciences dans les séances du 11 mai 1936 et 19 février 1940.

§ 1. Le système d'axiomes de la géométrie hyperbolique plane

I. Axiomes d'incidence

1. A toute droite appartiennent deux points, au moins.

2. A deux points appartient une droite et une seule.

3. Il y a trois points n'appartenant pas à une droite.

4. Tous les points appartiennent à un plan.

II. Axiomes d'ordre

1. Si A, B, C sont des points d'une droite, et si B est entre A et C, alors B est entre C et A.

2. Si A, B, C sont des points distincts d'une droite, il y a un et un seul parmi ces trois points qui est entre les deux autres. Si A, B, C sont des points d'une droite dont l'un est entre les deux autres, ces trois points sont distincts.

3. Si A, B sont des points de la droite a, il y a un point D de a tel que B est entre A et D.

4. Si A, B, C sont des points n'appartenant pas à une droite et si a est une droite à laquelle n'appartient aucun des points A, B, C et si la droite a a un point commun avec le segment AB (c'est-à-dire si a a un point commun avec la droite AB qui est entre A et B) alors la droite a a un point en commun ou avec le segment BC ou avec le segment AC.

III. Axiomes d'égalité

1. *Tout segment AB est égal à lui-même: $AB = AB$ et $AB = BA$. Si $AB = A'B'$, alors $A'B' = AB$. Si $AB = A'B'$ et $AB = A''B''$, alors $A'B' = A''B''$.*

2. *Si AB est un segment et si A' est un point de la droite a', il y a de chaque côté de A' un point B' de a' et un seul tel que $AB = A'B'$.*

3. *Si les segments AB et BC de la droite a n'ont pas de point commun, et si les segments $A'B'$ et $B'C'$ de la droite a' n'ont pas de point commun, les égalités $AB = A'B'$ et $BC = B'C'$ entraînent l'égalité $AC = A'C'$.*

4. *Si A, B, C sont des points n'appartenant pas à une droite, et si A', B' sont des points tels que $AB = A'B'$, il y a de chaque côté de la droite $A'B'$ un point C' et un seul pour lequel $AC = A'C'$ et $BC = B'C'$.* (Au lieu des trois égalités ci-dessus, nous écrirons: $ABC \equiv A'B'C'$).

5. *Si A, B, C sont des points n'appartenant pas à une droite, et si P est un point de la droite AB, si ensuite A', B', C', P' sont des points tels que $ABC \equiv A'B'C'$ et $ABP \equiv A'B'P'$,* alors $CP = C'P'$.

Définition. Nous appelons *angle* la figure formée par deux demi-droites a et b issues d'un même point O lesquelles n'appartiennent pas à une même droite; le *sommet* O et les *côtés* a et b de l'angle appartiennent à l'angle. En conséquence des axiomes **I** et **II**, un angle divise le plan en deux portions que nous appelons l'*intérieur* et l'*extérieur* de l'angle. Si A et B sont des points quelconques de a et de b, les points du segment AB appartiennent à l'intérieur de l'angle.

IV. Axiome des parallèles

Si b est une droite et si A est un point n'appartenant pas à b, il y a deux demi-droites a_1 et a_2 issues de A n'appartenant pas à une même droite telles qu'elles n'ont pas de point commun avec b mais toute demi-droite issue de A dans l'intérieur de l'angle $(a_1\, a_2)$ a un point commun avec la droite b.

Définition. Si l'énoncé de cet axiome est vérifié pour la droite b et pour les demi-droites a_1 et a_2, nous disons que les demi-droites a_1 et a_2 sont *parallèles* à la droite b. Soit B un point quelconque de la droite b; désignons par b_1 et b_2 les deux demi-droites de b déterminées par B, de telle façon que a_1 et b_1 se trouvent du même côté de la droite AB. Nous appelons la demi-droite a_1 parallèle à b_1 (et aussi a_2 parallèle à b_2).

Il résulte de la définition que, si la demi-droite a_1 est parallèle à la demi-droite b_1, aussi b_1 est parallèle à a_1; ensuite si chacune des demi-droites a_1 et b_1 est parallèle à la demi-droite c_1, alors a_1 est parallèle à b_1.

Définition. Nous attribuons à chaque demi-droite un *bout* (ou *point à l'infini*); nous disons que deux demi-droites ont le même bout si elles sont parallèles, et alors seulement. Nous obtenons tous les bouts en prenant les bouts des demi-droites issues d'un même point O; il s'ensuit que l'ensemble des bouts admet un ordre cyclique naturel.

Définition. Nous disons que l'angle $\sphericalangle bAc$ formé par les demi-droites Ab et Ac issues du point A, et l'angle $\sphericalangle b'A'c'$ formé par les demi-droites $A'b'$ et $A'c'$ issues de A' sont égaux: $\sphericalangle bAc = \sphericalangle b'A'c'$, si la condition suivante est vérifiée: soient B, C, B', C' des points des

demi-droites b, c, b', c' tels que les segments AB et $A'B'$ sont égaux, et les segments AC et $A'C'$ sont égaux, alors aussi les segments BC et $B'C'$ sont égaux.

Définition. Si les demi-droites Ab et Ab' forment une droite, et si $\sphericalangle bAc = \sphericalangle b'Ac$, nous appelons ces angles: *angles droits*, et nous disons que les demi-droites b et c sont *perpendiculaires*.

Concernant les théorèmes auxiliaires suivants, nous renvoyons le lecteur au mémoire de M. *Hilbert*.

1. Si la droite c forme avec les droites a et b des angles correspondants égaux, alors a et b n'ont pas de point commun et elles ne sont pas parallèles.

2. Si a et b sont des droites non parallèles et sans point commun, il y a une droite c et une seule qui est perpendiculaire sur toutes deux.

3. Si les demi-droites b_1 et b_2 ne sont pas parallèles, il y a une droite et une seule qui est parallèle à b_1 et à b_2; en d'autres mots: deux bouts quelconques peuvent être joints par une droite et une seule.

De cette dernière proposition, on peut déduire facilement la suivante:

4. Si a est une droite et si b_1 est une demi-droite non parallèle à a, il y a une droite et une seule qui est perpendiculaire sur a et parallèle à b_1; en d'autres mots, à partir du bout de b_1, on peut mener une perpendiculaire et une seule sur a.

Soit, en effet, b_1' une demi-droite parallèle à b_1 issue d'un point A de a, et soit a_1 l'une des demi-droites de a déterminées par le point A. Soit b_2' la demi-droite issue de A de l'autre côté de la droite a pour laquelle $\sphericalangle a_1Ab_1' = \sphericalangle a_1Ab_2'$. La droite b qui est parallèle à b_1' et à b_2' est perpendiculaire sur a.

§ 2. Les mouvements et les symétries du plan hyperbolique

A la base des axiomes **I**, **II**, **III**, nous définissons les mouvements et les symétries du plan.

La *symétrie* du plan par rapport à la droite a change tout point P en son symétrique P' par rapport à a, c'est-à-dire en le point P' pour lequel la droite a est perpendiculaire au milieu du segment PP'. Nous appelons la droite a la *médiane* du couple de points P, P'.

Une *translation du plan admettant pour base la droite a* est définie de la façon suivante. A un point A de a nous faisons correspondre un point A' de a; à tout point B de a nous faisons correspondre le point B' de a

pour lequel les segments AA' et BB' sont égaux et de même sens. Si P est un point quelconque du plan, soit B le pied de la perpendiculaire sur a passant par P; soit B' le point de a correspondant à B; soit enfin P' le point de la perpendiculaire sur a passant par B' pour lequel les segments BP et $B'P'$ sont égaux et de même sens par rapport à la droite a (cela veut dire que P et P' se trouvent du même côté de la droite a). Au point P nous faisons correspondre le point P' déterminé uniquement par la prescription ci-dessus.

Définition. Nous entendons par une *ligne équidistante* de la droite a un ensemble de points qui se trouvent du même côté et en distance égale de la droite a. La droite a sera désignée comme *base* de cette ligne équidistante.

Par une translation ayant pour base la droite a, les lignes équidistantes de a se changent en elles-mêmes.

5. *Les translations ayant pour base la droite a forment un groupe commutatif.* Cela signifie que le produit de deux translations ayant pour base la droite a est aussi une translation admettant la même base et, de plus, elle est indépendante de l'ordre dans lequel nous effectuons les deux translations données.

La *demi-rotation* du plan autour du point O fait correspondre à tout point P le point P' pour lequel O est le milieu du segment PP'.

6. *La demi-rotation autour du point O est le produit de deux symétries dont les axes sont des droites perpendiculaires passant par O.*

Il résulte facilement des axiomes I—IV la proposition suivante, en considérant que les mouvements et les symétries du plan changent tout angle en un angle égal et des droites sécantes en des droites sécantes:

7. *Si les demi-droites Aa et Bb sont parallèles, et AB perpendiculaire à b, ensuite si Cc et Dd sont parallèles et CD perpendiculaire à d, l'égalité des segments AB et CD entraîne celle des angles $\sphericalangle aAB$ et $\sphericalangle cCD$, et inversement.*

Définition. Les points A et B des droites a et b seront appelés leurs points *homologues* si les angles intérieurs d'un même côté formés par la droite AB avec les droites a et b sont égaux.

Si les droites a et b n'ont pas de point commun, à tout point A de a correspond un point B de b et un seul qui est son homologue; en particulier si a et b sont parallèles, cette proposition résulte de la proposition 2.

Soit a_1 une demi-droite; désignons son bout par ω. Considérons le faisceau (a) des droites parallèles à a_1. Si a, b, c sont trois droites appar-

tenant à ce faisceau, et si les points B de b et C de c sont les homologues du point A de a, aussi les points B et C sont des points homologues des droites b et c.

Définition. Nous entendons par un *horocycle* du faisceau (a) l'ensemble des points homologues sur les droites du faisceau à un point A de la droite a.

Il résulte de la définition:

8. Un horocycle h du faisceau (a) et une droite a de ce faisceau ont un et un seul point commun.

9. Les translations admettant pour base la droite a changent les droites parallèles à a entre elles et les horocycles de ce faisceau entre eux.

Définition. Nous entendons par *côtés correspondants* des lignes parallèles a et a' le demi-plan déterminé par a et contenant la droite a', et le demi-plan déterminé par a' et ne contenant pas la droite a (ou vice versa).

Définition. Les arcs AA' et BB' d'un même horocycle h sont appelés égaux si les segments AA' et BB' sont égaux. Nous disons que les arcs AA' et BB' de l'horocycle h ont même sens si les points A' et B' se trouvent des côtés correspondants des droites $A\omega$ et $B\omega$, joignant ces points au bout ω.

Nous définissons les *translations du plan suivant les horocycles h* de la façon suivante. Soient A et A' deux points d'un horocycle h; au point A, nous faisons correspondre le point A'. Soit B un autre point quelconque du même horocycle h; nous lui faisons correspondre le point B' de h pour lequel les arcs AA' et BB' de h sont égaux et de même sens. Soit ensuite P un point quelconque du plan; désignons par B le point commun de la droite $P\omega$ avec l'horocycle h, et par B' le point lui correspondant; soit P' le point commun de la droite $B'\omega$ avec l'horocycle h' passant par P; au point P, nous faisons correspondre le point P' déterminé ainsi.

10. Les translations du plan suivant les horocycles h changent tout segment en un segment égal; elles transforment tout horocycle h en lui-même et les droites du faisceau (a) entre elles. Les translations suivent les horocycles h forment un groupe commutatif.

Nous allons démontrer la proposition suivante:

11. Tout mouvement du plan hyperbolique, c'est-à-dire toute transformation conservant le sens d'orientation et conservant les distances hyperboliques peut être composé des mouvements suivants:

a) la demi-rotation autour d'un point O du plan;
b) les translations admettant pour base une droite ayant le bout ω;
c) les translations suivants les horocycles h du faisceau des droites a ayant le bout ω.

Soient en effet AB et $A'B'$ deux segments égaux quelconques; il y a un mouvement et un seul qui change A en A' et B en B'. Supposons que A' et B' se trouvent sur la droite $O\omega$ et que ω soit le bout de la demi-

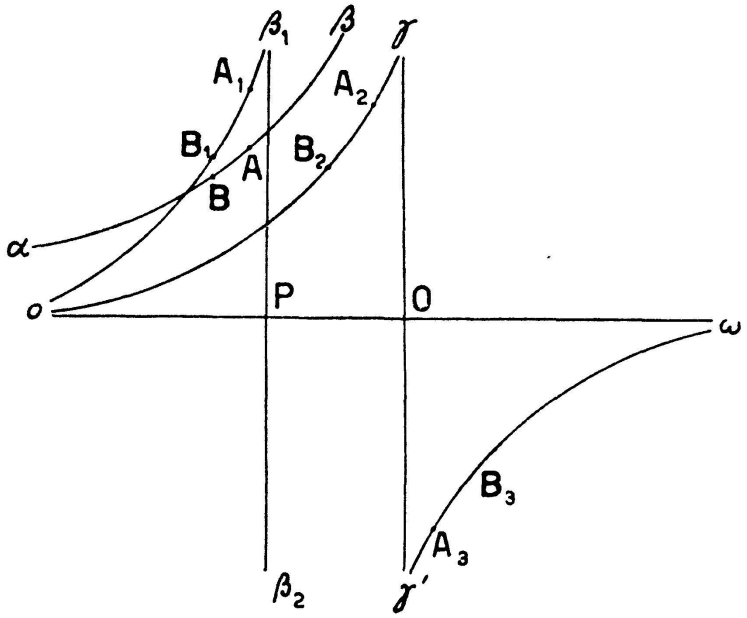

Fig. 1

droite $A'B'$; désignons par o l'autre bout de la droite $O\omega$ (Fig. 1). Désignons par α et β les bouts de la droite AB de telle façon que leur ordre soit $\beta AB\alpha$ (c'est-à-dire que α soit le bout de la demi-droite AB, et β celui de BA). Par une translation suivant les horocycles h, nous transformons la droite $\alpha\omega$ en $o\omega$; au segment AB correspond par cette translation un segment A_1B_1 égal à AB. Désignons par β_1 le bout de la demi-droite B_1A_1; à partir du bout β_1, nous menons la perpendiculaire sur la droite $o\omega$; désignons par P son pied, et par β_2 son autre bout. Désignons ensuite par γ et γ' les bouts de la perpendiculaire sur $o\omega$ menée par le point O, de telle façon que β_1 et γ se trouvent d'un même côté de la droite $o\omega$. Par une translation ayant pour base la droite $o\omega$, nous changeons le point P en O; cette translation change β_1 en γ, β_2 en γ', et l'image du segment A_1B_1 sera un segment A_2B_2 situé sur la droite $o\gamma$. La demi-rotation autour de O échange o et ω, d'une part, γ et γ', d'autre part, entre eux; au segment A_2B_2 correspond un segment A_3B_3 situé sur la droite $\gamma'\omega$ et leur ordre est $\gamma' A_3 B_3 \omega$. Par une translation suivant les

horocycles h, nous changeons $\gamma' \omega$ en $o\omega$; l'image obtenue de A_3B_3 est un segment A_4B_4 de $o\omega$; enfin, par une translation ayant pour base la droite $o\omega$, nous changeons le point A_4 en A'; comme $A_4B_4 = A'B'$, et en conséquence de l'ordre $oA'B'\omega$, et $oA_4B_4\omega$, il résulte que cette même translation change B_4 en B'. Cela prouve la proposition 11.

§ 3. Définition des lignes du modèle euclidien

A partir des éléments de la géométrie hyperbolique plane, nous définissons un *modèle* (ou une *pseudo-géométrie*) de la façon suivante.

Nous prenons deux copies H et $\overline{H}$ du plan hyperbolique. Tout point appartenant soit à H soit à $\overline{H}$ est un point du *pseudo-plan*. Soit ω un bout quelconque de H, et soit $\overline{\omega}$ le bout correspondant de $\overline{H}$; en omettant les bouts ω et $\overline{\omega}$, nous réunissons H et $\overline{H}$ suivant leurs autres bouts. Soient donc α et $\overline{\alpha}$ des bouts correspondants de H et de $\overline{H}$, différents de ω et de $\overline{\omega}$; nous considérons α et $\overline{\alpha}$ comme un même point du pseudo-plan. Les points du pseudo-plan engendrés par les bouts de H et de $\overline{H}$ forment une „*droite horizontale*" l_ω du pseudo-plan, par définition. Un point quelconque P de H et le point $\overline{P}$ lui correspondant de $\overline{H}$ seront appelés *points symétriques par rapport à* l_ω du pseudo-plan.

Désignons par (a) et par $(\overline{a})$ les faisceaux de droites dans H et dans $\overline{H}$ ayant les bouts ω et $\overline{\omega}$, respectivement. Tout horocycle h du faisceau (a) et tout horocycle $\overline{h}$ du faisceau $(\overline{a})$ forme une „*droite horizontale*" du pseudo-plan.

Une droite a et la droite correspondante $\overline{a}$ forment ensemble avec leurs bouts unis $\alpha = \overline{\alpha}$ une „*droite verticale*" du pseudoplan. Le point α se trouve entre les points de a et ceux de $\overline{a}$.

Soient e_1 et e_2 deux lignes équidistantes de a symétriques par rapport à a; soient $\overline{a}$, $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ les lignes de $\overline{H}$ leur correspondant. Les lignes e_1 et $\overline{e}_2$, ensemble avec le bout $\alpha = \overline{\alpha}$ de a forment une droite oblique du pseudoplan. Le point α se trouve entre les points de e_1 et ceux de $\overline{e}_2$.

Pour éviter toute confusion, nous appellerons les droites du pseudoplan: *lignes*; les droites hyperboliques seront appelés *droites*.

Nous allons démontrer que le système des lignes du pseudo-plan vérifie les axiomes des groupes ***I*** et ***II*** *et encore l'axiome d'Euclide sur les parallèles.*

Les axiomes **1**, **3** et **4** du groupe **I** résultent immédiatement à partir des axiomes respectifs de la géométrie hyperbolique plane. Dans ce groupe, c'est l'axiome **I. 2** seul qu'il faut vérifier; à cela sert le raisonnement suivant.

12. Si A et B sont deux points du plan hyperbolique H qui n'appartien-

nent ni à une droite du faisceau (a) *ni à un horocycle de ce faisceau, il existe une droite* a *de ce faisceau dont une ligne équidistante contient les points* A *et* B.

Soit en effet k la médiane du couple de points A, B, et soit a la perpendiculaire sur k menée du bout ω. La symétrie par rapport à la droite k change les points A et B entre eux, et la droite a en elle-même; par conséquent, les points A et B se trouvent d'un même côté de a et en distances égales.

13. Si A *et* B *sont deux points du plan hyperbolique* H *qui n'appartiennent pas à une droite du faisceau* (a), *il y a une droite* a *de ce faisceau telle que les points* A *et* B *se trouvent des côtés différents et en distances égales de cette droite.* Menons en effet la droite a du faisceau (a) par le milieu du segment AB.

Il résulte de là que si A et $\overline{B}$ sont des points de H et de $\overline{H}$ qui n'appartiennent pas à une ligne verticale, il y a une ligne oblique $e_1 + \bar{e}_2$ qui les contient.

Si α est un bout, un point quelconque A de H appartient ou à la droite $a = \alpha\omega$, et à la ligne verticale $a + \bar{a}$, ou à la ligne équidistante e_1 de $\alpha\omega$ passant par A, et à la ligne oblique $e_1 + \bar{e}_2$. Deux bouts quelconques α et β appartiennent à la ligne horizontale l_ω. Par suite:

14. Deux points quelconques du pseudo-plan appartiennent à une ligne, au moins, du pseudo-plan.

Deux horocycles quelconques h et h' du faisceau (a) n'ont aucun point commun; un horocycle h a un seul point en commun avec une droite a quelconque du faisceau (a); deux droites a et a' de ce faisceau n'ont ni un point, ni un bout, différent de ω, en commun. Par suite:

15. Deux lignes horizontales, ou deux lignes verticales du pseudo-plan n'ont aucun point commun. Toute ligne horizontale a avec toute ligne verticale un point commun et un seul.

16. Tout horocycle h *a avec toute ligne équidistante* e *d'une droite* a *quelconque du faisceau* (a) *un point commun et un seul.*

Soit en effet h' un horocycle passant par un point B' de la ligne équidistante e, et soit A' le point commun de h' avec la base a de e (Fig. 2). Par une translation admettant pour base la droite a, nous changeons le point A' en le point commun A de a avec l'horocycle h; l'horocycle h' sera changé en h, et la ligne équidistante e en elle-même; par conséquent, au point B' correspond un point commun B de h et de e. Si B_1 était un autre point commun de h et de e, désignons par C et par C_1 les pieds des perpendiculaires sur a passant par B et par B_1; la translation ayant pour base la droite a qui change C en C_1 transforme B en B_1, et, par suite, l'horocycle

h en lui-même; le point commun A de cet horocycle h avec la droite A reste donc invariant par la translation en question; celle-ci doit être l'identité, d'où il résulte que B_1 est identique à B.

17. Soient a et a' deux droites quelconques du faisceau (a), et soit e' une ligne équidistante de a' telle que a et e' se trouvent d'un même côté de a'; a et e' ont un point commun et un seul.

A partir d'un point A de a menons la perpendiculaire sur a'; soit B son pied. Soit D le point de la demi-droite BA pour lequel la distance BD est égale à la distance (a', e') (voir fig. 3). Désignons par b la droite pas-

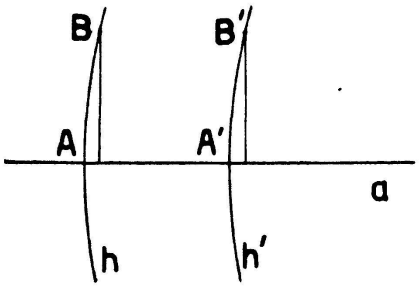

Fig. 2

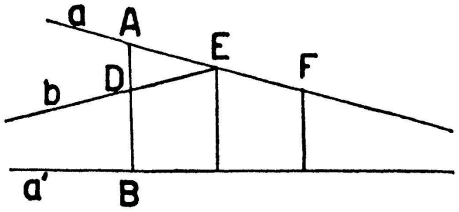

Fig. 3

sant par D qui a en commun avec a' son bout différent de ω. Les droites a et b ont un point E en commun; on peut le vérifier facilement à la base des axiomes **II. 4** et **IV**. Soit F le point de la droite a tel que les segments DE et EF soient égaux et que A et F soient séparés sur a par le point E. Menons la perpendiculaire sur a' par le point E; la symétrie par rapport à cette droite transforme la droite a' en elle-même et échange les points D et F entre eux; par suite, D et F ont la même distance à la droite a'. Le point F de a appartient donc à la ligne équidistante e' de a'. Si F' était un autre point commun de a et de e', soient G et G' les pieds des perpendiculaires sur a' menées par F et par F', et soit k la médiane du couple de points G, G'; la symétrie par rapport à k échange entre eux les points F et F', elle transforme par conséquent la droite a en elle-même; la droite k serait alors une perpendiculaire commune des droites parallèles a et a', ce qui est contradictoire à la proposition 1.

18. Soient a et a' deux droites quelconques du faisceau (a), et soient e et e' des lignes équidistantes de a et de a', respectivement; les lignes e et e' ont au plus un point commun.

En supposant le contraire, soient C et D deux points communs de e et de e'. Désignons par A, A' et par B, B' les pieds des perpendiculaires sur a et sur a' menées par C et par D, respectivement (fig. 4). On a les égalités $CA = DB$ et $CA' = DB'$; C et D se trouvent d'un même côté de chacune des droites a et a'. Joignons les points C et D au bout ω; il

résulte de l'égalité $AC = BD$, d'après la proposition 7, que $\sphericalangle AC\omega = \sphericalangle BD\omega$, et similairement, l'égalité $A'C = B'D$ entraîne l'égalité $\sphericalangle A'C\omega = \sphericalangle B'D\omega$. En faisant les sommes à gauche et à droite dans les égalités déduites, nous obtenons l'égalité suivante: $\sphericalangle A'CA = \sphericalangle B'DB$. La dernière égalité jointe aux égalités ci-dessus: $AC = BD$ et $A'C = B'D$ entraîne les suivantes: $AA' = BB'$ et $\sphericalangle A'A\omega = \sphericalangle B'B\omega$. Il résulte de là que les points A' et B' de a' ont la même distance à la droite a; c'est une contradiction, en vertu de la proposition 17.

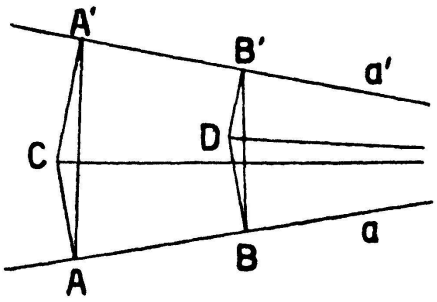

Fig. 4

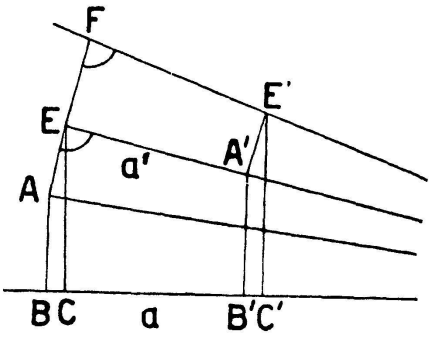

Fig. 5

19. Soient a et a' deux droites du faisceau (a), et soient e_1, e_2 et e_1', e_2' des lignes équidistantes symétriques de a et de a', respectivement. Supposons que a' et e_1 se trouvent d'un même côté de a, et que e_1 et e_1' se trouvent des côtés correspondants de a et de a'. Si la distance (a, e_1) est plus grande que la distance (a', e_1'), les lignes e_1 et e_1' ont un point commun; les lignes e_2 et e_2' n'ont aucun point commun.

En vertu de la proposition 17, il existe un point commun E de a' avec e_1. Soit C le pied de la perpendiculaire sur a passant par E (fig. 5). La perpendiculaire sur a' passant par E a un point F en commun avec la ligne e_1'. Soit c la demi-droite issue de E telle que $\sphericalangle \omega Ec = \sphericalangle \omega FE$ et que c et e_1' se trouvent des côtés différents de a'; soit A le point de c pour lequel $FE = EA$. Il résulte de la condition $(a, e_1) > (a', e_1')$ que $EC > EA$, par conséquent, les points A et E se trouvent d'un même côté de la droite a. La ligne équidistante de a passant par A a donc un point A' sur la droite a'. Désignons par B le pied de la perpendiculaire sur a menée par A. Par une translation ayant pour base la droite a, nous changeons le point A en A'; désignons les images des points B, C, E, obtenues par cette translation, par B', C', E'. Les droites $A'B'$ et $E'C'$ sont perpendiculaires sur a, et on a les égalités suivantes: $EC = E'C'$, $AE = A'E'$, $\sphericalangle \omega EA = \sphericalangle \omega E'A'$. L'égalité $EC = E'C'$ signifie que *le point E' appartient à la ligne équidistante e_1 de a.* Des égalités $AE = A'E'$ et $\sphericalangle \omega EA = \sphericalangle \omega E'A'$ on conclut, d'après la proposition 7, que $E'A'$ est perpendicu-

laire sur la droite $A'\omega = a'$. Comme $AE = EF = A'E'$, il résulte donc que *E' appartient aussi à la ligne équidistante e_1' de a'.*

Si les lignes équidistantes e_2 et e_2' avaient un point commun E'', le milieu des points E' et E'', situés des côtés différents de a et en distances égales à a, appartiendrait à la droite a, et, pour la même raison, aussi à la droite a'; mais les lignes parallèles a et a' n'ont aucun point commun. Par suite, e_2 et e_2' n'ont pas de point commun.

20. Soient a et a' deux droites du faisceau (a), et soient e_1, e_2 et e_1', e_2' des lignes équidistantes symétriques de a et de a', respectivement. Supposons (comme dans la proposition 19) que a' et e_1 se trouvent d'un même côté de a, et que e_1 et e_1' se trouvent des côtés correspondants de a et de a'. e_1 et e_2' ont un point commun, e_2 et e_1' n'ont pas de point commun.

Les lignes e_2 et e_1' se trouvent des côtés différents de la droite a, d'où la deuxième proposition ci-dessus. Pour vérifier la première, désignons par E le point commun de e_1 et de a', et par E_2 celui de e_2' et de a (leur existence découle de la proposition 17). Nous menons la perpendiculaire sur a passant par E, désignons son pied par A, et la perpendiculaire sur a'

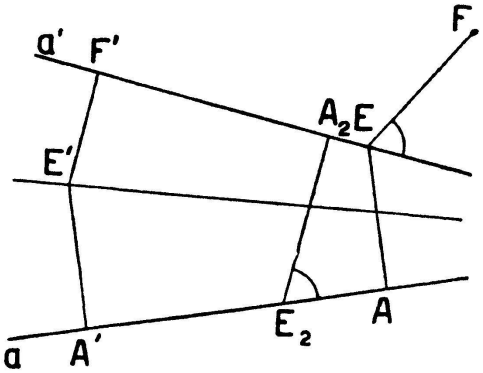

Fig. 6

passant par E_2 dont le pied soit A_2 (fig. 6). Soit c la demi-droite issue de E pour lequel $\sphericalangle \omega E c = \sphericalangle \omega E_2 A_2$ et qui se trouve de l'autre côté de a' que le point E_2; désignons par F le point de c pour lequel $EF = A_2E_2$. La ligne équidistante de a passant par F a un point F' en commun avec a'. La translation ayant pour base la droite a, qui change F en F', transforme E en un point E' dont on peut vérifier par les raisonnements employés pour la démonstration de la proposition 19 qu'il est un point commun des lignes e_1 et e_2'.

Des propositions 18, 19, 20 découle que *deux lignes obliques quelconques du pseudo-plan ont au plus un point commun ;* en vertu des propositions 16 et 17 toute ligne oblique rencontre une ligne horizontale ou verticale quelconque en un seul point, et d'après 15 une ligne verticale et une ligne horizontale quelconques ont un seul point commun. Ce résultat ensemble

avec la proposition 14 fournit l'axiome **I.2** relatif au pseudo-plan que voici:

21. Deux points quelconques du pseudo-plan appartiennent à une ligne et à une seule.

*

Concernant les axiomes du groupe **II** nous faisons les observations suivantes.

Des axiomes **II. 1, 2, 3** relatifs au plan hyperbolique découle immédiatement la validité des mêmes axiomes pour le pseudo-plan, en tenant compte des définitions données ci-dessus. L'axiome **II. 4** relatif au plan hyperbolique fournit le théorème que le plan hyperbolique est divisé en deux parties par une droite hyperbolique quelconque, et, en particulier aussi par une droite quelconque a du faiseau (a); si A et B sont des points appartenants aux deux parties différentes, le segment AB de la droite hyperbolique AB a un point commun avec la droite a. Si les points A et B appartiennent à un horocycle h du faisceau (a), il résulte de la proposition 15 que h et a ont un point commun, lequel appartient à l'arc AB de l'horocycle. Similairement, si A et B appartiennent à une ligne équidistante e' d'une droite a' du faisceau (a), d'après 17 e' et a ont un point commun, et ce point appartient au segment AB de e'. En résumé, toute ligne verticale divise le pseudo-plan en deux parties.

Par des raisonnements similaires, on déduit des propositions 15—20 la propriété analogue relative aux lignes horizontales et obliques; par cela, on aboutit au résultat suivant qui est équivalent à l'axiome **II. 4**:

Le pseudo-plan est divisé en deux parties par une ligne l quelconque; si A et B sont deux points appartenant à la même partie, le segment AB de la ligne AB n'a aucun point en commun avec la ligne l; si A et B appartiennent à des parties différentes, le segment AB a un point en commun avec la ligne l.

§ 4. Les lignes parallèles et les perpendiculaires du pseudo-plan

22. Si a et a' sont deux droites du faisceau (a) et leurs lignes équidistantes e_1 et e_1' se trouvent des côtés correspondants de a et de a', et si les distances (a, e_1) et (a', e_1') sont égales, e_1 et e_1' n'ont aucun point commun.

Si P était un point commun de e_1 et de e_1', les droites a et a' se trouveraient d'un même côté de la droite $P\omega$; en désignant par Q et Q' les pieds des perpendiculaires sur a et sur a' menées par P, il résulterait $PQ = PQ'$, et donc, d'après la proposition 7, $\sphericalangle\, \omega PQ = \sphericalangle\, \omega PQ'$; cette égalité involverait que les demi-droites PQ et PQ' coïncident, et comme

$PQ = PQ'$, de même les points Q et Q'; les droites a et a' perpendiculaires sur PQ et passant par le point Q seraient donc identiques, contrairement à nos hypothèses.

Définition. Nous appellerons deux lignes du pseudo-plan *parallèles* si elles n'ont aucun point commun. Des propositions 15—22 on conclut immédiatement que deux lignes parallèles quelconques sont ou bien horizontales ou verticales, ou bien elles sont des lignes obliques $e_1 + \bar{e}_2$ et $e_1' + \bar{e}_2'$ telles que e_1 et e_1' se trouvent des côtés correspondants de leurs bases et en distances égales à elles.

Le système des lignes du pseudo-plan vérifie *l'axiome d'EUCLIDE sur les parallèles :*

23. A une ligne quelconque l et à un point P arbitraire correspond une ligne l' et une seule parallèle à l et passant par P.

Si la ligne l est horizontale ou verticale, la proposition est une conséquence immédiate des définitions. Soit $l = e_1 + \bar{e}_2$ une ligne oblique, et soit P un point du plan hyperbolique H. Désignons par E et par A les points communs de l'horocycle h passant par P avec la ligne e_1 et avec la base a de e_1, respectivement. Soit A' le point de h pour lequel les arcs AE et $A'P$ de l'horocycle h sont égaux et de même sens. Soit e_1' la ligne équidistante passant par P de la droite $a' = A'\omega$, désignons par e_2' son symétrique par rapport à a', et par $\bar{e}_2'$ la symétrique de e_2' par rapport à l_ω. La ligne oblique $e_1' + \bar{e}_2'$ est parallèle à la ligne $e_1 + \bar{e}_2$, d'après la proposition 22.

Définition. Nous appelons les droites a du faisceau (a) et leurs horocycles h *perpendiculaires*. Nous appelons les lignes équidistantes e et e' des droites a et a' *perpendiculaires* si la droite hyperbolique $\alpha\alpha'$ joignant les bouts α et α'' de a et de a', différents de ω, passe par le point commun de e et de e'.

Conformément à cette définition, nous appellerons deux lignes du pseudo-plan perpendiculaires, si l'une d'elles est horizontale et l'autre verticale, ou si elles sont obliques et leurs parties appartenant à H ou à $\bar{H}$ sont perpendiculaires.

24. Si la ligne l est perpendiculaire sur les lignes l' et l'', l' et l'' sont parallèles. Inversement, si l' et l'' sont parallèles et si l est perpendiculaire sur l', elle est perpendiculaire sur l''.

Si ces lignes sont horizontales ou verticales, notre proposition est évidente. Si les lignes l, l', l'' sont engendrées par les lignes équidistantes e, e', e'' des droites a, a', a'' (appartenant au faisceau (a)), désignons par A et par B le point commun de e avec les lignes e' et e'', respectivement.

Menons les perpendiculaires sur a et a', et sur a et a'', à partir des points A et B, et désignons leurs pieds par A', A'', B', B''; soient α, α', α'' les bouts différents de ω des droites a, a', a'' (fig. 7). En conséquence de la perpendicularité de e sur e' et e'', il résulte de notre définition que A appartient à la droite $\alpha\alpha'$ et B appartient à la droite $\alpha\alpha''$. Comme A et B appartiennent à la ligne équidistante e de a, il s'ensuit $AA' = BB'$; d'après la proposition 7, cette égalité entraîne l'égalité des angles $\sphericalangle \alpha A \omega = \sphericalangle \alpha B \omega$; les angles complémentaires sont: $\sphericalangle \omega A \alpha' = \sphericalangle \omega B \alpha''$; d'après 7, il résulte de cette dernière égalité que $AA'' = BB''$, c'est-à-dire que $(a', e') = (a'', e'')$. Comme e' et e'' se trouvent des côtés correspondants de a' et de a'', nous concluons d'après la proposition 22 que e' est parallèle à e''. La deuxième partie de la proposition s'obtient par un raisonnement tout à fait analogue.

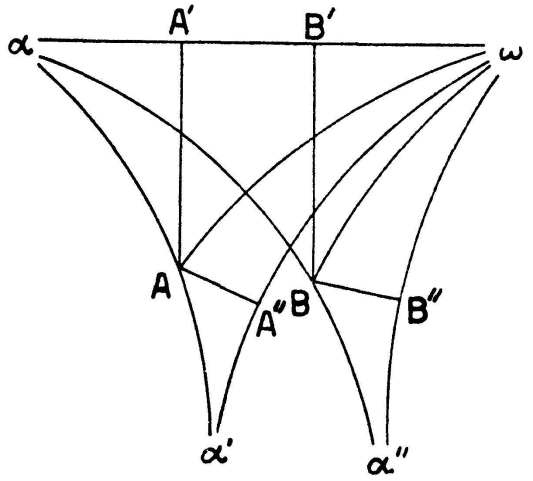

Fig. 7

A la base de la proposition que nous venons de démontrer, nous étendons la notion de perpendicularité au cas de deux lignes équidistantes e et e' d'une même droite a. Soit a'' une droite différente de a, et soit e'' la ligne équidistante de a'' telle que e et e'' se trouvent des côtés correspondants de a et de a'' et en distances égales à ces droites. Si les lignes e' et e'' sont perpendiculaires, nous appelons aussi les lignes e et e' perpendiculaires.

§ 5. Définition d'égalité de segments dans le pseudo-plan

a) Egalité de deux arcs d'horocycle. Egalité de deux segments de l_ω.

Soient α, β, γ, δ des bouts différents de ω, et soient A, B, C, D les points communs d'un horocycle h avec les droites $\alpha\omega$, $\beta\omega$, $\gamma\omega$, $\delta\omega$. Si les segments de droites hyperboliques AB et CD sont égaux, nous disons

que les pseudo-distances $[AB]$ et $[CD]$ sont égales, et de même que les pseudo-distances $[\alpha\beta]$ et $[\gamma\delta]$ sont égales (fig. 8).

b) Egalité d'un arc d'horocycle et d'un segment de l_ω.

Si A et B sont les points communs de l'horocycle h avec les droites $\alpha\omega$ et $\beta\omega$ (fig. 8), nous disons que les pseudo-distances $[AB]$ et $[\alpha\beta]$ sont égales.

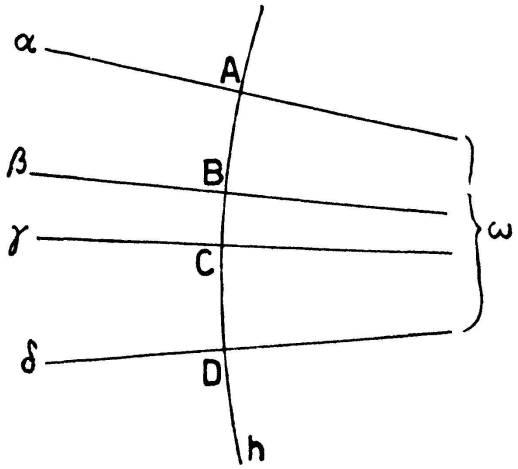

Fig. 8

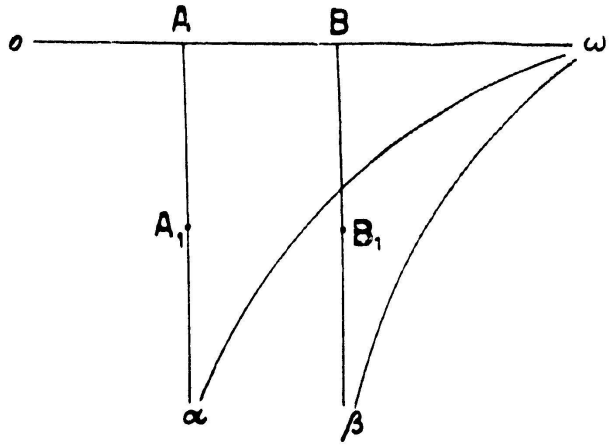

Fig. 9

c) Egalité d'un segment de droite et d'un segment de l_ω.

Soient A et B deux points de la droite $o\omega$, et soient $A\alpha$ et $B\beta$ des demi-droites perpendiculaires sur $o\omega$ d'un même côté de la droite $o\omega$; nous disons que les pseudo-distances $[oA]$ et $[o\alpha]$ sont égales, de même que les pseudo-distances $[AB]$ et $[\alpha\beta]$ (fig. 9).

d) Egalité d'un segment de ligne équidistante et d'un segment de l_ω.

Soient A_1 et B_1 deux points d'une ligne équidistante e de la droite $o\omega$, et soient α, β les bouts des perpendiculaires sur $o\omega$ menées par A_1 et par B_1 lesquels se trouvent d'un même côté de $o\omega$; nous posons alors $[oA_1] = [o\alpha]$ et $[A_1B_1] = [\alpha\beta]$ (fig. 9).

e) Pseudo-distance des points de H et de $\overline{H}$.

Si A est un point de H et $\overline{B}$ un point de $\overline{H}$, désignons par l la ligne du pseudo-plan déterminé par ces deux points (21). Désignons par γ le point commun de l avec l_ω; soient ensuite α et β deux points de l_ω séparés par γ tels que, d'après c) et d), on ait: $[\alpha\gamma] = [A\gamma]$ et $[\gamma\beta] = [\gamma\overline{B}]$; nous disons alors que les pseudo-distances $[AB]$ et $[\alpha\beta]$ sont égales.

f) Egalité de deux segments du pseudo-plan.

Soient A, B, C, D des points quelconques du pseudo-plan, et soient α, β, γ, δ des points de la ligne l_ω tels que, d'après b) — e), on ait:

$[AB] = [\alpha\beta]$ et $[CD] = [\gamma\delta]$. Si d'après a) $[\alpha\beta] = [\gamma\delta]$, nous appelons les pseudo-distances $[AB]$ et $[CD]$ égales.

Il résulte immédiatement de la définition de pseudo-distance qu'elle satisfait aux axiomes **III. 1, 2, 3** (voir § 1).

§ 6. Les translations horizontales du pseudo-plan

Une translation du plan hyperbolique H suivant les horocycles h (définie dans le § 2), et la translation correspondante du plan hyperbolique $\overline{H}$ définissent ensemble une transformation du pseudo-plan en lui-même que nous appellerons *translation horizontale.*

Une translation du plan hyperbolique suivant les horocycles h conserve les distances hyperboliques, c'est-à-dire qu'elle transforme tout couple de points A, B en un couple A', B' tel que les distances hyperboliques AB et $A'B'$ sont égales (voir § 2). Nous allons démontrer que *les translations horizontales du pseudo-plan conservent les pseudo-distances.*

Si A et B sont deux points d'un horocycle h, leurs images A', B' obtenues par une translation horizontale appartiennent à ce même horocycle h, et comme les distances hyperboliques AB et $A'B'$ sont égales, il résulte de la définition § 5, a) que $[AB] = [A'B']$. Désignons par $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ les autres bouts des droites ωA, ωB, $\omega A'$, $\omega B'$; on a aussi $[\alpha\beta] = [\alpha'\beta']$ (§ 5, a).

Soient alors A, B deux points de la droite hyperbolique $o\omega$; désignons par α, β les bouts des demi-droites perpendiculaires sur $o\omega$ issues de A et de B vers le même côté de la droite $o\omega$. Soient ensuite A', B' les images des points A et B obtenues par une translation horizontale. La droite hyperbolique AB est changée par cette translation en la droite $A'B'$, et l'image du bout o est le bout o' de la droite $A'B'$ différent de ω. Les perpendiculaires $A\alpha$ et $B\beta$ sur $o\omega$ sont changées en les demi-droites $A'\alpha'$ et $B'\beta'$ qui sont perpendiculaires sur $o'\omega$; comme on a $[\alpha\beta] = [\alpha'\beta']$, et d'après § 5 c), $[AB] = [\alpha\beta]$, $[A'B'] = [\alpha'\beta']$, il résulte d'après § 5 f) que $[AB] = [A'B']$.

Soit e une ligne équidistante de la droite $o\omega$; désignons par A_1, B_1 les points de rencontre de e avec les droites $A\alpha$ et $B\beta$; les images de ces points obtenues par la translation sont les points de rencontre A_1', B_1' de la ligne équidistante e' de $o'\omega$ avec les droites $A'\alpha'$, $B'\beta'$. De l'égalité $A_1A = A_1'A'$ il résulte que les lignes équidistantes e et e' sont parallèles (§ 4). Ensuite, d'après § 5 d), on a les égalités $[A_1B_1] = [\alpha\beta]$, $[A_1'B_1'] = [\alpha'\beta']$, et comme $[\alpha\beta] = [\alpha'\beta']$, par suite $[A_1B_1] = [A_1'B_1']$.

Ce que nous venons de démontrer signifie que *les translations horizon-*

tales du pseudo-plan conservent à la fois les distances hyperboliques et les pseudo-distances.

Les translations du plan hyperbolique suivant les horocycles h forment un groupe commutatif (§ 2); le même est donc valable concernant les translations horizontales du pseudo-plan. Nous résumons notre résultat dans la proposition suivante:

25. Les translations horizontales du pseudo-plan conservent les pseudo-distances et changent toute ligne du pseudo-plan en une ligne parallèle. Les translations horizontales forment un groupe commutatif.

§ 7. Théorème de PAPPUS. Proportionnalité de segments

26. Soient $o, \alpha', \beta', \gamma'$ des bouts différents de ω, dans cet ordre, et soient A, B, C des points de la droite $o\omega$ dans l'ordre $oABC\omega$, tels que

$$[o\alpha'] = [\beta'\gamma'] \quad \text{et} \quad [oA] = [BC] .$$

Si les lignes équidistantes $\alpha'A$ et $\beta'B$ sont parallèles, les lignes équidistantes $\alpha'A$ et $\gamma'C$ sont aussi parallèles. Inversement, si les lignes équidistantes $\alpha'A$, $\beta'B$, $\gamma'C$ sont parallèles et si $[o\alpha'] = [\beta'\gamma']$, on a aussi l'égalité $[oA] = [BC]$.

Dans la fig. 10, la figure à gauche est relative au pseudo-plan euclidien, celle à droite au plan hyperbolique.

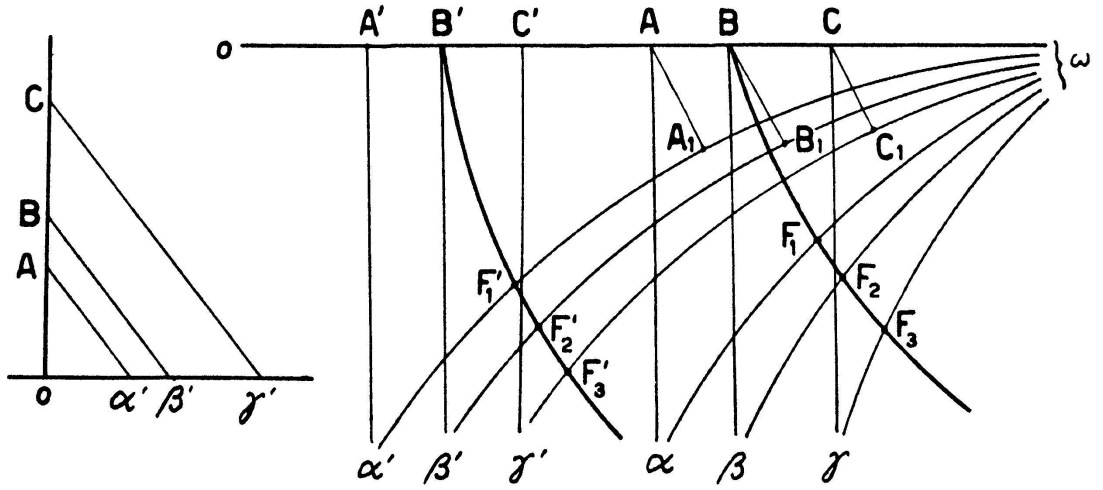

Fig. 10

Nous menons les perpendiculaires sur la droite $o\omega$ à partir des bouts α', β', γ', et désignons leurs pieds par A', B', C'. L'horocycle h' passant par le point B' rencontre les droites $\alpha'\omega$, $\beta'\omega$, $\gamma'\omega$ dans les points F_1', F_2', F_3', respectivement. Comme $[o\alpha'] = [\beta'\gamma']$, on a d'après les définitions du § 5

$$B'F_1' = F_2'F_3' .$$

Nous menons les demi-droites perpendiculaires sur la droite $o\omega$ à partir des points A, B, C vers le côté de $o\omega$ qui contient les bouts α', β', γ'; les bouts de ces demi-droites désignons nous par α, β, γ. L'horocycle h passant par le point B rencontre les droites $\alpha\omega$, $\beta\omega$, $\gamma\omega$ aux points F_1, F_2, F_3, respectivement. Comme $[oA] = [BC]$, on a d'après les définitions les égalités suivantes:

$$[o\alpha] = [\beta\gamma] \quad \text{et} \quad BF_1 = F_2F_3 .$$

Soit A_1 le pied de la perpendiculaire sur $\alpha'\omega$ menée de A, et similairement soient B_1 et C_1 les pieds des perpendiculaires sur $\beta'\omega$ et sur $\gamma'\omega$ menées de B et de C. Comme nous avons supposé que la ligne équidistante $\alpha'A$ de la droite $\alpha'\omega$ passant par A est parallèle à la ligne équidistante $\beta'B$ de la droite $\beta'\omega$ passant par B, il résulte de la définition du § 4 que

$$AA_1 = BB_1 .$$

Il faut démontrer que

$$AA_1 = CC_1 .$$

Par une translation ayant pour base la droite $o\omega$ nous changeons le point A' en B'; nous employons pour cela la notation: $A' \to B'$; par cette translation : $\alpha' \to \beta'$. L'image du point A est un point B^* et l'image de A_1, qui est le pied de la perpendiculaire sur $\alpha'\omega$ menée de A, est le pied B_1^* de la perpendiculaire sur $\beta'\omega$ menée de B^*. La translation conserve les distances hyperboliques; on a par suite: $AA_1 = B^*B_1^*$; ci-dessus, nous avons trouvé que $AA_1 = BB_1$. Cela signifie que les points B et B^* de la droite $o\omega$ ont même distance à la droite $\beta'\omega$; en vertu de la proposition 17, les points B et B^* sont donc identiques. Cela signifie que la translation ayant pour base la droite $o\omega$ qui change A' en B' change A en B. Nous concluons de là que $A'B' = AB$, et comme l'ordre de ces points est $oA'B'\omega$ et $oAB\omega$, nous avons aussi $A'A = B'B$.

Nous considérons à présent la translation ayant pour base la droite $o\omega$ par laquelle: $A' \to A$, $B' \to B$; par conséquent $\alpha' \to \alpha$ et $\beta' \to \beta$. L'horocycle h' passant par B' est changé en l'horocycle h passant par B, et les points de rencontre de h' avec les droites $\alpha'\omega$, $\beta'\omega$, c'est-à-dire les points F_1', F_2' sont changés en les points de rencontre F_1, F_2 de h avec les droites $\alpha\omega$, $\beta\omega$. Comme $B'F_1' = F_2'F_3'$ et $BF_1 = F_2F_3$, et, à la suite de la translation $A' \to A$: $B'F_1' = BF_1$, il résulte que $F_2'F_3' = F_2F_3$; les ordres de ces points sur les horocycles h et h' étant les mêmes, nous concluons de là que la translation $A' \to A$ transforme le point F_3' en F_3. Conséquemment, le bout γ' de la droite $\omega F_3'$ est changé en le bout γ de la droite correspondante ωF_3, et le pied C' de la perpendiculaire sur $o\omega$ menée du bout γ'

est changé en le pied C de la perpendiculaire sur $o\omega$ menée du bout γ. Il résulte de là que $A'A = C'C$, et par conséquent $A'C' = AC$.

Finalement, nous appliquons la translation ayant pour base la droite $o\omega$ par laquelle $A' \to C'$; nous avons: $A \to C$, $\alpha' \to \gamma'$. Le pied A_1 de la perpendiculaire sur $\alpha'\omega$ menée par A est donc changé en le pied C_1 de la perpendiculaire sur $\gamma'\omega$ menée par C, et de là $AA_1 = CC_1$. Cela prouve la première partie de la proposition 26. La deuxième partie s'obtient de la première par un raisonnement indirect.

Nous allons démontrer le théorème de *Pappus* (ou de *Pascal*):

27. Soient o, α, β, γ des bouts différents de ω, et soient A', B', C' des points de la droite $o\omega$ tels que les lignes équidistantes $\alpha C'$ et $\gamma A'$ soient parallèles, de même que les lignes équidistantes $\beta C'$ et $\gamma B'$; sous ces conditions, les lignes équidistantes $\alpha B'$ et $\beta A'$ sont aussi parallèles (fig. 11).

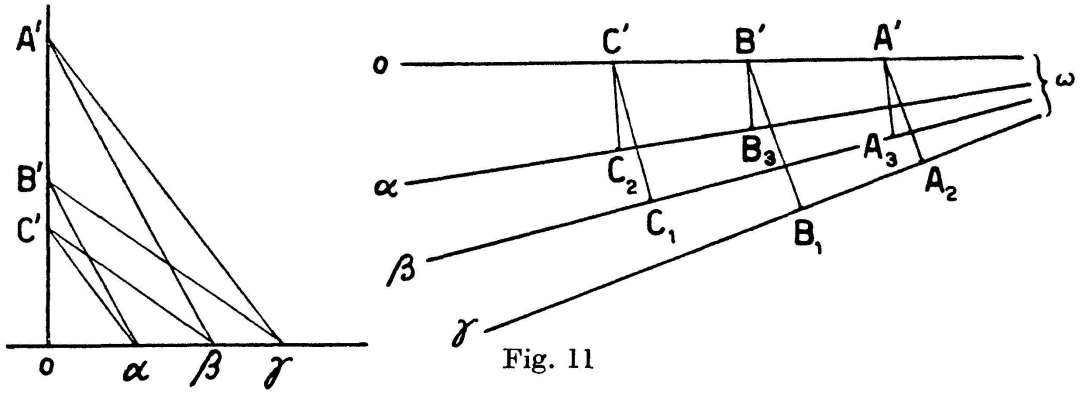

Fig. 11

Nous menons les perpendiculaires: à partir de C' sur $\alpha\omega$ et sur $\beta\omega$, à partir de B' sur $\alpha\omega$ et sur $\gamma\omega$, à partir de A' sur $\beta\omega$ et sur $\gamma\omega$; leurs pieds soient désignés dans cet ordre par $C_2, C_1, B_3, B_1, A_3, A_2$. De nos conditions, il résulte que $C'C_2 = A'A_2$ et $C'C_1 = B'B_1$. Il faut montrer que $A'A_3 = B'B_3$.

La translation ayant pour base la droite $o\omega$ qui change A' en C', change γ en α, en conséquence de l'égalité $C'C_2 = A'A_2$. La translation ayant la même base et qui change C' en B', change β en γ, en conséquence de l'égalité $C'C_1 = B'B_1$. Le produit de ces deux translations qui est *échangeable* d'après la proposition 5, change A' en B', β en α. Le pied de la perpendiculaire sur $\beta\omega$ menée du point A', c'est-à-dire le point A_3, est changé par cette translation en le pied B_3 de la perpendiculaire sur $\alpha\omega$ menée de B', d'où $A'A_3 = B'B_3$.

Définition. Si o, α, β sont des bouts différents de ω, et si A, B sont des points de la droite $o\omega$ tels que les lignes αA et βB sont parallèles (sa notation: $\alpha A \parallel \beta B$), nous disons que la *proportion* suivante est valable:

$$[o\alpha] : [o\beta] = [oA] : [oB] .$$

A la base de cette définition, on peut formuler les propositions 26 et 27 de la façon suivante:

26a. Si $[o\alpha']:[o\beta'] = [oA]:[oB]$, et si $[o\alpha'] = [\beta'\gamma']$, $[oA] = [BC]$, il résulte que $[o\alpha']:[o\gamma'] = [oA]:[oC]$.

27a. Si $[o\alpha]:[o\gamma] = [oC']:[oA']$ et si $[o\beta]:[o\gamma] = [oC']:[oB']$, il résulte que $[o\alpha]:[o\beta] = [oB']:[oA']$.

Nous allons démontrer la proposition suivante:

28. Soient o, α, β des bouts différents de ω, et soient A, B des points de la droite $o\omega$ tels que les lignes équidistantes αA et βB soient parallèles. On a alors:

$$[o\alpha]:[o\beta] = [\alpha A]:[\beta B]\,.$$

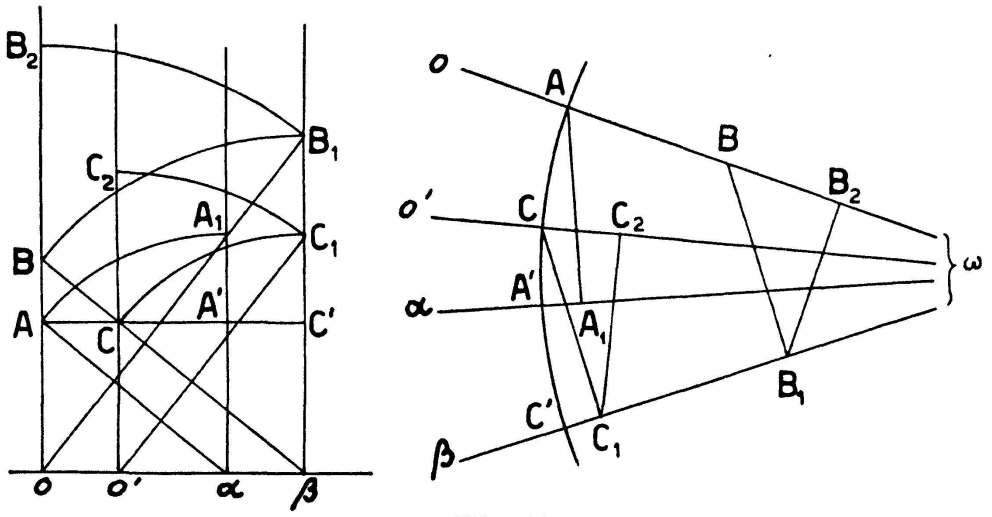

Fig. 12

Dans la fig. 12, la figure à gauche concerne le pseudo-plan euclidien; les lignes du pseudo-plan sont représentées par des lignes droites; les droites hyperboliques n'appartenant pas au bout ω sont représentées par des arcs de cercles orthogonaux sur la droite l_ω. La figure à droite correspond au plan hyperbolique.

Désignons par A_1 et B_1 les pieds des perpendiculaires menées sur $\alpha\omega$ à partir de A, et sur $\beta\omega$ à partir de B. D'après nos conditions: $AA_1 = BB_1$. Soient A' et C' les points de rencontre de l'horocycle h passant par A avec les droites $\alpha\omega$ et $\beta\omega$. Désignons par C le point de h pour lequel les arcs AC et $A'C'$ de h sont égaux et de même sens. Soit o' l'autre bout de la droite ωC. Désignons enfin par C_1 le pied de la perpendiculaire sur la droite $\beta\omega$ menée par C.

Par une translation suivant les horocycles h nous changeons A en C; nous aurons: $A' \to C'$, et par suite $\alpha \to \beta$ et $A_1 \to C_1$; de là nous concluons: $AA_1 = CC_1$, et comme $AA_1 = BB_1$, donc $BB_1 = CC_1$. Ce résultat signifie que les points B et C se trouvent sur une ligne équidistante de la

droite $\beta\omega$. Par une translation ayant pour base la droite $\beta\omega$ nous changeons C_1 en B_1; par cela $C \to B$ et par suite $o' \to o$. Nous concluons de là que la distance C_1C_2 du point C_1 à la droite $o'\omega$ est égale à la distance B_1B_2 du point B_1 à la droite $o\omega$, et donc, par définition, les lignes équidistantes oB_1 et $o'\ C_1$ sont parallèles, d'où:

$$[\beta o'] : [\beta o] = [\beta C_1] : [\beta B_1] .$$

En considérant les égalités: $[\alpha A] = [\alpha A_1] = [\beta C_1]$, et $[\beta B] = [\beta B_1]$, $[\beta o'] = [\alpha o]$, cette relation peut être mise sous la forme:

$$[o\alpha] : [o\beta] = [\alpha A] : [\beta B] .$$

Cela prouve la proposition 28.

Par une translation horizontale du pseudo-plan, changeons β en α; l'image de la ligne βB est la ligne parallèle αA; le point B est changé en un point B' de la ligne αA, et le point o en le point commun o' de l_ω avec la verticale passant par B'. Les translations horizontales conservent les pseudo-distances; de la proposition 28, nous obtenons ainsi la suivante:

29. *Si oA et $o'B'$ sont des lignes verticales, et si B' appartient à la ligne oblique αA, nous avons la proportion:*

$$[oA] : [o'B'] = [o\alpha] : [o'\alpha] = [A\alpha] : [B'\alpha] .$$

§ 8. Parallélogrammes

Un quadrilatère formé des segments AA', $A'B'$, $B'B$, BA du pseudo-plan est appelé *parallélogramme*, si

$$AA' \parallel BB' \quad \text{et} \quad AB \parallel A'B' .$$

a) Si AB et $A'B'$ sont des lignes *horizontales* et AA' et BB' des lignes obliques parallèles, désignons par α et β les points de rencontre de l_ω avec les lignes AA' et BB'. Menons les verticales par les points α et β, désignons par A_1, A_1' et par B_1, B_1' leurs points communs avec les lignes horizontales AB et $A'B'$ (fig. 13). D'après les définitions données au § 5, les égalités suivantes ont lieu:

$$[\alpha\beta] = [A_1B_1] = [A_1'B_1'] \quad \text{et} \quad [A_1A_1'] = [B_1B_1'].$$

La translation horizontale qui change α en β transforme d'après la proposition 25 la ligne αA en la ligne parallèle βB, la ligne verticale αA_1 en la

ligne verticale βB_1, et les lignes horizontales AB et $A'B'$ en elles-mêmes. On obtient donc: $A_1 \to B_1$, $A \to B$, $A_1' \to B_1'$, $A' \to B'$, et comme les pseudo-distances restent invariables, par suite:

$$[AA'] = [BB'] .$$

On a de même $[A_1 A] = [B_1 B]$, d'où $[A_1 B_1] = [AB]$, et $[A_1' A'] = [B_1' B']$, d'où $[A_1' B_1'] = [A'B']$; ayant regard à l'égalité $[A_1 B_1] = [A_1' B_1']$, on obtient:

$$[AB] = [A'B'] .$$

Considérons maintenant des parallélogrammes dont deux côtés sont *verticaux*.

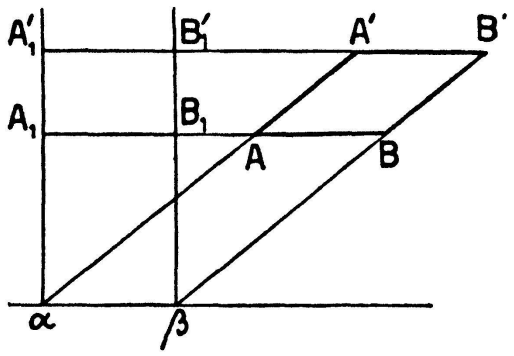

Fig. 13

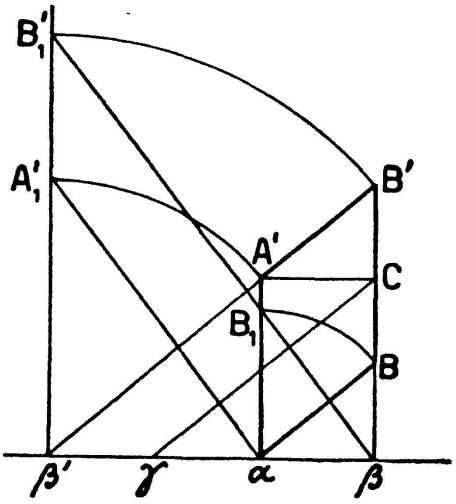

Fig. 14

b) Si α et β sont deux bouts différents de ω, et si les points A' de la droite $\alpha\omega$, B et B' de la droite $\beta\omega$ sont tels que les lignes αB et $A'B'$ sont parallèles, les égalités suivantes sont valables:

$$[\alpha A'] = [BB'] \quad \text{et} \quad [\alpha B] = [A'B'] .$$

Soit en effet C le point commun de la droite $\beta\omega$ avec l'horocycle passant par A'. Menons par C la ligne parallèle à αB, désignons par γ son point de rencontre avec l_ω, et par β' le point de rencontre de la ligne $A'B'$ avec l_ω (fig. 14). De notre résultat obtenu sous a) nous concluons que

$$[\beta'\gamma] = [A'C] = [\alpha\beta] ,$$

et comme $\beta'B' \parallel \gamma C \parallel \alpha B$, nous obtenons de l'inverse de la proposition 26 l'égalité: $[\beta B] = [CB']$, d'où $[\beta C] = [BB']$. Ensuite d'après les définitions du § 5, $[\alpha A'] = [\beta C]$, d'où:

$$[\alpha A'] = [BB'] ;$$

cette égalité signifie que les côtés verticaux du parallélogramme sont égaux.

Pour vérifier la deuxième égalité énoncée, menons les perpendiculaires (hyperboliques) sur $\alpha\omega$ à partir de B, et sur $\beta'\omega$ à partir de A' et B'; désignons leurs pieds par B_1, A_1', B_1' (fig. 14). De nos conditions, nous concluons que $BB_1 = A'A_1' = B'B_1'$. Il résulte que les points B_1 et B_1' se trouvent sur une ligne équidistante de $\beta\omega$ et que A_1' se trouve sur la ligne équidistante de $\alpha\omega$ parallèle à B_1B_1'. D'après le résultat déjà obtenu, les côtés verticaux du parallélogramme $\alpha B_1 B_1' A_1'$ sont égaux; par suite $[\alpha B_1] = [A_1' B_1']$. Considérant les égalités $[\alpha B_1] = [\alpha B]$ et $[A_1' B_1'] = [A'B']$ nous obtenons de là:

$$[\alpha B] = [A'B'] .$$

c) Si α et β sont deux points de la ligne l_ω, et A et $\overline{B}$ sont des points de H et de $\overline{H}$ appartenant respectivement aux verticales $\alpha\omega$, $\beta\overline{\omega}$, tels que $\alpha\overline{B} \parallel A\beta$, on a les égalités: $[A\alpha] = [\beta\overline{B}]$ et $[A\beta] = [\alpha\overline{B}]$ (fig. 15).

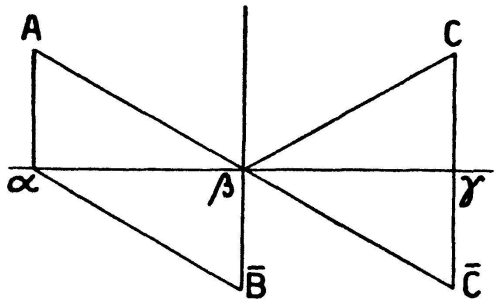

Fig. 15

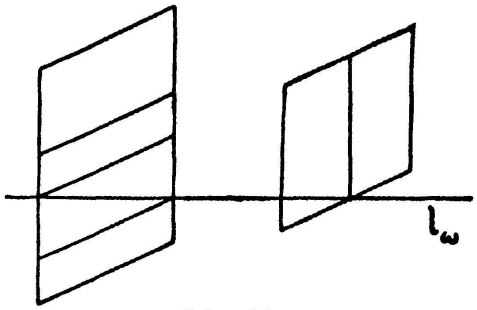

Fig. 16

Pour le démontrer, nous changeons α en β par une translation horizontale; par cela: $\beta \to \gamma$, $\overline{B} \to \overline{C}$. Comme $\alpha\overline{B} \parallel A\beta$ et $\alpha\overline{B} \parallel \beta\overline{C}$, les segments βA et $\beta\overline{C}$ appartiennent à une même ligne oblique. Désignons par C le symétrique de $\overline{C}$ par rapport à l_ω; les lignes équidistantes βC et βA de $\beta\omega$ sont donc symétriques par rapport à $\beta\omega$. Par la symétrie par rapport à $\beta\omega$: $\gamma \to \alpha$, $\beta \to \beta$, $\beta C \to \beta A$, $\gamma\omega \to \alpha\omega$, d'où résulte que $C \to A$. Comme les transformations que nous avons employées conservent les pseudo-distances, nous obtenons les égalités suivantes:

$$[\overline{B}\beta] = [\overline{C}\gamma] = [C\gamma] = [A\alpha] \quad \text{et} \quad [\alpha\overline{B}] = [\beta\overline{C}] = [\beta C] = [\beta A].$$

d) Un parallélogramme quelconque du pseudo-plan dont deux côtés sont verticaux peut être décomposé ou complété pour obtenir des parallélogrammes des types considérés sous b) et c) (voir fig. 16). L'égalité des côtés opposés est donc valable aussi pour ces parallélogrammes.

Nous avons démontré la proposition suivante:

30. Si deux côtés d'un parallélogramme sont horizontaux ou verticaux, ses côtés opposés sont respectivement égaux.

L'inverse suivant de cette proposition s'obtient par un raisonnement indirect:

Si deux côtés opposés d'un quadrilatère sont parallèles et égaux, et si un côté est horizontal ou vertical, les deux autres côtés opposés sont aussi parallèles et égaux.

§ 9. Les translations verticales du pseudo-plan Le groupe des translations

Les *translations verticales* du pseudo-plan seront définies par la prescription suivante. Soient A et A' deux points quelconques appartenant à une ligne verticale. A tout point B, nous faisons correspondre le point B' de la ligne verticale passant par B pour lequel les segments AA' et BB' ont le même sens et les pseudo-distances $[AA']$ et $[BB']$ sont égales.

Remarque. Les translations du plan hyperbolique ayant pour base une droite $o\,\omega$ changent les autres droites ayant le bout ω entre elles. Les translations verticales du pseudo-plan changent toute ligne verticale en elle-même. *Les deux sortes de translations changent les horocycles, c'est-à-dire les lignes horizontales entre elles.*

De la définition il résulte immédiatement que *les translations verticales du pseudo-plan forment un groupe commutatif.*

Toute translation verticale change une ligne quelconque en une ligne parallèle et conserve les pseudo-distances.

Soient en effet A et B deux points quelconques et A', B' leurs images obtenues par une translation verticale. Si A et B appartiennent à une ligne verticale, on obtient immédiatement que $[AB] = [A'B']$. Si A et B n'appartiennent pas à une ligne verticale, comme AA' et BB' sont verticales d'après la définition, et $[AA'] = [BB']$, on obtient de l'inverse de la proposition 30 que $[AB] = [A'B']$ et $AB \parallel A'B'$. Par suite, l'image du point B de la ligne AB appartient à la ligne $A'B'$ qui est parallèle à AB.

Nous définissons une *translation oblique* du pseudo-plan comme le produit d'une translation horizontale et d'une translation verticale. Les translations obliques changent aussi toute ligne en une ligne parallèle et conservent les pseudo-distances.

Soit S une translation horizontale, et T une translation verticale.

Désignons par $A' = S(A)$ et par $B = T(A)$ les images d'un point A obtenues par ces translations. La ligne horizontale AA' est changée par T en la ligne horizontale passant par B, et la ligne verticale passant par A' en elle-même. Désignons par B' le point de rencontre de la ligne verticale passant par A' avec la ligne horizontale passant par B. La translation T change donc le point A' en B'. Par un raisonnement similaire on obtient que la translation S change B en B'. Par conséquent, le point A est changé en B' et par la transformation ST et par TS; comme A est un point arbitraire du pseudo-plan, cela signifie que *les transformations ST et TS sont identiques.*

Les translations horizontales et verticales sont donc échangeables; si S et S' sont des translations horizontales, et T et T' des translations verticales quelconques, on a

$$(ST)(S'T') = (SS')(TT') = (S'T')(ST) ;$$

cela signifie que le produit des translations obliques ST et $S'T'$ est la translation oblique $(SS')(TT')$ et que leur produit est commutatif. *Les translations du plan forment donc un groupe commutatif.*

Si A et B sont deux points quelconques du pseudo-plan, désignons par P le point de rencontre de la ligne horizontale passant par A avec la ligne verticale passant par B. Soit S la translation horizontale: $A \to P$, et T la translation verticale: $P \to B$. La translation oblique ST change A en B et c'est la seule translation qui change A en B. A deux points quelconques A et B correspond donc une translation et une seule qui change A en B; nous exprimons cette propriété en disant que *le groupe des translations est simplement transitif sur le pseudo-plan.*

Nous résumons nos résultats dans la proposition suivante:

31. Les translations du pseudo-plan changent toute ligne en une ligne parallèle et conservent les pseudo-distances; elles forment un groupe commutatif et simplement transitif sur le pseudo-plan.

§ 10. Produit de segments. Coordonnées

Nous désignerons les grandeurs des pseudo-distances par les lettres a, b, c, x, y, etc.

La somme $a + b$ des grandeurs a et b est définie de la façon suivante: soient O, A, B des points d'une ligne quelconque tels que leur ordre soit OAB et que les égalités suivantes aient lieu: $[OA] = a$, $[AB] = b$; nous posons alors $[OB] = a + b$. Nous dirons plus court que le segment $a + b$ est la *somme des segments a et b.*

L'addition des segments est commutative est associative, c'est-à-dire qu'on a les relations

$$a + b = b + a \quad \text{et} \quad (a + b) + c = a + (b + c) .$$

Pour définir la multiplication des segments, nous prenons un segment *unité* e arbitrairement. Le segment c est le *produit des segments* a et b (par rapport à l'unité e), si la proportion $c : b = a : e$ a lieu. Nous rappelons la signification de cette proportion (voir fig. 17). Soient o, ε, α des bouts différents de ω tels que o ne sépare pas sur l_ω les bouts ε et α, et pour lesquels $[o\varepsilon] = e$, $[o\alpha] = a$; soient ensuite B et C des points de la droite hyperbolique $o\omega$ pour lesquels $[oB] = b$ et $[oC] = c$; si les lignes εB et αC sont parallèles (ou si elles coïncident), $c : b = a : e$.

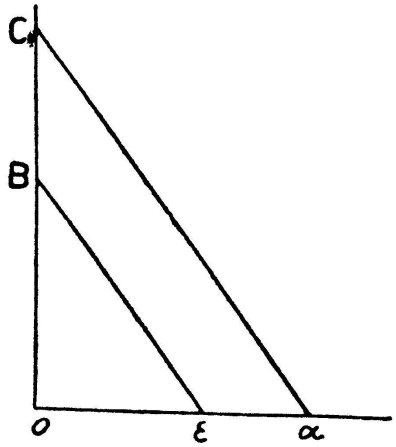

Fig. 17

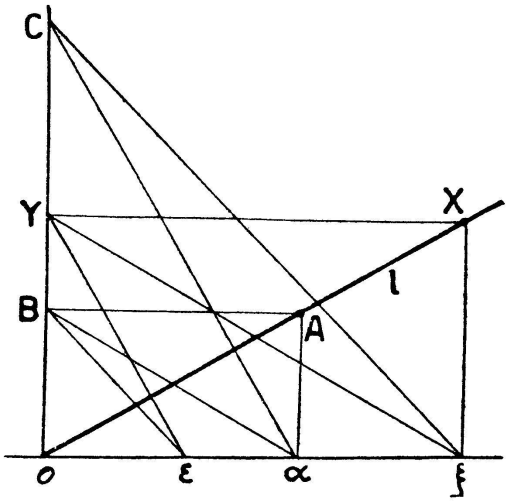

Fig. 18

Il résulte du théorème de *Pappus* (27) que la multiplication des segments est commutative et associative; en désignant par ab le produit de a et b on a donc les relations $ab = ba$ et $(ab)\,c = a\,(bc)$. On conclut de plus que la proportion $a : b = c : d$ est équivalente à l'égalité des produits $ad = bc$.

De la proposition 26 on obtient la règle distributive:

$$(a + b)\,c = ac + bc \quad \text{et} \quad c(a + b) = ca + cb .$$

Nous introduisons dans le pseudo-plan des *coordonnées rectangulaires* par le procédé suivant. Sur la ligne l_ω nous choisissons un point o et lui faisons correspondre la coordonnée $x = 0$. L'une des demi-lignes de l_ω déterminées par o sera appelée positive, l'autre négative. A tout point ξ de la ligne l_ω nous associons la coordonnée $x = a$ ou $x = -a$, suivant que ξ appartient à la demi-ligne positive ou négative, où $a = [o\xi]$ désigne la grandeur du segment $o\xi$. Considérons la ligne verticale passant

par o, appelons ses demi-lignes déterminées par o demi-lignes positive et négative, et associons à tout point Q de ces demi-lignes la coordonnée $y = b$ ou $y = -b$ en désignant par $b = [oQ]$ la grandeur du segment oQ. La ligne l_ω est l'*axe* x, et la verticale passant par o est l'*axe* y.

Si P est un point quelconque du pseudo-plan, menons les lignes verticale et horizontale par le point P, et désignons par x et y les coordonnées respectives attribuées à leurs points de rencontre avec les axes; nous associons au point P le couple (x, y) comme ses coordonnées.

Une conséquence immédiate de la définition est que pour tous les points d'une ligne verticale l'égalité $x = a$ est vérifiée où a signifie la coordonnée du point commun de cette ligne avec la ligne l_ω. Similairement pour toute ligne horizontale on a $y = b$.

Soit l une ligne oblique passant par le point o; désignons par (a, b) les coordonnées d'un point A de l, et par (x, y) les coordonnées d'un autre point quelconque X de l. Menons les lignes horizontales et verticales par les points A et X et désignons par B et Y et par α et ξ leurs points de rencontre avec les axes (fig. 18). Soit ε le point de l'axe x dont la coordonnée est e (unité). Formons les produits des segments x et b, et des segments a et y; désignons par C et C' les points de l'axe y pour lesquels $[oC] = xb$ et $[oC'] = ay$. Comme $\alpha B \parallel \xi Y$ (car chacune de ces deux lignes peut être transformée par des translations horizontales en la symétrique de la ligne oA par rapport à l'axe y), et comme, d'après la définition de multiplication, $\varepsilon B \parallel \xi C$ et $\varepsilon Y \parallel \alpha C'$, il résulte du théorème de *Pappus* que C coïncide avec C'; par conséquent $xb = ay$, d'où l'on obtient $bx = ay$, vu la commutativité de la multiplication. Telles sont les équations des lignes passant par le point o.

Si l' est une ligne oblique quelconque, soit l la ligne parallèle à l' passant par o, et soit $bx = ay$ l'équation de l. Si (x, y) et (x', y') sont les coordonnées des points de rencontre d'une ligne horizontale quelconque avec l et avec l', celles-ci sont liées par les équations $x' = x + c$, $y' = y$ où c désigne la coordonnée du point de rencontre de l' avec l'axe x. Par suite, l'équation de la ligne l' est la suivante: $b(x - c) = ay$. Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant:

32. Avec les coordonnées (x, y) toute ligne du pseudo-plan s'exprime par une équation linéaire.

§ 11. Théorème de PYTHAGORE

33. Si α est un point de l'axe x, et A un point de l'axe y, et si B est le point du segment oblique αA tel que la ligne oB est perpendiculaire sur la

ligne αA, désignons par C le point de αA et par β le point de $o\alpha$ pour lesquels

$$[\alpha o] = [\alpha C] \quad \text{et} \quad [\alpha B] = [\alpha \beta] ;$$

sous ces conditions le point C appartient à la verticale passant par β et on a l'égalité

$$[\beta C] = [oB] .$$

Le raisonnement suivant est relatif au plan hyperbolique. Comme les lignes équidistantes αB et oB sont perpendiculaires, d'après la définition de perpendicularité donnée dans le § 4, le point B appartient à la droite hyperbolique $o\alpha$ (fig. 19). Nous menons les droites hyperboliques perpendiculaires sur $\alpha\omega$ à partir du point B et à partir du bout o; désignons leurs pieds par B_1 et C_1; soit β le bout de la demi-droite B_1B, et soit C le point commun de la demi-droite C_1o avec la ligne équidistante αA; les segments hyperboliques CC_1 et BB_1 sont égaux: $CC_1 = BB_1$. Par la symétrie à la médiane du couple B_1, C_1:

$$B_1 \to C_1,\ C_1 \to B_1,\ B \to C,\ C \to B ;\ o \to \beta,\ \beta \to o,\ \alpha \to \omega,\ \omega \to \alpha ;$$

la droite $oB\alpha$ est changée donc en la droite $\beta C \omega$; par conséquent, *le point*

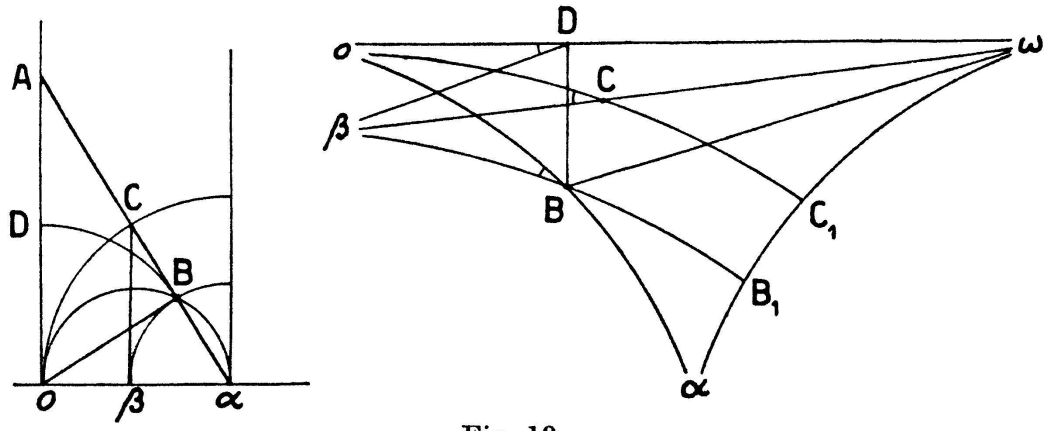

Fig. 19

C appartient à la droite $\beta\omega$; c'est la première partie de la proposition ci-dessus. La symétrie en question change entre eux les angles suivants qui sont donc égaux:

$$\sphericalangle oB\beta = \sphericalangle oC\beta .$$

Nous menons la perpendiculaire sur $o\omega$ par le point B, désignons son pied par D; nous joignons le point B au bout ω par la demi-droite $B\omega$. Les angles $\sphericalangle oB\omega$ et $\sphericalangle \omega B\alpha$ sont complémentaires; leurs médianes BD et BB_1 sont donc perpendiculaires. En d'autres termes, la droite BD est

la perpendiculaire commune des droites βB_1 et $o\omega$. La symétrie par rapport à la médiane du couple B, D change:

$$B \to D, \quad D \to B, \quad \beta \to o, \quad o \to \beta,$$

par suite:

$$\sphericalangle oB\beta = \sphericalangle oD\beta .$$

De cette égalité, jointe à celle obtenue ci-dessus, résulte la suivante:

$$\sphericalangle oC\beta = \sphericalangle oD\beta ,$$

qui signifie que *C et D sont des points homologues des droites $\beta\omega$ et $o\omega$*, par suite ils appartiennent à un même horocycle h du faisceau (a). Ce résultat, interprété dans le pseudo-plan, signifie que $[\beta C] = [oD]$, et comme $[oB] = [oD]$, par suite:

$$[\beta C] = [oB] .$$

C'est la deuxième partie de la proposition 33 que nous venons de démontrer.

Par un raisonnement indirect, on déduit de la proposition 33 la proposition inverse suivante:

34. Si o, β, α sont des points de l'axe x, A un point de l'axe y, et si B et C sont des points du segment oblique αA tels que

$$[\alpha o] = [\alpha C] \quad \text{et} \quad [\alpha\beta] = [\alpha B] ,$$

et si la ligne βC est verticale, les lignes oB et αB sont perpendiculaires.

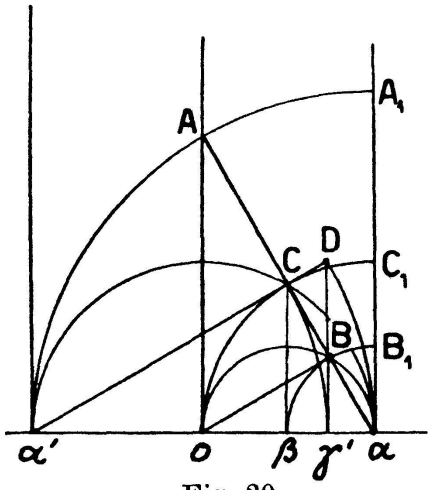

Fig. 20

En conservant les notations employées, soit α un point de l'axe x, A un point de l'axe y, et soit B le point du segment oblique αA tel que les lignes oB et αB soient perpendiculaires. Désignons par A_1, B_1, C_1 les pieds des droites hyperboliques perpendiculaires sur $\alpha\omega$ menées à partir

des points A et B et du bout o. Soient α' et β les bouts des demi-droites hyperboliques A_1A et B_1B; soit ensuite C le point commun de la demi-droite hyperbolique C_1o avec la ligne équidistante αA (fig. 20). En vertu de la proposition 34 les lignes $\alpha'C$ et αC sont perpendiculaires, le point C appartient donc à la droite hyperbolique $\alpha'\alpha$, et d'après 33 on a $[A\,o] = [\alpha'C]$; de même: $[oB] = [\beta C]$. D'après les définitions $[\alpha A] = [\alpha\alpha']$ et $[\alpha B] = [\alpha\beta]$; on conclut de là, en considérant que l'ordre des points A, B, α sur la ligne αA et celui de α', β, α sur l_ω sont les mêmes, l'égalité suivante: $[AB] = [\alpha'\beta]$; finalement: $[\alpha\,o] = [\alpha C]$. Nous réunissons les trois égalités suivantes, que nous avons obtenues,

$$[A\,o] = [\alpha'C], \quad [A\alpha] = [\alpha'\alpha], \quad [o\alpha] = [C\alpha]\,,$$

sous le signe de pseudo-congruence suivante:

$$[A\,o\alpha] \equiv [\alpha'C\alpha]\,.$$

Des égalités ci-dessus, il résulte aussi:

$$[AB\,o] \equiv [\alpha'\beta C]\,. \tag{1}$$

Désignons par D le point commun de la ligne équidistante $\alpha'C$ avec la droite hyperbolique perpendiculaire sur $\alpha'\omega$ menée du bout α. Menons la droite hyperbolique perpendiculaire sur $\alpha'\omega$ par le point C et désignons par γ' son bout qui se trouve du même côté de la droite $\alpha'\omega$ que le point C. D'après les définitions on a $[\alpha'\alpha] = [\alpha'D]$ et $[\alpha'C] = [\alpha'\gamma']$. En vertu de la proposition 33 le point D appartient à la droite $\gamma'\omega$ et $[\alpha C] = [D\gamma']$. Nous obtenons ainsi $[\alpha'C\alpha] \equiv [\alpha'\gamma'D]$; cette relation jointe à la relation ci-dessus $[A\,o\alpha] \equiv [\alpha'C\alpha]$ donne:

$$[A\,o\alpha] = [\alpha'\gamma'D]. \tag{2}$$

Les lignes βC et $\gamma'D$ sont verticales, et le point C appartient à la ligne oblique $\alpha'D$; la proposition 29 nous amène donc à la proportion suivante:

$$[\alpha'D] : [\alpha'C] = [\alpha'\gamma'] : [\alpha'\beta] = [\gamma'D] : [\beta C]$$

qu'on peut écrire, en se servant des relations (1) et (2) sous la forme:

$$[A\alpha] : [A\,o] = [A\,o] : [AB] = [o\alpha] : [B\,o]\,. \tag{3}$$

En employant d'un façon similaire la proposition 29 aux triangles $A\,o\alpha$ et $C\beta\alpha$, on obtient la proportion:

$$[A\alpha]:[C\alpha]=[o\alpha]:[\beta\alpha]=[A\,o]:[C\beta]$$

qu'on peut mettre, en se servant de la relation $[C\beta\alpha]\equiv[oB\alpha]$ sous la forme:

$$[A\alpha]:[o\alpha]=[o\alpha]:[B\alpha]=[A\,o]:[oB]\,. \tag{4}$$

Nous déduisons de (3) et de (4) les égalités suivantes:

$$[A\,o]^2=[A\alpha]\cdot[AB] \quad \text{et} \quad [o\alpha]^2=[A\alpha]\cdot[B\alpha]\,,$$

d'où nous obtenons par addition:

$$[A\,o]^2+[o\alpha]^2=[A\alpha]\cdot[AB+B\alpha]=[A\alpha]^2\,. \tag{5}$$

Si P, Q, R sont des points quelconques du pseudo-plan tels que la ligne PQ est horizontale, et la ligne QR verticale, désignons les grandeurs des segments PQ, QR, PR par a, b, c. Par une translation du pseudo-plan, nous pouvons changer le triangle PQR en un triangle $\alpha\,oA$ du type considéré ci-dessus. Comme la translation conserve les pseudo-distances, il résulte de la relation (5) qu'entre les segments a, b, c la relation suivante est valable:

$$a^2+b^2=c^2\,.$$

Notre résultat est le *théorème de Pythagore* que nous énonçons sous la forme suivante:

35. Si PQ est un segment horizontal, et QR un segment vertical, les grandeurs a, b, c des segments PQ, QR, PR sont liées par la relation $a^2+b^2=c^2$.

Désignons par (x_1, y_1) et par (x_2, y_2) les coordonnées des points P et R; a et b sont égales à x_1-x_2 et à y_1-y_2 à de signe près; nous obtenons donc l'expression suivante de la pseudo-distance c des points P et R:

$$c^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\,.$$

C'est l'*expression de la distance euclidienne;* de la sorte, nous avons vérifié que *la pseudo-géométrie que nous avons construite est identique à la géométrie euclidienne plane.*

Nous faisons observer qu'on obtient de la deuxième partie de la proportion (4) la proposition suivante:

36. Si oA est une ligne verticale, et si les lignes oB et αA sont perpendiculaires, on a la proportion:

$$[A\,o]:[o\alpha]=[oB]:[B\alpha]\,.$$

§ 12. Le modèle de la géométrie hyperbolique dans le pseudo-plan

Le *plan hyperbolique* H est formé par le demi-plan euclidien $y > 0$ déterminé par l'axe x (qui est la ligne l_ω).

Les droites hyperboliques sont les demi-droites et les demi-circonférences euclidiennes perpendiculaires sur l'axe x. En effet les droites hyperboliques ayant le bout ω sont les demi-droites euclidiennes perpendiculaires sur l'axe x. Soit ensuite $\alpha\beta$ la droite hyperbolique ayant les bouts α et β (différents de ω). Nous menons à partir du bout ω la droite hyperbolique perpendiculaire sur $\alpha\beta$ et désignons son autre bout par γ. Les demi-droites euclidiennes issues du point γ de l'axe x sont les lignes équidistantes de la droite hyperbolique $\gamma\omega$. Désignons par C et par X les points de rencontre de la droite hyperbolique $\alpha\beta$ avec la droite hyperbolique $\gamma\omega$ et avec une de ses lignes équidistantes. D'après la définition de pseudo-distance donnée au § 5 $[\gamma X] = [\gamma C]$; cela signifie que les points C et X appartiennent à une même circonférence euclidienne de centre γ.

Nous avons démontré dans le § 2 que tout mouvement du plan hyperbolique peut être composé des mouvements suivants: a) demi-rotation autour d'un point C; b) translations ayant pour base une droite hyperbolique a (appartenant au faisceau (a)); c) translations suivant les horocycles h du faisceau (a).

Les translations du type c) sont les *translations horizontales du plan euclidien* exprimées avec les coordonnées x y par les formules:

$$x' = x + a, \quad y' = y\,.$$

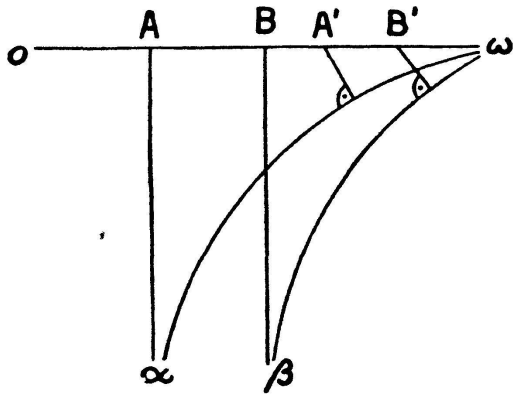

Fig. 21

Les translations du plan hyperbolique du type b) sont des *homothéties du plan euclidien* de centre situé sur l'axe x. Soient, en effet, A, A', B, B' des points de la droite hyperbolique $o\omega$ tels que les segments AB et $A'B'$ ont même sens et que $AB = A'B'$. Menons les demi-droites hyperboliques $A\alpha$ et $B\beta$ perpendiculaires sur $o\omega$ vers le même côté de $o\omega$

(fig. 21). La translation ayant pour base la droite $o\omega$ qui change A en A' transforme B en B'; la translation ayant la même base qui change A en B, transforme: $A' \to B'$, $\alpha \to \beta$. Il résulte de là que la distance de A' à la droite $\alpha\omega$ est égale à la distance de B' à la droite $\beta\omega$, c'est-à-dire que les lignes équidistantes $\alpha A'$ et $\beta B'$ sont des lignes parallèles du pseudoplan. D'après la définition on a donc la proportion:

$$[oA] : [oA'] = [oB] : [oB'] .$$

Supposons, pour fixer les idées, que la droite hyperbolique $o\omega$ est l'axe y ($y > 0$) et désignons par a, a', y, y' les coordonnées des points A, A', B, B'; de la proportion ci-dessus il résulte que

$$y : y' = a : a' .$$

Les lignes équidistantes de la droite hyperbolique $o\omega$, c'est-à-dire les demi-droites euclidiennes issues du point o sont transformées en elles-mêmes par la translation hyperbolique ayant pour base la droite $o\omega$. Les droites hyperboliques perpendiculaires sur $o\omega$, c'est-à-dire les demi-circonférences euclidiennes de centre o sont changées entre elles par la même transformation. Nous concluons de là, à la base de la proportion ci-dessus, que les coordonnées d'un point quelconque et de son image sont liées par la relation

$$x : x' = y : y' = a : a' .$$

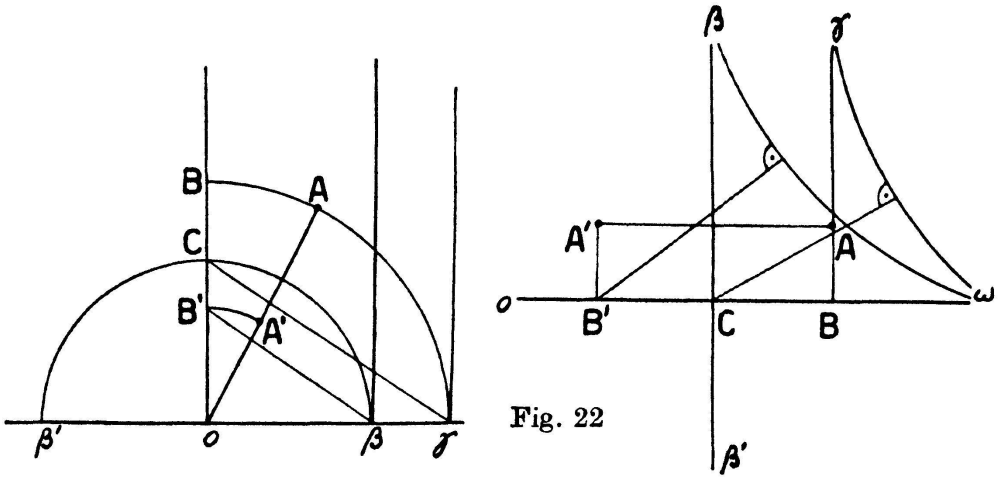

Fig. 22

Nous avons donc vérifié qu'une translation ayant pour base la droite $o\omega$ correspond dans le plan euclidien à une homothétie de centre o.

Soit C le point de l'axe y pour lequel $[oC] = e$ (unité). Dans le plan hyperbolique considérons la droite $o\omega$ et la droite perpendiculaire $\beta\beta'$ passant par le point C; d'après définition: $[o\beta] = [o\beta'] = e$. La demi-rotation autour du point C du plan hyperbolique est le produit des symétries par rapport aux droites $\beta\beta'$ et $o\omega$ (fig. 22).

Soit A un point quelconque et A' son symétrique par rapport à la droite $\beta\beta'$. Les points A et A' appartiennent à une ligne équidistante de $o\omega$. Désignons par B et B' les pieds des perpendiculaires sur $o\omega$ menées par A et par A'; ces points sont aussi symétriques par rapport à la droite $\beta\beta'$, d'où $B'C = CB$. Désignons par γ le bout de la demi-droite BA; supposons, pour fixer les idées, que β et γ se trouvent d'un même côté de la droite $o\omega$. La translation ayant pour base la droite $o\omega$ qui change B' en C, change: $C \to B$, $\beta \to \gamma$, $\omega \to \omega$; il résulte que la distance de B' à la droite $\beta\omega$ est égale à la distance de C à la droite $\gamma\omega$. Les lignes équidistantes γC et $\beta B'$ sont donc des lignes parallèles du pseudo-plan et, par définition:

$$[oC] : [oB'] = [o\gamma] : [o\beta] .$$

Comme $[oC] = [o\beta] = e$, $[oB'] = [oA']$ et $[o\gamma] = [oA]$, nous obtenons:

$$e : [oA'] = [oA] : e, \quad \text{d'où:} \quad [oA] \cdot [oA'] = e^2 = e .$$

En désignant par r et r' les pseudo-distances de A et de A' au point o et par (x, y) et (x', y') les coordonnées respectives des points A et A', nous avons donc les relations suivantes:

$$y : y' = x : x', \quad r \cdot r' = e, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad r'^2 = x'^2 + y'^2 .$$

Ces formules expriment *l'inversion du plan euclidien par rapport au cercle unité.*

La symétrie du plan hyperbolique par rapport à la droite $o\omega$ correspond à la symétrie du demi-plan supérieur euclidien par rapport à l'axe y définie par les formules: $x' = -x$, $y' = y$.

La demi-rotation du plan hyperbolique autour du point C correspond donc à la transformation du plan euclidien produit de l'inversion par rapport au cercle unité et de la symétrie par rapport à l'axe y.

Nous sommes ainsi aboutis au résultat suivant:

37. Le groupe des mouvements hyperboliques et engendré, dans sa représentation sur le plan euclidien, par les transformations suivantes:

a) produit de l'inversion par rapport au cercle unité et de la symétrie par rapport à l'axe y;

b) homothéties de centre o;

c) translations suivant l'axe x.

Pour terminer, nous allons établir les conditions, relatives à la pseudo-géométrie euclidienne, de l'égalité de deux segments AB et $A'B'$ au sens de la géométrie hyperbolique.

Si A et B sont des points de la ligne verticale passant par le point β de l'axe x, désignons par A_1, B_1, β_1 les images de ces points obtenues par une translation horizontale. Les distances hyperboliques AB et A_1B_1 sont égales: $AB = A_1B_1$ et de même les distances euclidiennes: $[\beta A] = [\beta_1 A_1]$, $[\beta B] = [\beta_1 B_1]$. Désignons ensuite par A_2, B_2 les images de A et de B obtenues par une translation du plan hyperbolique ayant pour base la droite $\beta\omega$; on a $AB = A_2B_2$. Comme cette translation correspond à une homothétie de centre β du plan euclidien, on a la proportion: $[\beta A] : [\beta B] = [\beta A_2] : [\beta B_2]$. De là nous concluons immédiatement que les segments hyperboliques AB et $A'B'$ appartenant aux droites $\beta\omega$ et $\beta'\omega$ respectivement sont égaux si $[\beta A] : [\beta B] = [\beta' A'] : [\beta' B']$, et alors seulement.

Si AB est un segment de la droite hyperbolique $\alpha\beta$, soit β' l'autre bout de la droite hyperbolique perpendiculaire sur $\alpha\omega$ menée à partir du bout β. Les pseudo-distances $[\beta\alpha]$ et $[\beta'\alpha]$ sont égales, les points β et β' appartiennent donc à un cercle de centre α. Employons l'inversion par rapport à ce cercle et désignons par A' et B' les images des points A et B. Les points A' et B' sont les points de rencontre de la ligne verticale

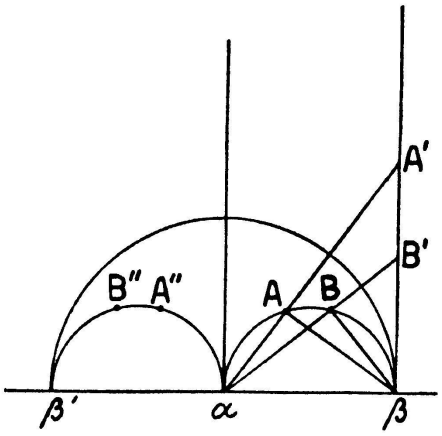

Fig. 23

passant par β avec les lignes obliques αA et αB (fig. 23). En vertu de la proposition 36 on a:

$$[A'\beta] : [\alpha\beta] = [A\beta] : [A\alpha] \quad \text{et} \quad [B'\beta] : [\alpha\beta] = [B\beta] : [B\alpha] ;$$

de là, il résulte:

$$[A'\beta] : [B'\beta] = [A\beta] \cdot [B\alpha] : [A\alpha] \cdot [B\beta] .$$

Nous appelons l'expression à gauche *rapport* $(A'B'\beta)$, et celle à droite *rapport anharmonique* $(AB\beta\alpha)$.

La symétrie par rapport à la ligne verticale passant par α change

$$\alpha \to \alpha,\ \beta \to \beta',\ A \to A'',\ B \to B'' \quad \text{d'où} \quad (AB\beta\alpha) = (A''B''\beta'\alpha)\,.$$

Le résultat obtenu peut être énoncé dans la proposition suivante:

38. Soient A B et A', B' des points du demi-plan supérieur ; désignons par α, β et par α', β' les points communs de l'axe x avec les circonférences perpendiculaires sur l'axe x passant respectivement par les points A, B et A', B'. Les distances hyperboliques AB et $A'B'$ sont égales si les rapports anharmoniques $(AB\beta\alpha)$ et $(A'B'\beta'\alpha')$ sont égaux et alors seulement. En cas que A et B ou A' et B' se trouvent sur une droite euclidienne perpendiculaire sur l'axe x, il faut remplacer dans l'énoncé ci-dessus le rapport anharmonique respectif par le rapport $(AB\beta)$ ou $(A'B'\beta')$ ou β et β' désignent les points communs de la droite AB et $A'B'$ avec l'axe x.

Nous avons ainsi démontré que la géométrie hyperbolique plane définie par le système donné d'axiomes est identique au modèle, dû à *Poincaré,* construit dans le demi-plan euclidien supérieur.

(Reçu le 14 juillet 1940.)