Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 13 (1940-1941)

Artikel: Le problème des isopérimètres sur les surfaces ouvertes à courbure positive.

Autor: Fiala, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-13566

Le problème des isopérimètres sur les surfaces ouvertes à courbure positive

Par F. Fiala, Genève

INTRODUCTION

1. Hypothèses

1. 1. Pendant longtemps *la géométrie différentielle* s'est bornée à l'étude des *propriétés locales* de morceaux suffisamment petits de surface. C'est en particulier le point de vue qui a guidé Darboux dans ses „Leçons sur la théorie générale des surfaces" [1]*), auxquelles nous aurons bien souvent implicitement recours. Il existe pourtant un autre champ de recherches, pour la plupart relativement récentes, qui ont pour but la connaissance de la *structure globale* des surfaces tout entières. C'est à celles-ci que se rattache le présent travail.

Les surfaces qui nous intéressent sont *ouvertes*, ce qui signifie qu'elles contiennent des régions s'éloignant jusqu'à l'infini ou, pour employer un langage plus précis, *qu'elles contiennent des ensembles infinis de points n'admettant aucun point d'accumulation.* Il est alors essentiel, pour que nous soyons sûrs d'avoir à faire à des *surfaces entières* et non à des morceaux de surfaces, de formuler l'hypothèse suivante: *La longueur de toute courbe divergente sur la surface est infinie.* La notion de courbe divergente est précisée au no 4. 1. MM. Hopf et Rinow ont montré [2] que cette hypothèse de „Vollständigkeit" est équivalente à plusieurs autres, en particulier à la suivante, qui fait de nos surfaces des espaces de Riemann normaux au sens de Cartan: *Tout ensemble infini borné de points admet au moins un point limite*[1]).

---

*) Dans le texte, nous désignons par les chiffres suivants les principaux ouvrages auxquels nous nous référons:

[1] *Darboux,* Leçons sur la théorie générale des surfaces, Paris, 1887.

[2] *Hopf* und *Rinow,* Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche, Comm. Math. Helv., 3, 1931, p. 209—225.

[3] *Cohn-Vossen,* Kürzeste Wege und Totalkrümmung auf Flächen, Comp. Math., II, 1935, p. 69—133.

[4] *Cohn-Vossen,* Totalkrümmung und geodätische Linien auf einfachzusammenhängenden offenen vollständigen Flächenstücken, Recueil mathématique de Moscou, 1 (43), 1936, p. 139—163.

[5] *Blaschke,* Vorlesungen über Differentialgeometrie, 3me éd., Berlin, 1930.

1) *Cartan,* Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Paris 1928.

Nous allons dorénavant borner nos considérations aux surfaces *homéomorphes au plan euclidien*. Nous verrons au n° 1.3 que cette hypothèse ne réduit nullement la portée de nos théorèmes principaux, qui se trouvent énoncés dans la seconde partie de ce travail. C'est pour cette raison que nous nous sommes permis, dans le but de simplifier les démonstrations, de faire cette hypothèse topologique même dans la première partie, où elle n'est pas essentielle.

Comme les propriétés qui nous intéressent ainsi que leur démonstration ne dépendent que de l'élément linéaire de nos surfaces, nous n'avons pas besoin de supposer qu'elles sont plongées dans l'espace euclidien à trois dimensions, leur métrique étant déterminée par cette „immersion". Nous les supposerons au contraire données abstraitement comme des *espaces de Riemann à deux dimensions* dans lesquels une forme quadratique, donnée dans le voisinage de chaque point et satisfaisant à certaines conditions de „raccordement", définit la métrique ([2], p. 209—211). Bien entendu, tous les résultats s'appliquent en particulier aux surfaces ordinaires de l'espace euclidien.

1. 2. Pour simplifier les démonstrations et bien qu'il soit sans doute possible de se passer de cette hypothèse, nous supposerons encore que *les surfaces sont analytiques*. On entend par là que dans le voisinage de chaque point doit exister un système de coordonnées tel que, là où deux systèmes se superposent, la transformation qui permet de passer de l'un à l'autre est donnée par des fonctions analytiques; les coefficients de la forme quadratique doivent être des fonctions analytiques de ces coordonnées.

Si nous ne retenons de la métrique de Riemann que la formule connue du cosinus de l'angle de deux courbes en un point quelconque de nos surfaces, nous pouvons les considérer comme des variétés de Riemann au sens de Koebe[2]). Nous pouvons en particulier leur appliquer le premier théorème d'équivalence et les représenter d'une manière conforme, donc analytique, soit sur le plan euclidien, soit sur l'intérieur du cercle unité. Comme il est facile de trouver une représentation analytique, évidemment pas conforme, de l'intérieur du cercle unité sur le plan euclidien, on pourra dans tous les cas représenter analytiquement nos surfaces sur le plan euclidien.

C'est ce plan, dans lequel nous introduisons des coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y, que nous prendrons comme point de départ de nos

---

[2]) Allgemeine Theorie der Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Acta Math. 50, 1927, p. 31—57, en particulier la IV[e] partie.

recherches. Nous l'appelons *un plan de Riemann. La métrique y est définie à l'aide d'une forme quadratique définie positive*

$$ds^2 = E(x, y)\, dx^2 + 2F(x, y)\, dx dy + G(x, y)\, dy^2 ,$$

dont les coefficients sont des fonctions analytiques de x et de y; la longueur de toute ligne divergente dans le plan est infinie. Par fonction analytique, nous entendons dans tout ce travail une fonction analytique réelle, c'est-à-dire développable en série entière dans le voisinage des valeurs considérées des variables. On connaît les formules permettant de calculer toutes les expressions qui ne dépendent que de l'élément linéaire, en particulier la courbure totale en un point.

1. 3. Il nous reste à formuler l'hypothèse caractéristique de ce travail. Nous considérons des *plans de Riemann à courbure totale jamais négative.*

C'est à cette classe de surfaces qu'appartiennent le plan euclidien, les paraboloïdes elliptiques, chacune des nappes des hyperboloïdes à deux nappes, et plus généralement toutes les surfaces ouvertes normales à courbure positive, comme l'a démontré Cohn-Vossen ([3], p. 80). C'est d'ailleurs dans les travaux de ce dernier, [3] et [4], qu'il faut voir le point de départ des présentes recherches.

2. Résultats[3])

Nos résultats principaux sont donnés sous la forme de trois inégalités et de quatre théorèmes dans la seconde partie de notre travail.

2. 1. Considérons une courbe $\mathfrak{F}$ rectifiable et simplement fermée, située dans un plan de Riemann. Le problème central de ce travail est la recherche d'une *inégalité isopérimétrique,* c'est-à-dire d'une relation entre la longueur L de $\mathfrak{F}$ et l'aire A du domaine compris à l'intérieur de $\mathfrak{F}$. Sans hypothèse complémentaire, relative par exemple à la courbure de la surface, le problème est évidemment beaucoup trop général. A côté de l'exemple classique *du plan euclidien* où les démonstrations de la formule bien connue

$$L^2 \geqq A \cdot 4\pi$$

ne se comptent plus, le problème a été résolu sur *la sphère* par F. Bernstein[4]) et dans *le plan hyperbolique* par E. Schmidt[5]). Celui-ci a d'ailleurs

[3]) Nous les avons résumés dans une note parue dans les Comptes Rendus, 209, 1939, p. 821—823.

[4]) Math. Ann. 60, 1905, p. 117—136.

[5]) Math. Zeitschrift, 46, 1940, p. 204.

montré que l'on peut réunir en une seule formule les inégalités isopérimétriques valables sur ces trois surfaces à courbure constante. En désignant par K la courbure totale de la surface considérée, on a:

$$L^2 \geqq A(4\pi - KA) .$$

Le signe d'égalité n'ayant lieu que pour le cercle, cette formule permet de résoudre *le problème isopérimétrique:* Parmi toutes les courbes fermées de longueur donnée, le cercle limite le domaine dont l'aire est la plus grande.

Nous ajouterons que la formule isopérimétrique du plan euclidien a été démontrée sur les surfaces minima par Carleman[6]) et d'une manière plus générale sur les surfaces à courbure totale négative par Radó et Beckenbach[7]) ; ces derniers ont également remarqué que cette formule n'est pas valable sur des surfaces à courbure totale positive. Pour ces surfaces, c'est à notre connaissance avec le théorème de Bernstein relatif à la sphère le seul résultat connu concernant le problème isopérimétrique. Si, dans le présent travail, nous n'en donnons pas encore la solution définitive, nous en fournissons du moins un élément important sous la forme d'une inégalité isopérimétrique, analogue à celle du plan euclidien. Voici d'ailleurs quelques remarques qui montreront pourquoi le problème isopérimétrique est beaucoup plus difficile à résoudre sur une surface quelconque que sur une surface à courbure totale constante.

Une condition pour qu'une courbe fermée, de longueur donnée L, limite sur une surface un domaine d'aire maximum est que la courbure géodésique de la courbe soit constante ([5], p. 154). Sur une surface à courbure totale constante, la recherche de telles courbes est considérablement simplifiée par le fait suivant: les lignes géodésiques issues d'un point fixe forment un système de coordonnées facile à étudier et leurs trajectoires orthogonales sont des courbes à courbure géodésique constante.

Il n'en est évidemment plus de même sur une surface quelconque et la notion même de cercle se décompose en plusieurs notions plus ou moins incompatibles entre elles, suivant la propriété du cercle que l'on tient à conserver.

Dans certaines démonstrations de l'inégalité isopérimétrique du plan euclidien et en supposant que la courbure de la courbe $\mathfrak{F}$ existe en tous points, on peut considérer la constante 4π comme le double de l'intégrale de la courbure de $\mathfrak{F}$[8]); on sait en effet que cette quantité que nous voulons

[6]) Math. Zeitschrift, 9, 1921, p. 154—160.

[7]) Trans. Amer. Math. Soc. 35, 1933.

[8]) P. ex. la démonstration de Crone et Frobenius, reproduite dans [5], p. 56.

désigner par $\kappa(\mathfrak{F})$ ne dépend pas de $\mathfrak{F}$ dans le plan euclidien et vaut toujours 2π. On peut alors énoncer l'inégalité isopérimétrique

$$L^2 \geqq 2A\,\kappa(\mathfrak{F})\,. \tag{I}$$

C'est sous cette forme que nous la démontrerons pour une courbe simplement fermée $\mathfrak{F}$ située dans un plan de Riemann à courbure jamais négative; nous ferons tout d'abord l'hypothèse que $\mathfrak{F}$ est une courbe analytique régulière; $\kappa(\mathfrak{F})$ représente l'intégrale de la courbure géodésique le long de $\mathfrak{F}$.

Il est avantageux de transformer légèrement cette inégalité à l'aide de la formule de Bonnet

$$\kappa(\mathfrak{F}) = 2\pi - C(\mathfrak{F})\,,$$

où $C(\mathfrak{F})$ représente l'intégrale de la courbure totale $K(x,y)$, étendue au domaine compris à l'intérieur de $\mathfrak{F}$.

Nous pouvons ainsi énoncer l'inégalité

$$L^2 \geqq 2A\,(2\pi - C(\mathfrak{F}))\,. \tag{II}$$

Cette formule est tout d'abord valable pour une courbe analytique régulière; on peut l'étendre à toute courbe rectifiable $\mathfrak{F}$ à l'aide d'une suite de courbes analytiques régulières $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots$ convergeant vers $\mathfrak{F}$.

Le coefficient de A est une quantité qui dépend encore de la courbe $\mathfrak{F}$. Pour obtenir à sa place une constante, il suffit de rappeler que $K(x,y)$ n'est par hypothèse jamais négatif; $C(\mathfrak{F})$ est donc plus petit que l'intégrale de $K(x,y)$ sur tout le plan, intégrale que nous désignons par C_T (l'égalité $C(\mathfrak{F}) = C_T$ ne peut avoir lieu que dans le cas du plan euclidien).

Etant donné un plan de Riemann à courbure non négative, nous pouvons donc formuler une inégalité valable pour une courbe quelconque de ce plan,

$$L^2 \geqq 2A\,(2\pi - C_T)\,. \tag{III}$$

Si $C_T = 2\pi$, la formule est triviale. Le membre de droite ne saurait d'ailleurs être négatif, car, comme l'a démontré Cohn-Vossen, sur une surface du type considéré $C_T \leqq 2\pi$, ([3], p. 79).

Quant au signe d'égalité dans la formule (I), nous démontrerons au *Théorème B* qu'il ne peut avoir lieu que si le plan de Riemann est isométrique au plan euclidien et si la courbe est un cercle; dans ce cas on a $C(\mathfrak{F}) = 0$. Il est clair que les conditions du signe d'égalité restent les mêmes pour les inégalités (II) et (III).

La formule (I) et le théorème B sont démontrés dans la seconde partie de notre travail, au n° 11.

La formule (I) nous a été suggérée pour les surfaces ordinaires de l'espace euclidien par les considérations suivantes: Etant donnée sur une surface ouverte à courbure positive, une courbe simplement fermée $\mathfrak{F}$, considérons la surface développable, enveloppe des plans tangents à la surface le long de $\mathfrak{F}$. Dans le cas où la surface développable est un cône, l'aire comprise à l'intérieur de $\mathfrak{F}$ sur la surface est certainement plus petite que l'aire comprise à l'intérieur de $\mathfrak{F}$ sur le cône. Pour s'en persuader, il suffit d'appliquer la généralisation du théorème d'Archimède: Si une surface convexe est entièrement située à l'intérieur d'une autre surface convexe, l'aire de la première est plus petite que l'aire de la seconde. Or, il est facile de vérifier que l'inégalité (I) est valable sur le cône ou dans le secteur correspondant à son développement sur un plan. Elle l'est donc a fortiori pour le morceau de surface considéré. Il aurait peut-être été possible de la démontrer généralement pour des morceaux de surface plongés dans l'espace ordinaire en déformant isométriquement ceux-ci jusqu'à ce que la surface développable déterminée par les plans tangents à la surface le long de la courbe $\mathfrak{F}$ soit un cône. Nos efforts dans ce sens ne nous ont conduit qu'à des résultats partiels et c'est une tout autre idée qui nous permettra de donner une démonstration générale. Nous voulons faire une dernière remarque: l'hypothèse d'une surface normale n'est pas indispensable pour les formules (I) et (II), qui pourraient être démontrées sur n'importe quel morceau simplement connexe de surface à courbure non négative. Elles sont évidemment triviales dès que $C(\mathfrak{F}) \geqq 2\pi$.

2. 2. Dans nos inégalités isopérimétriques apparaissent certaines constantes dont nous nous sommes proposé de justifier le choix. Nous bornerons nos considérations à l'inégalité (III) pour laquelle le résultat obtenu est particulièrement intéressant.

Considérons un plan de Riemann fixe et l'ensemble de toutes les courbes simplement fermées de ce plan. A chaque courbe $\mathfrak{F}$ nous faisons correspondre la valeur du quotient $\dfrac{L^2(\mathfrak{F})}{A(\mathfrak{F})}$. L'inégalité isopérimétrique (III) nous apprend que l'ensemble de ces valeurs est borné inférieurement. Cette inégalité nous fournit même une estimation de la borne inférieure. On a évidemment

$$\text{borne inf.} \left(\frac{L^2}{A}\right) \geqq 2(2\pi - C_T) .$$

Lorsque nous aurons démontré que, dans cette formule, seul le signe d'égalité est valable, nous aurons en même temps montré qu'il est impossible de remplacer la constante $2(2\pi - C_T)$ par une constante plus grande dans l'inégalité (III), que nous voulons valable pour toutes les courbes du plan de Riemann considéré.

Il ne nous reste plus qu'à démontrer le

Théorème C. *Dans un plan de Riemann à courbure totale non négative, on a pour l'ensemble des courbes simplement fermées*

$$\text{borne inf.} \left(\frac{L^2}{A}\right) = 2(2\pi - C_T) \ .$$

La démonstration de ce théorème, que nous présenterons au n⁰ 12, consistera à trouver une suite de courbes fermées $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots$ pour lesquelles

$$\lim_{n \to \infty} \frac{L^2(\mathfrak{F}_n)}{A(\mathfrak{F}_n)} = 2(2\pi - C_T) \ .$$

Il nous faut remettre au n⁰ 3 une explication plus détaillée de la construction d'une telle suite qui repose sur la méthode caractéristique de ce travail.

2. 3. On peut considérer la question suivante comme le point de départ du présent travail:

Etant donnés un plan de Riemann à courbure totale non négative et un nombre L, l'aire des domaines limités par une courbe fermée de longueur L est-elle supérieurement bornée?

A cette question nous répondrons au n⁰ 13 par le

Théorème D. *Si $C_T < 2\pi$, l'aire des domaines limités par une courbe de longueur L est bornée supérieurement pour tout L.*

Si $C_T = 2\pi$, l'aire des domaines limités par une courbe de longueur $L < L^*$ est bornée supérieurement; L^* est une constante positive (éventuellement infinie) qui dépend du plan de Riemann considéré.

Ce théorème est au fond une forme très affaiblie de la solution habituelle du problème isopérimétrique. On remarquera en particulier qu'il serait complètement faux d'en déduire immédiatement l'existence d'une courbe fermée $\mathfrak{F}$ limitant un domaine d'aire maximum.

La première partie du théorème *D* est applicable par exemple à la surface formée par une des nappes d'un hyperboloïde à deux nappes. La seconde partie concerne le cas du paraboloïde elliptique où l'on trouve pour L^* la valeur ∞, ou celui de la surface de révolution dont le méridien a pour équation

$$z = \frac{1}{\cos x} \quad , \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \ ,$$

où l'on trouve pour L^* la valeur π^2.

2. 4. Quant au n⁰ 10, nous y démontrerons un théorème presque évident pour des surfaces plongées dans l'espace ordinaire, mais moins immédiat pour les surfaces abstraites que nous considérons:

Théorème A. *L'aire totale d'un plan de Riemann à courbure non négative est infinie.*

C'est du reste une condition essentielle pour que les conséquences que nous avons tirées de nos inégalités isopérimétriques ne soient pas triviales.

Remarquons d'autre part que ce théorème n'est pas vrai dans un plan de Riemann à courbure quelconque; il est facile en effet de construire des surfaces ouvertes normales dont l'aire totale est finie.

3. Méthode

3. 1. Nous allons dire maintenant quelques mots du procédé qui nous a permis de démontrer la formule isopérimétrique (I) et les théorèmes A, B, C. Il s'agissait avant tout de trouver un système de coordonnées adéquat à notre problème.

Crone et Frobenius[9]) ont présenté une démonsration de l'inégalité isopérimétrique du plan euclidien à l'aide des parallèles à la courbe $\mathfrak{F}$, définies de la manière suivante: C'est le lieu des points que l'on obtient en reportant une longueur constante sur toutes les normales à $\mathfrak{F}$. On est assuré que les courbes ainsi obtenues sont analytiques régulières, seulement si $\mathfrak{F}$ est une courbe analytique régulière et convexe et si l'on ne considère que les parallèles extérieures à $\mathfrak{F}$. Par contre, les parallèles intérieures ou les parallèles à une courbe non convexe peuvent présenter des points singuliers.

Sur une surface à courbure non nulle, la situation est beaucoup plus désagréable. Rappelons tout d'abord la définition que Gauss a donnée des *parallèles géodésiques à une courbe* $\mathfrak{F}$ analytique régulière: Ce sont les trajectoires orthogonales de la famille des lignes géodésiques normales à $\mathfrak{F}$; on sait que l'on peut également les définir comme lieux des points obtenus en reportant à partir de $\mathfrak{F}$ une longueur constante sur toutes les lignes géodésiques normales à $\mathfrak{F}$.

Or ce n'est que dans le voisinage de la courbe $\mathfrak{F}$ que l'on peut affirmer

---

[9]) Voir note [8]), voir aussi la démonstration de *Bernstein*, note [4]).

que les parallèles géodésiques sont analytiques régulières. Ailleurs, elles peuvent présenter des points singuliers et il est possible que des points de la surface soient situés sur plusieurs parallèles géodésiques. On ne saurait donc les employer, sans précautions, comme coordonnées sur toute la surface. Nous avons dû en modifier quelque peu la définition pour obtenir un système de courbes utilisable dans nos plans de Riemann tout entiers.

Nous définissons *la vraie parallèle à distance p d'une courbe* $\mathfrak{F}$ comme le lieu des points situés à la distance p de $\mathfrak{F}$. Nous entendons par distance entre une courbe $\mathfrak{F}$ et un point P, la borne inférieure de la longueur des arcs joignant P et un point quelconque de $\mathfrak{F}$. Pour éviter toute confusion, nous comptons la distance positivement ou négativement suivant que le point P est à l'extérieur ou à l'intérieur de $\mathfrak{F}$.

La vraie parallèle à distance p de $\mathfrak{F}$ se compose d'un nombre fini d'arcs analytiques appartenant à la parallèle géodésique à distance p de $\mathfrak{F}$; ces arcs forment un nombre fini de courbes fermées. Pour de petites valeurs de p, on sait que les vraies parallèles coïncident avec les parallèles géodésiques. La propriété essentielle des vraies parallèles, celle qui les rend vraiment adéquates à des considérations géométriques globales est la suivante: *Par tout point d'un plan de Riemann passe une et une seule vraie parallèle à une courbe donnée* $\mathfrak{F}$.

3. 2. La principale difficulté de cette méthode provient de l'angle que forment en général deux arcs d'une vraie parallèle au point où ils se raccordent. Nous verrons qu'un tel point est ce que nous avons appelé un point extrême et dont voici la définition: On sait qu'une ligne géodésique normale à $\mathfrak{F}$ fournit entre un de ses points P et un point quelconque de $\mathfrak{F}$ un arc de longueur minimum — du moins si P n'est pas trop éloigné de $\mathfrak{F}$. Nous appelons *point extrême* le point pour lequel une ligne géodésique normale à $\mathfrak{F}$ perd cette propriété.

Signalons qu'une étude du lieu des points extrêmes a déjà été entreprise par Myers[10]) dans un cas moins général que le nôtre. Myers s'est borné en effet à étudier les points extrêmes — qu'il appelle d'ailleurs „points minimum" — pour la famille des lignes géodésiques issues d'un point fixe. Ses considérations permettraient d'étudier le lieu des points à distance constante d'un point fixe, courbe que l'on pourrait appeler *un vrai cercle.*

Nous avons réussi à généraliser un bon nombre des résultats de Myers et à en tirer les conséquences désirées pour nos vraies parallèles; ceci

[10]) Connections between differential geometry and topology, I. Simply connected surfaces, Duke Math. Journal, 1, 1935, p. 376—391.

représente un travail préliminaire assez considérable. Aussi, pour ne pas surcharger les démonstrations de nos résultats principaux sur le problème isopérimétrique, nous avons réunis ces considérations dans une première partie et nous les avons résumées en 5 théorèmes dont les énoncés sont seuls nécessaires à la compréhension de la seconde partie.

3. 3. Etant donnée dans un plan de Riemann une courbe analytique régulière simplement fermée $\mathfrak{F}$, nous désignons par $L(p)$ la longueur de la vraie parallèle à distance p de $\mathfrak{F}$. La fonction $L(p)$, *continue* pour toute valeur de p, est même *analytique*, sauf éventuellement pour un nombre fini ou pour une suite divergente de valeurs de p.

Pour la dérivée de $L(p)$, on peut donner deux inégalités suivant que l'on considère une parallèle extérieure ou intérieure à $\mathfrak{F}$. En désignant par $\kappa(\mathfrak{F})$ l'intégrale de la courbure géodésique le long de $\mathfrak{F}$ et par $C(p)$ l'intégrale de la courbure totale sur le domaine compris entre $\mathfrak{F}$ et la vraie parallèle à distance p, on a

$$\text{pour } p > 0, \ \frac{dL(p)}{dp} \leqq \kappa(\mathfrak{F}) - C(p)$$

$$\text{et pour } p < 0, \ \frac{dL(p)}{dp} \geqq \kappa(\mathfrak{F}) + C(p) .$$

L'aire du domaine situé à l'intérieur de $\mathfrak{F}$ se calcule à l'aide de la formule

$$A(\mathfrak{F}) = \int_{\bar{p}}^{0} L(p)\, dp \ ,$$

où $\bar{p}$ est une constante négative dépendant de $\mathfrak{F}$.

Dans un plan de Riemann à courbure totale positive, ces diverses formules permettent d'établir l'inégalité isopérimétrique linéaire suivante, généralisation d'une formule bien connue démontrée par Bonnesen[11]) dans le plan euclidien:

$$A(\mathfrak{F}) \leqq L(\mathfrak{F}) \cdot (-\bar{p}) - \kappa(\mathfrak{F}) \frac{\bar{p}^2}{2} \ .$$

Une transformation algébrique élémentaire permet de passer de cette formule à notre inégalité isopérimétrique (I).

On peut exprimer d'autre part l'aire totale du plan de Riemann à l'aide de l'intégrale suivante:

$$A_T = \int_{\bar{p}}^{\infty} L(p)\, dp \ .$$

[11]) Les problèmes des isopérimètres, Paris, 1929, p. 60 et suiv.

La démonstration du théorème A repose sur une remarque facile à déduire des travaux de Cohn-Vossen ([3], p. 132), à savoir que

$$\varliminf_{p \to \infty} L(p) > 0 \ .$$

Quant au théorème C, la suite de courbes sur laquelle doit reposer sa démonstration, d'après les considérations du n^0 2. 2 consistera en une suite de vraies parallèles à distance de plus en plus grande d'une courbe $\mathfrak{F}$ fixe, mais quelconque. On le démontre à l'aide de la formule suivante, qui nous fournit un renseignement intéressant sur le comportement asymptotique des vraies parallèles à une courbe $\mathfrak{F}$ située dans un plan de Riemann à courbure non négative:

$$\lim_{p \to \infty} \frac{L(p)}{p} = 2\pi - C_T \ .$$

PREMIÈRE PARTIE

Coordonnées géodésiques et vraies parallèles géodésiques dans un plan de Riemann

4. Plan de Riemann

4. 1. Nous appelons plan de Riemann un plan euclidien aux coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y, dans lequel est donnée en chaque point *une forme quadratique définie positive*,

$$ds^2 = E(x,y)\, dx^2 + 2F(x,y)\, dx\, dy + G(x,y)\, dy^2 \ ,$$

introduisant une nouvelle métrique.

Soit un arc de courbe $\mathfrak{A}$ donné par les deux fonctions dérivables

$$x = x(t) \qquad \text{et} \qquad y = y(t)$$

définies dans l'intervalle $t_1 \leqq t \leqq t_2$. On calcule la longueur de $\mathfrak{A}$ à l'aide de l'intégrale suivante

$$L(\mathfrak{A}) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E(x\,,\,y)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2F(x\,,y)\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + G(x\,,y)\cdot\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \ .$$

Nous supposons que la forme quadratique satisfait aux conditions suivantes:

1) *Les fonctions* $E(x,y)$, $F(x,y)$, $G(x,y)$ *sont des fonctions analytiques réelles de* x *et de* y *dans tout le plan*, c'est-à-dire que dans le voisinage de tout point P_0, de coordonnées x_0, y_0, elles admettent un développement en série entière de $x - x_0$ et $y - y_0$.

2) *La longueur de toute courbe divergente est infinie.*

Nous appelons l'image topologique de l'intervalle $0 \leqq t < 1$ *une courbe divergente* si toute suite de points divergente sur la courbe est divergente dans le plan. Nous disons en général qu'*une suite infinie de points est divergente* dans un ensemble de points $\mathfrak{E}$ si elle ne possède aucun point d'accumulation dans $\mathfrak{E}$. Dans notre cas particulier, une suite de points est divergente sur la courbe si les valeurs $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ correspondant aux points de la suite, tendent vers 1; une suite de points est divergente dans le plan si la suite des expressions $x^2(t_n) + y^2(t_n)$ tend vers l'infini.

Désormais la longueur d'un arc de courbe ainsi que toutes les quantités qui ne dépendent que de l'élément linéaire, comme la courbure géodésique d'une courbe, l'angle de deux courbes, l'aire d'un domaine, la courbure totale en un point, sont entendues, à moins d'indication contraire, au sens de la métrique de Riemann.

4. 2. Les hypothèses auxquelles doit satisfaire un plan de Riemann en font *une surface analytique complète* suivant la définition donnée dans le travail de MM. Hopf et Rinow [2] dont nous voulons rappeler quelques résultats.

La distance $\varrho(A,B)$ entre deux points A et B, définie comme borne inférieure de la longueur des arcs de courbe rectifiables joignant A et B, possède les trois propriétés caractéristiques de la „distance" dans les espaces métriques.

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad \varrho(A,B) = \varrho(B,A)\,,\\
&\text{b)}\quad \varrho(A,A) = 0\,, \qquad \varrho(A,B) > 0 \quad \text{si} \quad A \neq B\,,\\
&\text{c)}\quad \varrho(A,B) + \varrho(B,C) \geqq \varrho(A,C)\,.
\end{aligned}$$

Soit une suite de points $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ tendant (au sens euclidien) vers un point limite P. On a $\lim\limits_{n \to \infty} \varrho(P,P_n) = 0$, ce qui signifie que les notions de voisinage, c'est-à-dire de suite convergente de points, au sens euclidien et au sens de la nouvelle métrique sont équivalentes.

Nous voulons encore remarquer que si $P_n \to P$ et $Q_n \to Q$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(P_n, Q_n) = \varrho(P, Q)$, ce qui signifie que la distance entre deux points (au sens de Riemann) est une fonction continue de ces deux points.

4. 3. La condition 2) du n⁰ 4. 1 est équivalente aux conditions suivantes:

2′) *Sur toute ligne géodésique, on peut reporter, à partir d'un point fixe et de chaque côté, une longueur quelconque (au sens de la métrique de Riemann).*

2″) *Tout ensemble infini borné de points (au sens de la métrique de Riemann) admet au moins un point d'accumulation.*

Cette dernière montre qu'un plan de Riemann est un espace de Riemann *normal* au sens de M. E. Cartan[12]. Elle permet aussi d'affirmer que les notions de suite divergente de points au sens euclidien et au sens de la métrique de Riemann sont équivalentes; la distance à un point fixe tend dans les deux métriques vers l'infini. Les notions d'ensemble borné sont aussi équivalentes dans les deux métriques. Nous emploierons à plusieurs reprises le lemme suivant: *Si l'ensemble des points situés sur une suite de courbes simplement fermées est borné, l'ensemble des points situés à l'intérieur de ces courbes est aussi borné.*

Sa démonstration peut consister à en remarquer l'évidence en géométrie euclidienne.

5. Arc minimum

5. 1. Nous appelons un arc joignant deux points donnés A et B et ayant la longueur $\varrho(A, B)$ *un arc minimum entre les deux points.*

Dans un plan de Riemann, entre deux points quelconques, il existe au moins un arc minimum. C'est un arc géodésique.

Ce théorème est démontré dans [2], p. 216, pour toute surface complète.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un arc géodésique entre deux points A et B dont nous désignons la longueur par $L(A, B)$ soit un arc minimum est que la formule $L(A, B) = \varrho(A, B)$ soit vérifiée.

5. 2. Dorénavant, et durant toute la première partie de ce travail, nous désignerons par $\mathfrak{F}$ *une courbe analytique, régulière, simplement fermée.* Nous rappelons qu'une courbe donnée sous forme paramétrique par les deux équations

$$x = x(t) \qquad \text{et} \qquad y = y(t)$$

[12]) Voir note [1]).

est analytique en un point P si pour la valeur t_0 correspondant à P les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont analytiques, c'est-à-dire développables en séries entières de $t - t_0$. Nous dirons que la courbe est régulière en P si l'une des deux coordonnées est une fonction analytique de l'autre, c'est-à-dire si l'on peut exprimer l'une des deux différences $x - x_0$ et $y - y_0$ comme série entière de l'autre. C'est toujours le cas si l'une des deux quantités $\frac{dy(t_0)}{dt}$ et $\frac{dx(t_0)}{dt}$ n'est pas nulle. Une courbe est analytique régulière si elle est analytique régulière en chacun de ses points.

Si la courbe est donnée implicitement par une équation $f(x,y) = 0$ il suffit, grâce au théorème de Weierstrass sur les fonctions implicites, pour qu'elle soit analytique régulière en un point de coordonnées x_0, y_0 que les trois conditions suivantes soient satisfaites.

1) $f(x, y)$ est une fonction analytique de x, y en x_0, y_0,
2) $f(x_0, y_0) = 0$,
3) $f_x(x_0, y_0)$ et $f_y(x_0, y_0)$ ne sont pas tous les deux nuls.

On sait que la courbe simplement fermée $\mathfrak{F}$ divise le plan en deux régions, l'intérieur de $\mathfrak{F}$ et l'extérieur. Soit $L(\mathfrak{F})$ la longueur de $\mathfrak{F}$. Nous choisissons comme paramètre sur $\mathfrak{F}$ la longueur d'arc q, comptée positivement à partir d'un point fixe de $\mathfrak{F}$ de manière à laisser l'intérieur de $\mathfrak{F}$ à gauche. Il suffit de considérer q variant de o à $L(\mathfrak{F})$.

5. 3. Nous appelons *distance du point P à la courbe $\mathfrak{F}$* la borne inférieure de la longueur des arcs de courbe rectifiables joignant P et un point quelconque Q de $\mathfrak{F}$, et nous la désignons par $\varrho(P, \mathfrak{F})$.

5. 4. Nous appelons un arc joignant P et un point Q_0 de $\mathfrak{F}$ et ayant la longueur $\varrho(P, \mathfrak{F})$ *un arc minimum entre la courbe $\mathfrak{F}$ et le point P*. Dans la suite, nous dirons simplement arc minimum lorsqu'il ne peut y avoir de confusion avec l'arc minimum entre deux points.

Dans un plan de Riemann, entre une courbe $\mathfrak{F}$ et un point P non situé sur la courbe, il existe au moins un arc minimum. Cet arc joint P et un point Q_0 de $\mathfrak{F}$. C'est aussi un arc minimum entre ces deux points.

Il est clair que

$$\varrho(P, \mathfrak{F}) = \text{borne inf. } \varrho(P, Q),$$

si nous désignons par Q un point quelconque de $\mathfrak{F}$. Nous pouvons affirmer grâce au n° 4. 2 que $\varrho(P, Q)$ est une fonction continue de q. Elle prend son minimum pour une certaine valeur q_0 par exemple, correspondant à un point Q_0 de $\mathfrak{F}$. On a donc $\varrho(P, \mathfrak{F}) = \varrho(P, Q_0)$. D'après le n° 5. 1, il existe un arc minimum entre P et Q_0. Il a la longueur $\varrho(P, Q_0)$ égale à $\varrho(P, \mathfrak{F})$. C'est donc un arc minimum entre $\mathfrak{F}$ et P.

5. 5. *Un arc minimum entre un point P et une courbe $\mathfrak{F}$ est situé sur une ligne géodésique normale à $\mathfrak{F}$. Il est entièrement compris dans la région du plan de Riemann ou se trouve P.*

Un arc minimum entre P et $\mathfrak{F}$ est un arc géodésique, puisque c'est un arc minimum entre deux points. Il est évident qu'il n'a avec $\mathfrak{F}$ aucun point commun autre que son extrémité Q_0 et qu'il est par conséquent entièrement situé soit à l'intérieur, soit à l'extérieur de $\mathfrak{F}$. L'orthogonalité de l'arc minimum et de la courbe $\mathfrak{F}$ en Q_0 se démontre facilement. On prend sur l'arc minimum un point P' suffisamment près de Q_0; si cet arc ne formait pas en Q_0 un angle droit avec $\mathfrak{F}$, on pourrait le remplacer par un arc plus court comme on peut le constater à l'aide de [1], deuxième partie, p. 416.

5. 6. D'un point Q_0 de $\mathfrak{F}$ ne peut partir qu'un arc minimum entre P et $\mathfrak{F}$. Car un arc minimum est un arc de géodésique normal à $\mathfrak{F}$ en Q_0 et par un point, dans une direction, ne passe qu'une ligne géodésique. Par contre, il peut y avoir plusieurs points $Q_0, Q_1, \ldots$, sur $\mathfrak{F}$ d'où partent un arc minimum entre P et $\mathfrak{F}$. Nous montrerons toutefois au n^0 8. 12 qu'il n'y en a en général qu'un nombre fini.

5. 7. *Soit $\mathfrak{A}$ un arc minimum entre le point P et la courbe $\mathfrak{F}$ et soit P' un point situé sur l'arc $\mathfrak{A}$. L'arc $\mathfrak{A}'$ situé sur $\mathfrak{A}$ entre P' et $\mathfrak{F}$ est un arc minimum.*

Nous renonçons à donner la démonstration de cette proposition d'ailleurs évidente.

5. 8. *Deux arcs minimum issus de deux points différents de $\mathfrak{F}$ ne peuvent avoir d'autre point commun que leur extrémité.*

Il suffit de montrer que si deux arcs minimum $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ partent de deux points différents Q_0 et Q' et aboutissent au même point P, aucun d'eux ne peut faire partie d'un arc minimum plus grand.

Nous remarquons tout d'abord que les deux arcs $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ doivent avoir la même longueur. Si l'un des arcs faisait partie d'un arc minimum plus grand, par exemple si l'arc $\mathfrak{A}$ était situé sur un arc minimum $\mathfrak{B}$, l'autre arc $\mathfrak{A}'$ serait aussi situé sur un arc minimum plus grand $\mathfrak{B}'$, formé de $\mathfrak{A}'$ et de la partie de $\mathfrak{B}$ qui ne contient pas $\mathfrak{A}$. L'un au moins des deux arcs $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}'$ ferait un angle en P, car les deux arcs géodésiques différents $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ ne peuvent avoir la même direction en P. Or un arc géodésique ne peut pas faire d'angle.

5. 9. *L'arc limite d'une suite d'arcs minimum est un arc minimum.*

Soit une suite d'arcs minimum $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n, \ldots$ joignant les points P_1 et Q_1, P_2 et $Q_2, \ldots, P_n$ et $Q_n, \ldots$ tendant vers un arc limite $\mathfrak{A}$ dont les extrémités sont P et Q. Pour chacun des arcs minimums, on a $L(\mathfrak{A}_n) = \varrho(P_n, Q_n)$. Un théorème classique sur les lignes géodésiques nous apprend que $\lim\limits_{n\to\infty} L(\mathfrak{A}_n) = L(\mathfrak{A})$; le n⁰ 4. 2 entraîne d'autre part $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(P_n, Q_n) = \varrho(P, Q)$. D'où $L(\mathfrak{A}) = \varrho(P, Q)$, relation qui nous montre que l'arc limite $\mathfrak{A}$ est aussi un arc minimum.

6. Coordonnées géodésiques

6. 1. Etant donnée une courbe $\mathfrak{F}$, nous prenons, comme au n⁰ 5. 2 la longueur d'arc q comme paramètre.

En chaque point de $\mathfrak{F}$ nous menons la géodésique normale et nous portons sur elle la longueur p, positive sur la partie de la géodésique qui se dirige vers l'extérieur de $\mathfrak{F}$, négative sur la partie de la géodésique qui se dirige vers l'intérieur de $\mathfrak{F}$. En tenant compte de la condition 2') du n⁰ 4. 3, on peut affirmer qu'à tout couple de valeurs (p, q) correspond un point du plan de Riemann. En général, à un point du plan de Riemann peuvent correspondre plusieurs couples de valeurs (p_1, q_1), $(p_2, q_2) \ldots$. Toutefois un théorème connu permet d'affirmer qu'il existe un nombre positif p^* tel que, si un point P_0 correspond à un couple de valeurs (p_0, q_0) où $|p_0| < p^*$, ce couple de valeurs soit le seul pour lequel $|p| < p^*$. Ces points se trouvent dans le voisinage de la courbe, où p et q constituent un système de coordonnées sans singularités. Entre P_0 et la courbe $\mathfrak{F}$ n'existe qu'un arc de géodésique plus petit que p^*; c'est nécessairement le seul arc minimum entre P_0 et $\mathfrak{F}$.

6. 2. On sait[13]) que l'élément linéaire peut se mettre sous la forme

$$ds^2 = dp^2 + f^2(p, q)\, dq^2$$

où la fonction $f(p, q)$ est une fonction analytique réelle, en tout cas pour de petites valeurs de p et a les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad f(0, q) = 1 \\ &\text{b)}\quad f_p(0, q) = k(q) \\ &\text{c)}\quad f(p, q) = f(p, q + L(\mathfrak{F})) \end{aligned}$$

où $k(q)$ représente la courbure géodésique de la courbe.

La fonction $f(p, q)$ satisfait encore à l'équation différentielle

$$\text{d)}\quad f_{pp}(p, q) + K(p, q) \cdot f(p, q) = 0$$

où $K(p, q)$ représente la courbure totale de Gauss du plan de Riemann.

[13]) Voir p. ex. [1], deuxième partie, p. 412 et suivantes.

6. 3. *La fonction $f(p, q)$ est prolongeable analytiquement pour tout p et pour tout q. Il en est de même pour la fonction* $K(p, q) = \dfrac{-f_{pp}(p,q)}{f(p,q)}$.

Nous entendons par là que dans le voisinage de tout couple de valeurs réelles (p_0, q_0), $f(p, q)$ et $K(p, q)$ sont des fonctions développables en série entière de $p - p_0$ et de $q - p_0$. La démonstration est basée sur le théorème suivant, relatif aux familles de lignes géodésiques:

6. 4. *L'extrémité d'un arc géodésique dépend analytiquement du point initial, de la direction initiale et de la longueur de l'arc géodésique.*

Ce théorème signifie dans notre cas particulier que les deux fonctions

$$x = x(p, q) \qquad \text{et} \qquad y = y(p, q) \, ,$$

qui donnent la correspondance entre les coordonnées géodésiques et les coordonnées cartésiennes, sont des fonctions analytiques de p et q pour tout p et pour tout q. Ces fonctions satisfont au système d'équations suivant obtenu en identifiant les deux formes de l'élément linéaire:

$$1. \quad E(x,y)\cdot x_p^2(p,q) + 2F(x,y)\cdot x_p(p,q)\cdot y_p(p,q) + G(x,y)\cdot y_p^2(p,q) = 1$$

$$2. \quad E(x,y)\cdot x_p(p,q)\cdot x_q(p,q) + F(x,y)\cdot (x_p(p,q)\cdot y_q(p,q) + x_q(p,q)\cdot y_p(p,q)) + \\ + G(x,y)\cdot y_p(p,q)\cdot y_q(p,q) = 0$$

$$3. \quad E(x,y)\cdot x_q^2(p,q) + 2F(x,y)\cdot x_q(p,q)\cdot y_q(p,q) + G(x,y)\cdot y_q^2(p,q) = f^2(p,q) \, .$$

6. 5. Pour démontrer le n⁰ 6. 3, il suffit de vérifier par un calcul élémentaire la formule

$$f(p,q) = \sqrt{E(x,y)\cdot G(x,y) - F^2(x,y)}\,(x_p(p,q)\cdot y_q(p,q) - x_q(p,q)\cdot y_p(p,q))$$

exprimant la transformation de l'élément de surface et valable tout d'abord pour de petites valeurs de p, et de constater que le membre de droite est une fonction analytique pour tout p et pour tout q, l'expression $EG - F^2$ étant une fonction analytique positive de x et de y, donc de p et de q. Quant à la courbure, le „theorema egregium" de Gauss nous apprend que c'est une fonction analytique de x et de y, donc aussi de p et de q.

6. 6. Puisque les fonctions $x = x(p, q)$ et $y = y(p, q)$ sont développables en série entière, il en est de même pour les fonctions inverses $p = p(x, y)$ et $q = q(x, y)$, à moins que le déterminant fonctionnel ne soit nul. Donc si $x_p(p, q)\cdot y_q(p, q) - x_q(p, q)\cdot y_p(p, q) \neq 0$ les fonctions inverses

$p(x, y)$ et $q(x, y)$ sont analytiques dans le voisinage des valeurs considérées; la formule du n° 6. 5 nous montre que ceci a lieu partout où $f(p, q) \neq 0$.

6. 7. Pour examiner plus commodément la fonction $f(p, q)$ et certaines propriétés des lignes géodésiques normales à $\mathfrak{F}$, nous allons considérer p et q comme des coordonnées cartésiennes rectangulaires dans un plan auxiliaire. La courbe $\mathfrak{F}$ correspond à l'axe des q. La correspondance est biunivoque si l'on ne considère que le segment $0 \leqq q \leqq L(\mathfrak{F})$ dont on identifie les extrémités. Les lignes géodésiques normales à la courbe correspondent aux droites parallèles à l'axe des p et leur équation est $q = q_0$. Il nous suffit à cause de la périodicité de considérer la bande comprise entre les droites $q = 0$ et $q = L(\mathfrak{F})$, ces deux droites étant à identifier puisqu'elles représentent la même ligne géodésique. Ce domaine va jouer un rôle important dans la suite de nos développements comme image du plan de Riemann et nous voulons le désigner par $\mathfrak{D}$. Il est clair qu'à un point de $\mathfrak{D}$ correspond un seul point du plan de Riemann. Les n^os^ 5. 4 et 5. 5, qui nous apprennent que tout point du plan de Riemann est situé au moins sur une ligne géodésique normale à $\mathfrak{F}$, nous montrent qu'à un point du plan de Riemann correspond au moins un point de $\mathfrak{D}$. Nous ne saurions cependant affirmer que la correspondance soit en général biunivoque. Pour qu'elle le devienne, il nous faudra éventuellement restreindre le domaine $\mathfrak{D}$.

Nous voulons remarquer que toute suite de points correspondants aux points d'une suite divergente dans le plan de Riemann est évidemment divergente dans le domaine $\mathfrak{D}$. La réciproque n'est pas vraie en général.

La fonction $f(p, q)$ est analytique dans tout le plan p, q, donc en particulier dans le domaine $\mathfrak{D}$.

7. Lieu des foyers

7. 1. Lorsque l'on considère la famille des lignes géodésiques normales à une courbe $\mathfrak{F}$, on appelle foyer sur une ligne géodésique le point où cette ligne géodésique cesse de fournir un minimum de la longueur par rapport aux courbes voisines.

On sait que le foyer sur une géodésique $q = q_0$ est donné dans notre système de coordonnées géodésiques par la première valeur de p qui annule $f(p, q_0)$. Nous désignons par $P(q_0)$ la première valeur positive de p et par $N(q_0)$ la première valeur négative de p qui annulent $f(p, q_0)$. Si pour p positif $f(p, q_0)$ est toujours positif, nous attribuerons à $P(q_0)$ la valeur ∞. Si pour p négatif, $f(p, q_0)$ est toujours positif, nous attribuerons à $N(q_0)$

la valeur $-\infty$. Dans les quelques pages qui vont suivre, nous nous bornerons à donner les démonstrations pour l'une des deux fonctions $P(q)$ et $N(q)$ qui se comportent exactement de la même façon.

7. 2. *Les fonctions $p = P(q)$ et $p = N(q)$ sont des fonctions analytiques de q.*

Nous entendons par là que si $p_0 = P(q_0)$ n'est pas infini, la fonction $P(q)$ est développable en série entière de $q - q_0$ $\{$idem pour $N(q)\}$.

La démonstration consiste à appliquer le théorème sur les fonctions implicites cité au n⁰ 5. 2. En effet

1) $f(p, q)$ est une fonction analytique de p et q d'après le n⁰ 6. 3.

2) $f(p_0, q_0) = 0$.

3) $f_p(p_0, q_0) \neq 0$; c'est une conséquence de l'équation $f_{pp} + K \cdot f = 0$ à laquelle doit satisfaire la fonction $f(p, q)$ suivant le n⁰ 6. 2. Si $f(p_0, q_0)$ et $f_p(p_0, q_0)$ étaient tous deux nuls, $f(p, q_0)$ serait identiquement nul pour tout p, ce qui est impossible, puisque $f(0, q_0) = 1$.

7. 3. Nous venons de voir que la fonction $p = P(q)$ est analytique, donc continue, pour toute valeur q_0 où $P(q_0)$ n'est pas infini. Nous voulons démontrer qu'il en est de même si $P(q_0)$ est infini, autrement dit *pour toute suite $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} (q_n) = q_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} P(q_n)$ existe et est égale à $P(q_0)$* $\{$idem pour $N(q)\}$.

Si $P(q_0)$ est fini, le lemme est déjà démontré. Il suffit de démontrer que, si $P(q_0)$ est infini, $P(q_n)$ tend vers l'infini. Si ce n'était pas le cas, il existerait une suite partielle $P(q_{n'})$ tendant vers $p' \neq \infty$. Or

$$\lim_{n'\to\infty} q_{n'} = q_0 \quad \text{et} \quad \lim_{n'\to\infty} P(q_{n'}) = p' ,$$

d'autre part $f(P(q_{n'}), q_{n'}) = 0$ d'où l'on tire que $f(p', q_0) = 0$ puisque $f(p, q)$ est une fonction continue. Il existerait donc une valeur p' annulant $f(p, q_0)$, contrairement à l'hypothèse que $P(q_0)$ est infini.

7. 4. *S'il existe une suite infinie de valeurs $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ telles que $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = q_0$ et que $\dfrac{dN(q_n)}{dq} = 0$,*

on a, ou bien $N(q) = p_0$ pour tout q,

ou bien $\lim\limits_{n\to\infty} N(q_n) = -\infty$.

$\{$Pour $P(q)$ la première possibilité est exclue, car il existe toujours, d'après les nos 8.1 et 8.4 une valeur au moins de q pour laquelle $P(q)$ est infini; si les hypothèses sont satisfaites, on a $\lim_{n\to\infty} P(q_n) = \infty\}$.

Nous savons que $\lim_{n\to\infty} N(q_n) = p_0$.

Ou bien $p_0 = -\infty$, auquel cas la proposition est démontrée; ou bien p_0 est fini; dans ce cas, pour $q = q_0$ la fonction $\dfrac{dN(q)}{dq}$ est analytique en même temps que $N(q)$. Comme elle a une infinité de zéros autour de q_0, elle est identiquement nulle et $N(q)$ est une constante

$$N(q) \equiv p_0$$

On montre facilement dans ce cas que le lieu des foyers se réduit à un point.

7. 5. Nous ferons à plusieurs reprises usage de la proposition suivante:

Soit $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ une suite de points tendant vers un point limite P_0.

Soient (p_n, q_n) et (p'_n, q'_n) deux couples différents de valeurs correspondant au point P_n pour chaque n.

Soient
$$p_0 = \lim_{n\to\infty} p_n \ , \quad q_0 = \lim_{n\to\infty} q_n \ ;$$
$$p'_0 = \lim_{n\to\infty} p'_n \ , \quad q'_0 = \lim_{n\to\infty} q'_n \ .$$

Si $p_0 = p'_0$ et $q_0 = q'_0$ le point P_0 est un foyer sur la géodésique $q = q_0$.

En effet, les fonctions $p(x,y)$ et $q(x,y)$ ne sont pas uniformes dans le voisinage du point $P_0(x_0, y_0)$; elles ne sont donc pas analytiques, ce qui ne peut avoir lieu, d'après le n° 6. 6, que si $f(p_0, q_0) = 0$, c'est-à-dire si P_0 est un foyer sur la géodésique $q = q_0$,

7. 6. *Les points singuliers du lieu des foyers sont ceux où* $\dfrac{dP(q)}{dq} = 0$ ou $\dfrac{dN(q)}{dq} = 0$.

Considérons les équations différentielles du n° 6. 4 auxquelles doivent satisfaire les fonctions $x(p, q)$ et $y(p, q)$ qui donnent la relation entre les deux systèmes de coordonnées.

Dans le domaine $\mathfrak{D}$ le lieu des foyers, solution de l'équation $f(p,q) = 0$, est donné par la fonction analytique $p = P(q)$ {ou par $p = N(q)$, pour laquelle la démonstration serait analogue}.

Dans le plan de Riemann, le lieu des foyers est donné alors sous forme paramétrique par

$$x = X(q) = x(P(q), q)\,,$$
$$y = Y(q) = y(P(q), q)\,.$$

En tenant compte de $x_q = y_q = 0$ qu'on tire de l'équation 3) du n⁰ 6. 4, on trouve pour les deux dérivées

$$\frac{dX(q)}{dq} = x_p(p, q)\,\frac{dP(q)}{dq}$$
$$\frac{dY(q)}{dq} = y_p(p, q)\,\frac{dP(q)}{dq}\,,$$

$x_p(p, q)$ et $y_p(p, q)$ ne pouvant être tous les deux nuls à cause de l'équation 1) du n⁰ 6. 4, les dérivées $\frac{dX(q)}{dq}$ et $\frac{dY(q)}{dq}$ sont en général différentes de 0, à moins que $\frac{dP(q)}{q}$ soit nul. Nous en concluons que le lieu des foyers est, dans le plan de Riemann, une courbe analytique régulière, sauf si $\frac{dP(q)}{dq} = 0$, valeurs qui correspondent bien aux points singuliers de la courbe, en particulier aux points de rebroussement.

7. 7. Nous appelons $\mathfrak{D}_1$ la partie du domaine $\mathfrak{D}$ définie par les inégalités suivantes

$$0 \leqq q \leqq L(\mathfrak{F})\,,$$
$$N(q) \leqq p \leqq P(q)\,.$$

Une conséquence directe de la définition de $N(q)$ et de $P(q)$ est que la fonction $f(p, q)$ est positive dans tout le domaine $\mathfrak{D}_1$, sauf sur la frontière où elle est nulle. Il est facile de montrer qu'à chaque point du plan de Riemann correspond au moins un point du domaine $\mathfrak{D}_1$, mais nous verrons au n⁰ 8. 4 que pour avoir entre les deux une correspondance biunivoque, on doit en général restreindre encore le domaine $\mathfrak{D}_1$.

8. Points extrêmes

8. 1. Comme au n⁰ 6. 1, nous considérons la famille des lignes géodésiques normales à $\mathfrak{F}$. Soit $\mathfrak{G}$ une ligne géodésique normale à $\mathfrak{F}$ en un point Q. Aux coordonnées géodésiques p et q correspond un point P du plan de Riemann.

Prenons par exemple le cas où p est positif. Pour de petites valeurs de p, nous savons que l'arc de $\mathfrak{G}$ entre P et Q est un arc minimum et que c'est le seul. Ce n'est plus vrai en général pour de grandes valeurs de p. Dans ce cas, grâce au n° 5. 7, on peut affirmer qu'il existe sur $\mathfrak{G}$ un point $\overline{P}$ tel que à tout point situé sur $\mathfrak{G}$ avant $\overline{P}$ corresponde un arc minimum situé sur $\mathfrak{G}$ et qu'à tout point situé sur $\mathfrak{G}$ après $\overline{P}$ ne corresponde pas d'arc minimum situé sur $\mathfrak{G}$. Nous appelons $\overline{P}$ un point extrême et tout arc minimum aboutissant en $\overline{P}$ un arc extrême. Nous désignons par $\overline{P}(q)$ la longueur de l'arc extrême partant de Q. Si tous les arcs partant de Q et situés sur $\mathfrak{G}$ sont des arcs minimum, nous attribuerons naturellement à $\overline{P}(q)$ la valeur ∞.

En prenant p négatif, on aurait pu faire les mêmes remarques. Nous désignons par $\overline{N}(q)$ la longueur négativement comptée de l'arc extrême situé sur la partie de la géodésique qui se dirige vers l'intérieur $\mathfrak{F}$. Il est facile de voir — en s'appuyant sur les n^{os} 4. 3 et 5. 4 — que $\overline{P}(q)$ ne peut pas être une fonction bornée supérieurement et que $\overline{N}(q)$ est une fonction bornée inférieurement dont nous désignerons dans la suite par $\overline{p}$ le minimum. Cette constante négative correspond à l'arc minimum le plus long contenu à l'intérieur de $\mathfrak{F}$.

8. 2. Nous avons vu au n° 5. 8. que, si plusieurs arcs minimum aboutissent au même point P, ils ne peuvent pas faire partie d'arcs minimum plus grands, P est donc un point extrême et chacun des arcs minimum qui y aboutissent est un arc extrême. D'autre part, si un point situé sur un arc minimum est un foyer sur cet arc, c'est un point extrême; ceci est une conséquence de la condition de Jacobi qui prétend qu'un arc géodésique perd au plus tard sa propriété d'arc minimum au premier foyer. Nous allons démontrer réciproquement que

Tout point extrême est soit un foyer, soit un point où aboutissent au moins deux arcs minimum. Ces deux possibilités ne s'excluent pas.

Au point extrême considéré P aboutit au moins un arc minimum issu d'un point Q de la courbe $\mathfrak{F}$. Prolongeons-le au delà du point P et considérons sur ce prolongement une suite de points $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ tendant vers P. Pour chaque P_n, il existe au moins un arc minimum issu d'un point Q_n différent de Q. Les points Q_n ont au moins un point d'accumulation $\overline{Q}$. L'arc géodésique partant de $\overline{Q}$ et aboutissant en P est minimum, suivant le n° 5. 9. Si $\overline{Q}$ est différent de Q, par P passent deux arcs minimum; si $\overline{Q}$ coïncide avec Q, le n° 7. 5 montre que P est un foyer sur l'arc issu de Q. La proposition est démontrée.

8. 3. Nous appelons $\mathfrak{D}_2$ la partie du domaine $\mathfrak{D}$ (n° 6. 7) définie par les inégalités

$$0 \leqq q \leqq L(\mathfrak{F}) ,$$
$$\overline{N}(q) \leqq p \leqq \overline{P}(q)$$

si $\overline{P}(q)$ est infini, cette relation est à remplacer par $\overline{N}(q) \leqq p < \infty$.

La condition de Jacobi déjà citée nous permet d'écrire deux formules qui montrent que le domaine $\mathfrak{D}_2$ est entièrement compris dans le domaine $\mathfrak{D}_1$, défini au n⁰ 7. 7.

$$0 < \overline{P}(q) \leqq P(q) ,$$
$$0 > \overline{N}(q) \geqq N(q) .$$

A un arc minimum du plan de Riemann correspond un segment de droite perpendiculaire à l'axe des q. La longueur de ce segment est égale à la longueur de l'arc minimum. Nous constatons donc qu'à l'aide des arcs minimum, nous pouvons établir une correspondance presque biunivoque entre les points du plan de Riemann et ceux du domaine $\mathfrak{D}_2$, qui joue donc un rôle fondamental dans la représentation d'un plan de Riemann à l'aide des lignes géodésiques:

1) A tout point de $\mathfrak{D}_2$ correspond un et un seul point du plan de Riemann.

2) A tout point du plan de Riemann correspond soit un seul point de l'intérieur de $\mathfrak{D}_2$, soit un ou plusieurs points de la frontière de $\mathfrak{D}_2$ si le point considéré est un point extrême; dans ce dernier cas tous les points images d'un même point du plan de Riemann sont à la même distance de l'axe des q.

La proposition suivante est une conséquence immédiate du n⁰ 4. 3.

Une suite de points divergente dans le plan de Riemann est divergente dans le domaine $\mathfrak{D}_2$ et réciproquement.

8. 4. Nous pouvons affirmer que les inégalités

$$\overline{P}(q) < P(q) ,$$
$$\text{et} \qquad \overline{N}(q) > N(q) ,$$

ont presque toujours lieu en remarquant, comme Jacobi l'a fait pour des surfaces ordinaires[14]) qu'un arc géodésique perd en général sa propriété d'arc minimum avant le premier foyer. La même démonstration peut être faite en toute rigueur dans le domaine $\mathfrak{D}$. Il ne peut éventuellement y avoir exception que si $\left\{\frac{dP(q)}{dq} = 0\right\}$ ou $\left\{\frac{dN(q)}{dq} = 0\right\}$. L'égalité entre

[14]) Voir p. ex. [1], troisième partie, p. 87.

$P(q)$ et $\overline{P}(q)$ est en effet possible en ces points qui correspondent, d'après le n^0 7. 6, aux points singuliers du lieu des foyer.

8. 5. La méthode du présent travail exige que nous considérions d'un peu plus près les points extrêmes et que nous montrions que certains cas particuliers, nuisibles à nos démonstrations, ne sont pas trop nombreux; ces considérations vont nous occuper jusqu'à la fin du n^0 8. Commençons par quelques définitions:

Un arc extrême est dit *afocal* si son extrêmité n'est pas un foyer sur cet arc.

Un arc extrême est dit *focal* si son extrêmité est un foyer. Il est caractérisé par les deux relations $\overline{P}(q_0) = P(q_0)$ et $\frac{dP(q_0)}{dq} = 0$ $\{$idem pour $N(q)\}$.

Un point extrême est dit *normal* si en ce point aboutissent deux arcs extrêmes afocaux et ces deux arcs extrêmes seulement.

Tout autre point extrême est dit *anormal.*

Un point extrême anormal est dit *focal* si en ce point aboutit un arc extrême focal.

Il est évident qu'*un point extrême anormal est soit un point extrême focal, soit un point où aboutissent plus de deux arcs extrêmes afocaux.* Ces deux possibilités ne s'excluent pas.

8. 6. Nous nous proposons tout d'abord de démontrer une proposition importante.

Lemme 1. *Les fonctions $\overline{P}(q)$ et $\overline{N}(q)$ sont continues, pour toute valeur de q.*

Contentons-nous de présenter la démonstration pour $\overline{P}(q)$. Nous considérons une suite de valeurs $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ tendant vers une valeur quelconque q_0. Soient $\overline{P}(q_1)$, $\overline{P}(q_2)$, ..., $\overline{P}(q_n)$ ... et $\overline{P}(q_0)$ les longueurs des arcs extrêmes correspondants. La proposition énoncée revient à démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} \overline{P}(q_n) = \overline{P}(q_0) .$$

Comme $\overline{P}(q)$ est une fonction positive, $\varliminf_{n\to\infty} \overline{P}(q_n)$ existe certainement. Si la suite des $\overline{P}(q_n)$ est bornée supérieurement $\overline{\lim}\ P(q_n)$ existe aussi. Dans ce cas les deux relations suivantes entraînent la continuité de $\overline{P}(q)$:

$$\varlimsup_{n\to\infty} \overline{P}(q_n) \leqq \overline{P}(q_0)$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \overline{P}(q_n) = \overline{P}(q_0) .$$

La première est une conséquence immédiate du n⁰ 5. 9. La seconde s'en déduit de la façon suivante: Dans la suite des arcs extrêmes considérés, nous choisissons une suite partielle telle que la limite de la longueur des arcs soit égale à la limite inférieure de la longueur des arcs de la suite donnée. D'après les nos 8. 4 et 7. 4, il ne peut exister une infinité d'arcs extrêmes focaux bornés; de la suite donnée nous pouvons donc extraire une suite partielle infinie $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n, \ldots$ tendant vers q_0 et telle qu'à chacun des q'_n corresponde un arc extrême afocal; soit P_n le point extrême de cet arc et q''_n la valeur du paramètre correspondant à un des autres arcs extrêmes aboutissant en P_n — il en existe au moins encore un, puisque l'arc correspondant à q'_n est afocal.

La suite $q''_1, q''_2, \ldots, q''_n, \ldots$ possède au moins une limite q''_0. Si $q_0 = q''_0$ l'arc limite est, d'après le n^0 7. 5, un arc extrême focal. Si $q_0 \neq q''_0$ il existe deux arcs minimum aboutissant au même point (n^0 5. 9). Ce sont tous les deux des arcs extrêmes (n^0 8. 2). Dans les deux cas, l'arc extrême correspondant à q_0 est égal à $\varliminf_{n\to\infty} \overline{P}(q_n)$, ce qui démontre la seconde formule.

Si la suite des $\overline{P}(q_n)$ n'est pas bornée, le n^0 5. 9 nous permet de conclure d'une manière analogue qu'il existe des arcs minimum arbitrairement grands sur la ligne géodésique correspondant à q_0, ce qui montre que $\overline{P}(q_0) = \infty$.

8. 7. Nous avons déjà usé du fait qu'il n'existe pas de suite infinie convergente d'arcs extrêmes focaux. La démonstration précédente nous apprend en particulier que l'arc limite d'une suite convergente d'arcs extrêmes est un arc extrême. On en déduit facilement à l'aide des n^{os} 5. 9 et 7. 5 que le point limite d'une suite infinie convergente de points extrêmes anormaux serait anormal (en réalité nous démontrerons au n^0 8. 16 qu'une pareille suite ne saurait exister). Cette remarque nous permet toutefois d'affirmer qu'on peut trouver autour de tout point extrême normal un voisinage ne contenant aucun point anormal.

Nous pouvons même énoncer le

Lemme 2. *Dans le voisinage d'un point extrême normal P, le lieu des points extrêmes est une courbe analytique régulière, bissectrice de l'angle formé par les deux arcs extrêmes aboutissant en P.*

Nous allons démontrer en même temps le

Lemme 2'. *Si l'arc extrême correspondant à une valeur q_0 aboutit en un point extrême normal, la fonction $\overline{P}(q)$ {ou $\overline{N}(q)$} est analytique dans le voisinage de q_0.*

Soient x_0, y_0 les coordonnées du point P et soient q_0, q'_0 les deux valeurs de q correspondant aux deux arcs extrêmes $\mathfrak{A}(q_0)$ et $\mathfrak{A}(q_0')$, aboutissant en P. Nous désignons par p_0 la longueur de ces deux arcs.

Des considérations analogues à celles qui précèdent l'énoncé du lemme 2 permettent d'affirmer que les points extrêmes voisins de P ne peuvent provenir que de l'intersection de deux arcs géodésiques de longueur égale, appartenant l'un au champ dans lequel est plongé l'arc $\mathfrak{A}(q_0)$, l'autre au champ dans lequel est plongé l'arc $\mathfrak{A}(q_0')$. Sur une surface ordinaire, Darboux ([1], deuxième partie, p. 418) a montré que ce lieu est une courbe bissectrice de l'angle formé en P par les deux arcs $\mathfrak{A}(q_0)$ et $\mathfrak{A}(q_0')$. C'est le même résultat dont nous voulons indiquer la démonstration rigoureuse pour nos surfaces abstraites, en appliquant la même idée.

Nous avons désigné au n⁰ 6. 4 par

$$x = x(p, q) \quad \text{et} \quad y = y(p, q)$$

les fonctions établissant la correspondance entre le système de coordonnées géodésiques et les coordonnées cartésiennes du plan de Riemann. Elles sont analytiques. Nous désignons les fonctions inverses dans le voisinage des valeurs p_0, q_0 par

$$p = p(x, y) \quad \text{et} \quad q = q(x, y) \ ,$$

et les fonctions inverses dans le voisinage de p_0, q_0' par

$$p = p'(x, y) \quad \text{et} \quad q = q'(x, y) \ .$$

Le n⁰ 6. 6 nous apprend que ces quatre fonctions sont analytiques dans le voisinage de x_0, y_0, puisque par hypothèse aucun des deux arcs $\mathfrak{A}(q_0)$ et $\mathfrak{A}(q_0')$ n'est focal.

Les points extrêmes voisins de P sont alors donnés par l'équation

$$p(x, y) = p'(x, y) \ .$$

Pour démontrer que cette équation détermine une courbe analytique régulière, il suffit, grâce au théorème connu sur les fonctions implicites de démontrer que $p_x(x_0, y_0) - p_x'(x_0, y_0)$ et $p_y(x_0, y_0) - p_y'(x_0, y_0)$ ne sont pas tous les deux nuls.

Or, si l'on avait $p_x(x_0, y_0) = p_x'(x_0, y_0)$ et $p_y(x_0, y_0) = p_y'(x_0, y_0)$ il s'ensuivrait que les deux courbes déterminées par les équations $p(x, y) = p_0$ et $p'(x, y) = p_0$, seraient tangentes en P. Comme nos coordonnées géodésiques sont orthogonales, il s'ensuivrait que les deux arcs géodésiques $\mathfrak{A}(q_0)$ et $\mathfrak{A}(q_0')$ seraient tangents entre eux, ce qui est impossible, puisque par un point dans une direction ne passe qu'une ligne géodésique.

Il ne nous reste plus qu'à démontrer que cette courbe est bissectrice de l'angle formé en P par $\mathfrak{A}(q_0)$ et $\mathfrak{A}(q_0')$. Prenons sur elle comme paramètre la longueur d'arc s comptée à partir de P et désignons par ϑ_0 l'angle que fait l'arc $\mathfrak{A}(q_0)$ avec la partie de la courbe où s est positif.

Soient

$$x = a(s) \quad \text{et} \quad y = b(s)$$

les équations paramétriques du lieu des points extrêmes. Nous savons d'après ce qui précède que $a(s)$ et $b(s)$ sont des fonctions analytiques. Il en est évidemment de même pour les fonctions $p = p(x(s), y(s)) = A(s)$ et $q = q(x(s), y(s)) = B(s)$ qui sont les équations paramétriques du lieu des points extrêmes dans notre système de coordonnées géodésiques p, q dans le voisinage de l'arc $\mathfrak{A}(q_0)$.

La formule bien connue qui permet de calculer le cosinus de l'angle de deux courbes à partir de la forme quadratique exprimant la métrique, nous donne

$$\cos \vartheta_0 = \frac{dA(0)}{ds} .$$

En désignant d'une façon analogue par $A'(s)$ la fonction $p'(a(s), b(s))$ dans le voisinage de l'arc $\mathfrak{A}(q')$, et par ϑ_0' l'angle que fait cet arc avec le lieu des points extrêmes, on a

$$\cos \vartheta_0' = \frac{dA'(0)}{ds} .$$

De l'équation définissant le lieu des points extrêmes, on tire $A(s) \equiv A'(s)$, d'où il s'ensuit naturellement que

$$\vartheta_0 = \vartheta_0' ,$$

ce que nous voulions démontrer.

Pour démontrer le lemme $2'$, il suffit d'établir, par un calcul élémentaire à partir de la formule du cosinus, la formule suivante

$$\sin \vartheta_0 = \pm f(A(0), B(0)) \frac{dB(0)}{ds} .$$

Comme ϑ_0 ne saurait être nul, la fonction inverse de $q = B(s)$ est aussi une fonction analytique dans le voisinage de la valeur q_0, ce qui nous permet d'exprimer la coordonnée p du lieu des points extrêmes comme fonction analytique de q. Nous l'avons appelée $\overline{P}(q)$.

Ajoutons deux remarques qui nous seront utiles dans la suite.

On aurait évidemment pu choisir la partie de la courbe sur laquelle on reportait s positivement de façon que ϑ_0 et ϑ_0' soient compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

On vérifie d'autre part facilement que l'on doit prendre dans la formule du sinus les signes contraires suivant que l'on considère l'arc $\mathfrak{A}(q_0)$ ou l'arc $\mathfrak{A}(q_0')$; la dérivée de $B(s)$ a en effet le signe contraire de la dérivée de $B'(s)$.

8. 8. Avant de démontrer les propositions des n^{os} 8.13, 8.14 et 8.15 qui conduiront finalement aux lemmes 3 et 4, nous avons besoin de démontrer un certain nombre de propositions auxiliaires.

S'il existe une infinité d'arcs géodésiques de longueur bornée normaux à une courbe $\mathfrak{F}$ et passant par un point P, toutes les géodésiques normales à $\mathfrak{F}$ passent par P et tous les arcs compris entre P et $\mathfrak{F}$ ont la même longueur. Ceci n'est évidemment possible que si P est à l'intérieur de $\mathfrak{F}$.

L'hypothèse permet d'extraire une suite partielle de lignes géodésiques $\mathfrak{G}(q_1), \mathfrak{G}(q_2), \ldots, \mathfrak{G}(q_n), \ldots$ sur lesquelles on a porté les longueurs $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ telles que $\lim_{n \to \infty} q_n = q^*$ et $\lim_{n \to \infty} p_n = p^*$. En outre

$$x(p_n, q_n) = x_0$$

et

$$y(p_n, q_n) = y_0 .$$

Considérons les deux équations $x(p, q) = x_0$ et $y(p, q) = y_0$. Nous prétendons qu'elles sont satisfaites identiquement par la fonction $p = p^*$. En effet, l'une au moins des deux expressions $x_p(p^*, q^*)$ et $y_p(p^*, q^*)$ n'est pas nulle (1 du n^0 6. 4). Supposons que ce soit la première. Dans ce cas, le théorème sur les fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe une fonction analytique $p = \varphi(q)$, solution de $x(p, q) = x_0$ et telle que $\varphi(q^*) = p^*$. La fonction $y(\varphi(q), q)$ est aussi une fonction analytique de q. Comme dans le voisinage de q^* elle prend une infinité de fois la valeur y_0, elle est identiquement égale à y_0. Toutes les lignes géodésiques voisines de $\mathfrak{G}(q^*)$ passent donc par le point P. Le calcul des variations nous apprend que tous les arcs situés sur ces géodésiques entre $\mathfrak{F}$ et P ont la même longueur, égale à p^*. Les équations $x(p, q) = x_0$ et $y(p, q) = y_0$, identiquement satisfaites dans un intervalle autour de la valeur q^* par la fonction $p = p^*$, sont identiquement satisfaites par cette fonction pour toute valeur de q.

8. 9. *S'il existe une infinité d'arcs géodésiques de longueur bornée normaux à deux courbes analytiques régulières fermées $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$, toutes les lignes géodésiques normales à $\mathfrak{F}$ sont normales à $\mathfrak{G}$ et réciproquement et tous les arcs de ces géodésiques compris entre $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ ont la même longueur.*

L'hypothèse nous permet de considérer une suite convergente d'arcs géodésiques $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n, \ldots$ ayant les propriétés suivantes:

Pour tout n, $\mathfrak{A}_n$ est normal en Q_n à $\mathfrak{F}$ et en P_n à $\mathfrak{G}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n = Q^*$;

$\mathfrak{A}^*$ est normal en Q^* à $\mathfrak{F}$ et en P^* à $\mathfrak{G}$.

Soit p_n la longueur de $\mathfrak{A}_n$ et p^* la longueur de $\mathfrak{A}^*$.

Au n⁰ 9. 1., nous reprendrons plus en détail les propriétés des parallèles géodésiques définies par Gauss. Nous voulons seulement rappeler que ce sont des courbes analytiques. Considérons la parallèle géodésique $\mathfrak{G}^*$ à distance p^* de $\mathfrak{G}$ et soit $x = f(t)$ et $y = g(t)$ son équation au voisinage du point Q^*, auquel correspond la valeur t^* du paramètre. Désignons par p, q, comme nous l'avons fait jusqu'ici, le système de coordonnées géodésiques engendré par la courbe $\mathfrak{F}$.

Dans le voisinage de $\mathfrak{F}$ les fonctions $p(x, y)$ et $q(x, y)$ sont analytiques et la courbe $\mathfrak{G}^*$ est donnée dans le domaine $\mathfrak{D}$ au voisinage de Q^* par deux fonctions analytiques

$$p = \varphi(t) \qquad \text{et} \qquad q = \psi(t) \ .$$

A cause de l'hypothèse, pour une infinité de valeurs $t_1, t_2, \ldots, t_n, \to t^*$ la courbe $\mathfrak{G}^*$ est perpendiculaire aux droites $q = q_n$, c'est dire que $\dfrac{d\varphi(t_n)}{dt} = 0$. La fonction $\dfrac{d\varphi(t)}{dt}$ étant analytique en même temps que $\varphi(t)$ elle est identiquement nulle, et $\varphi(t)$ est une constante; comme $\varphi(t^*) = 0$, on peut affirmer que $\varphi(t) \equiv 0$ et que la courbe $\mathfrak{G}^*$ coïncide avec la courbe $\mathfrak{F}$, ce qui prouve bien, à cause de la définition de $\mathfrak{G}^*$, que tous les arcs de géodésiques normaux à $\mathfrak{G}$ sont normaux à $\mathfrak{F}$ et réciproquement et que tous les arcs ont la même longueur.

8. 10. En particulier on peut considérer le cas où $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{G}$ sont identiques; la proposition suivante n'a donc pas besoin de nouvelle démonstration.

S'il existe une infinité d'arcs géodésiques de longueur bornée normaux en leurs deux extrémités à une courbe $\mathfrak{F}$, toutes les géodésiques normales à $\mathfrak{F}$ recoupent $\mathfrak{F}$ normalement et tous ces arcs ont la même longueur. On voit facilement que ceci n'est possible que si les arcs géodésiques sont situés à l'intérieur de $\mathfrak{F}$. Dans ce cas on peut démontrer que tous les arcs extrêmes aboutissent en un seul point, nécessairement focal. Il suffit de considérer la parallèle géodésique à une distance de $\mathfrak{F}$ égale à la moitié de la longueur des arcs considérés.

8. 11. Deux arcs minimum aboutissant au même point extrême P_0 divisent la région du plan de Riemann où se trouve P_0 en deux parties dont une au moins est bornée. On peut affirmer que

Ou bien il existe à l'intérieur de ce domaine borné au moins un arc extrême focal, ou bien tous les arcs extrêmes de $\mathfrak{F}$ *aboutissent en* P_0.

La seconde éventualité est évidemment exclue si P_0 est situé à l'extérieur de $\mathfrak{F}$ puisqu'il existe au moins un arc extrême de longueur infinie à l'extérieur de $\mathfrak{F}$ (n⁰ 8. 1.).

La démonstration de ce théorème est analogue à celle que Carathéodory a donné pour le cas limite où $\mathfrak{F}$ se réduit à un point ([5], p. 231).

Soient Q_0 et Q_0' les deux points de $\mathfrak{F}$ d'où partent les arcs minimum aboutissant en P_0. Soit $\mathfrak{F}_0$ l'arc de $\mathfrak{F}$ qui limite avec ces deux arcs le domaine borné considéré. Si une infinité d'arcs extrêmes issus de $\mathfrak{F}_0$ aboutissent en P_0, le n⁰ 8. 8. nous apprend que tous les arcs extrêmes issus de $\mathfrak{F}$ aboutissent en P_0. Sinon, nous pouvons prendre sur $\mathfrak{F}_0$ un point Q_1, tel que l'arc extrême issu de ce point n'aboutisse pas en P_0. Si cet arc extrême est focal, le théorème est démontré. Si ce n'est pas le cas, au point extrême P_1, extrémité de l'arc extrême partant de Q_1, et nécessairement situé à l'intérieur du domaine borné considéré, aboutit au moins un autre arc extrême, issu d'un point Q_1'. Avec les deux arcs extrêmes issus de Q_1 et de Q_1' nous pouvons répéter la même construction que nous venons de faire pour les arcs extrêmes issus de Q_0 et de Q', et ainsi de suite. Si un des arcs extrêmes ainsi construits est focal, le théorème est vérifié; sinon ont peut toujours choisir la suite $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ de telle façon que $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n = Q^*$ et $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n' = Q^*$. Il suffit de prendre Q_2 au milieu de l'intervalle Q_1Q_1', Q_3 au milieu de Q_2Q_2', etc. L'arc extrême issu de Q^* est focal, comme le montre le n⁰ 7. 5.

8. 12. *Le nombre des arcs minimum aboutissant à un point extrême est fini, ou bien tous les arcs extrêmes aboutissent en ce point.*

La seconde éventualité ne peut se présenter que si le point considéré est situé à l'intérieur de la courbe, à cause de la remarque du n⁰ 8. 1.

Ce théorème n'est en réalité qu'un cas particulier de 8. 8 et se trouve par conséquent déjà démontré.

8. 13. *Dans un domaine borné du plan de Riemann, le nombre des points extrêmes focaux est fini.*

Le n⁰ 8. 5 nous apprend que ces points doivent correspondre à des valeurs de q qui annulent $\frac{dN(q)}{dq}$ ou $\frac{dP(q)}{dq}$; soient $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ une suite de ces valeurs. Comme ces points extrêmes focaux appartiennent au domaine $\mathfrak{D}_2$, le n⁰ 7. 4 nous apprend que ou bien l'on a affaire à un seul point extrême focal, ou bien la suite des points focaux est divergente. On tiendra compte dans la démonstration de la dernière remarque du n⁰ 8. 3.

8. 14. *Dans un domaine borné du plan de Riemann le nombre des points extrêmes où aboutissent au moins trois arcs minimum est fini.*

Pour démontrer indirectement ce théorème, supposons qu'il existe dans un domaine borné du plan de Riemann une infinité de points extrêmes où aboutissent au moins trois arcs minimum. Soit $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ une suite de ces points. Nous désignons par $\mathfrak{A}_n'$, $\mathfrak{A}_n''$, $\mathfrak{A}_n'''$ trois des arcs minimum aboutissant en P_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Appelons la figure formée par les trois arcs $\mathfrak{A}_n'$, $\mathfrak{A}_n''$, $\mathfrak{A}_n'''$ le triple rattaché à P_n et dont P_n est le sommet. Un triple divise la région du plan de Riemann où se trouve son sommet en trois domaines, tous les trois bornés si P_n est à l'intérieur de $\mathfrak{F}$ et dont deux seulement sont bornés si P_n est à l'extérieur de $\mathfrak{F}$. Deux triples de sommets différents n'ont aucun point commun, comme le montre le n⁰ 5. 8; un triple est donc entièrement compris dans un seul des trois domaines formé par un autre triple. Soit une suite infinie de triples de sommets $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$; on peut toujours trouver une suite partielle de triples de sommets $P_{\nu_1}, P_{\nu_2}, \ldots, P_{\nu_n}, \ldots$ jouissant de la propriété suivante: Etant donné un triple de sommet P_{ν_n} les triples postérieurs sont tous contenus dans un seul des trois domaines formés par le triple de sommet P_{ν_n}. Le triple de sommet P_{ν_n} possède donc au moins un domaine borné qui ne contient aucun des triples postérieurs. Soit F_{ν_n} un point extrême focal contenu, d'après le n⁰ 8. 11. à l'intérieur de ce domaine. On peut déterminer de cette façon par une suite de choix convenables une suite de points extrêmes focaux, tous différents les uns des autres. D'après le n⁰ 8. 13., une telle suite doit être divergente, ce qui est évidemment impossible si la suite des sommets se trouve dans un domaine borné. Il est clair en effet que les triples considérés satisfont à la condition de la dernière remarque du n⁰ 4. 3.

8. 15. Nous appelons point normal stationnaire un point extrême normal pour lequel la dérivée de la fonction $\overline{P}(q)$ est nulle $\{$idem pour $\overline{N}(q)\}$.

Dans un domaine borné, il n'y a qu'un nombre fini de points normaux stationnaires.

Il suffit pour le démontrer de constater qu'en un point normal stationnaire P, les deux arcs minimum qui aboutissent en P forment un angle égal à deux droits et constituent donc un arc géodésique normal en ses deux extrémités à la courbe $\mathfrak{F}$; en effet puisque la dérivée de $\overline{P}(q)$ est nulle, le lieu des points extrêmes forme avec chacun des arcs minimum un angle droit, car d'après le n° 8. 7. $\cos \vartheta_0 = 0$. Nous avons vu au n° 8. 10. qu'il existe tout au plus un nombre fini d'arcs géodésiques normaux de longueur bornée en leurs deux extrémités à la courbe $\mathfrak{F}$ ou que tous les arcs extrêmes aboutissent en un même point. Dans le premier cas, il existe un nombre fini de points dans un domaine borné du plan de Riemann où la dérivée de $\overline{P}(q)$ est nulle; dans le second cas, le point extrême considéré n'est pas normal.

8. 16. Nous appelons *point particulier* un point extrême anormal ou un point normal stationnaire.

Lemme 3. *Il n'existe dans un domaine borné du plan de Riemann qu'un nombre fini de points particuliers.*

C'est une conséquence directe de la définition des points particuliers et des propositions démontrées aux n^os^ 8. 13, 8. 14 et 8. 15.

8. 17. Lemme 4. *L'équation* $\overline{P}(q) = p_0$ *n'a qu'un nombre fini de solutions.*

{Idem pour $\overline{N}(q)$, pour laquelle cependant il y a une exception, le cas où $\overline{N}(q)$ est identiquement égal à p_0.}

Si l'équation considérée possédait une infinité de solutions, il existerait aussi une infinité de minima relatifs de la fonction positive $\overline{P}(q)$ plus petits ou égaux à p_0. Ces minima correspondent nécessairement à des arcs extrêmes aboutissant en des points particuliers. Nous venons de voir (n° 8. 16.) qu'il ne peut pas y en avoir une infinité dans un domaine borné.

9. Vraies parallèles

9. 1. Conformément à la définition de Gauss nous appelons *parallèle géodésique* à distance p_0 de la courbe $\mathfrak{F}$ le lieu des points obtenus en reportant à partir de $\mathfrak{F}$ la longueur constante sur toutes les lignes géodésiques normales à $\mathfrak{F}$. C'est aussi une trajectoire orthogonale de la famille des lignes géodésiques normales à $\mathfrak{F}$. Dans le domaine $\mathfrak{D}$ la parallèle géodésique correspond au segment situé sur la droite

$p = p_0$, $0 \leqq q \leqq L(\mathfrak{F})$. Dans le plan de Riemann, c'est une courbe analytique dont les équations paramétriques sont

$$x = x(p_0, q) \quad \text{et} \quad y = y(p_0, q) \, .$$

Si $f(p_0, q_0) \neq 0$, $x_q(p_0, q_0)$ et $y_q(p_0, q_0)$ ne sont pas tous les deux nuls (n⁰ 6. 4) et la courbe est régulière en ce point (n⁰ 5. 2). Si $f(p_0, q_0) = 0$, c'est-à-dire si le point considéré est un foyer, $x_q(p_0, q_0)$ et $y_q(p_0, q_0)$ sont nuls et la courbe présente en général un point singulier. Puisque d'après le n⁰ 7. 2 $P(q)$ est une fonction analytique, une parallèle géodésique ne peut posséder qu'un nombre fini de points singuliers à moins que $P(q) \equiv p_0$, auquel cas la parallèle géodésique dégénère en un point.

9. 2. Nous définissons *une vraie parallèle géodésique* à la courbe $\mathfrak{F}$ comme le lieu des points situés à une distance constante de la courbe $\mathfrak{F}$. Les n^os 5. 4 et 5. 5 nous apprennent que tout point de la vraie parallèle géodésique à distance p_0 appartient aussi à la parallèle géodésique à distance p_0.

La vraie parallèle géodésique a pour image dans le domaine $\mathfrak{D}$ les points du segment $p = p_0$, $0 \leqq q \leqq L(\mathfrak{F})$ qui appartiennent à $\mathfrak{D}_2$; ces points sont situés sur un nombre fini de segments, comme il ressort du n⁰ 8. 17. L'image d'un segment du domaine $\mathfrak{D}$ étant un arc analytique dans le plan de Riemann, nous pouvons affirmer que

La vraie parallèle à distance p_0 se compose d'un nombre fini d'arcs analytiques appartenant à la parallèle géodésique à distance p_0.

Comme la distance entre la courbe $\mathfrak{F}$ et un point P est un nombre bien défini, on peut affirmer que

Chaque point du plan de Riemann est situé sur une et sur une seule vraie parallèle à une courbe donnée.

Etant donnée une vraie parallèle à distance p_0 de $\mathfrak{F}$, où nous supposons p_0 positif, il est clair que la vraie parallèle en question est la frontière entre l'ensemble des points situés à une distance $p > p_0$ de $\mathfrak{F}$ et ceux situés à une distance $p < p_0$ de $\mathfrak{F}$. Ce dernier ensemble est évidemment connexe puisque chacun de ses points peut être joint à la courbe $\mathfrak{F}$ par un arc minimum dont tous les points sont à une distance de $\mathfrak{F}$ nécessairement inférieure à p_0. Cet ensemble est d'autre part borné, conséquence du n⁰ 4. 3; on peut en conclure que

La vraie parallèle à distance p_0 de $\mathfrak{F}$ est formée d'une ou de plusieurs courbes fermées, que nous appelons *les composantes* de la vraie parallèle.

Une de ces courbes fermées est la frontière d'un ensemble connexe de points qui comprend tous les points à distance arbitrairement grande de la courbe $\mathfrak{F}$. Nous l'appelons *la composante extérieure* de la vraie parallèle considérée. C'est une courbe simplement fermée qui contient toutes les autres composantes de la vraie parallèle.

On verrait de même qu'une vraie parallèle intérieure à la courbe $\mathfrak{F}$ est formée d'une ou de plusieurs courbes fermées. Aucune de celles-ci toutefois ne joue un rôle particulier, car à l'intérieur de la courbe $\mathfrak{F}$ il n'existe pas de points à distance (négative) arbitrairement grande.

9. 3. *La longueur* d'un arc de parallèle géodésique peut se calculer facilement à l'aide de la fonction $f(p, q)$. En effet comme p est constant l'élément d'arc du n° 6. 2 se réduit à

$$ds^2 = f^2(p, q)\, dq^2 \, .$$

La fonction $f(p, q)$ étant positive sur toute vraie parallèle géodésique (n^os^ 7. 7 et 8. 3), la longueur de celle-ci, que nous désignons par $L(p)$, peut s'exprimer à l'aide de la somme d'intégrales suivante:

$$L(p) = \sum_{i=1}^{n(p)} \int_{q_i(p)}^{q_i'(p)} f(p, q)\, dq \, ,$$

où $n(p)$ désigne le nombre d'arcs de la parallèle géodésique formant la vraie parallèle géodésique et $q_i(p)$, $q_i'(p)$ les valeurs de q correspondant aux extrémités de ces arcs.

9. 4. Théorème 1. *$L(p)$ est une fonction continue.*

Donnons la démonstration lorsque p est positif, la démonstration lorsque p est négatif étant analogue. Nous considérons la fonction auxiliaire suivante:

$$\begin{aligned} \varphi(p, q) &= f(p, q) \quad \text{si} \quad 0 \leqq p \leqq \overline{P}(q) \, , \\ \varphi(p, q) &= 0 \qquad\quad\ \text{si} \qquad\ p > \overline{P}(q) \, . \end{aligned}$$

La fonction $L(p)$ peut se mettre alors sous la forme

$$L(p) = \int_0^L \varphi(p, q)\, dq \, ,$$

ou L représente la longueur de la courbe $\mathfrak{F}$.

Prenons une valeur de p quelconque, $p_0 > 0$ et un nombre positif arbitrairement petit ε. Au n° 6.3 nous avons vu que $f(p, q)$ est une fonction continue; il existe donc un δ tel que pour tout q, $0 \leqq q \leqq L$

$$| f(p, q) - f(p_0, q) | < \frac{\varepsilon}{2L} \, ,$$

dès que $|p - p_0| < \delta$. Soit M le maximum de $f(p, q)$ dans la bande comprise entre $p_0 - \delta$ et $p_0 + \delta$ et M^* le plus grand des deux nombres M et $\frac{\varepsilon}{2L}$. Soient $q_i(p_0)$ $i = 1, 2, \ldots, n$ les n solutions de l'équation $\overline{P}(q) = p_0$; il y en a un nombre fini, éventuellement nul, d'après le n° 8.17 (nous ne faisons pas de distinction ici entre les $q_i(p_0)$ et les $q_i'(p_0)$). De part et d'autre de chacun des $q_i(p_0)$ nous portons la quantité $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{4nM^*}$. Appelons $\mathfrak{E}$ l'ensemble des intervalles ouverts $q_i(p_0) - \varepsilon' < q < q_i(p_0) + \varepsilon'$ et $\mathfrak{C}$ l'ensemble des intervalles complémentaires de $\mathfrak{E}$ sur le segment $0 \leqq q \leqq L$. Puisque $\mathfrak{C}$ est un ensemble fermé, le minimum δ' de la fonction $|\overline{P}(q) - p_0|$ sur $\mathfrak{C}$ est certainement pris en un point de $\mathfrak{C}$. Il est plus grand que 0, puisque $\overline{P}(q) = p_0$ seulement aux points $q_i(p_0)$, qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{C}$.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer que $|L(p) - L(p_0)| < \varepsilon$ dès que $|p - p_0| < \mathrm{Min}\,(\delta, \delta')$. Choisissons p satisfaisant à cette condition, et estimons la quantité

$$L(p) - L(p_0) = \int_0^L [\varphi(p, q) - \varphi(p_0, q)]\, dq \;.$$

M^* et δ sont définis de façon à ce que $|\varphi(p, q) - \varphi(p_0, q)| < M^*$ dès que $|p - p_0| < \delta$. Dans chacun des intervalles entourant un $q_i(p_0)$, l'intégrale se laisse évaluer à

$$\left| \int_{q_i(p_0)-\varepsilon'}^{q_i(p_0)+\varepsilon'} [\varphi(p, q) - \varphi(p_0, q)]\, dq \right| < 2\varepsilon' M^* = \frac{\varepsilon}{2n} \;.$$

Sur l'ensemble $\mathfrak{E}$ composé des n intervalles entourant les $q_i(p_0)$, qui du reste peuvent se recouvrir en partie, l'intégrale est plus petite que $\frac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, en tout point de $\mathfrak{C}$, $\varphi(p, q)$ et $\varphi(p_0, q)$ sont ou tous deux nuls ou tous deux définis par $f(p, q)$ et $f(p_0, q)$ car si tel n'était pas le cas, il y aurait entre p et p_0 une valeur p' telle que $\overline{P}(q) = p'$ contrairement à l'hypothèse que δ' est le minimum de $|\overline{P}(q) - p_0|$, c'est-à-dire que $|\overline{P}(q) - p_0| > \delta'$. Dans les deux cas $|\varphi(p, q) - \varphi(p_0, q)| < \frac{\varepsilon}{2L}$ et l'intégrale sur $\mathfrak{C}$ est plus petite que $\frac{\varepsilon}{2}$. L'intégrale étendue aux deux ensembles $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{C}$, égale à $|L(p) - L(p_0)|$ est plus petite que ε, ce qui démontre le théorème.

9. 5. Après avoir démontré que $L(p)$ est une fonction continue pour toute valeur de p, nous allons démontrer qu'elle est presque partout analytique.

Nous avons vu au n^0 8. 16 qu'il n'existe dans un domaine borné du plan de Riemann qu'un nombre fini de points particuliers. Nous disons que p_0 est une *valeur particulière* de p si la vraie parallèle à distance p_0 passe par un point particulier. Il est bien clair que dans tout intervalle borné $p_1 \leqq p \leqq p_2$, il n'existe qu'un nombre fini de valeurs particulières de p, puisque par tout point du plan de Riemann ne passe qu'une seule vraie parallèle à une courbe $\mathfrak{F}$ donnée. Or il est facile de démontrer le

Théorème 2. *Pour toute valeur non particulière de p, la fonction $L(p)$ est analytique.*

Le théorème de Weierstrass sur les fonctions implicites nous permet tout d'abord d'affirmer que les limites $q_i(p)$ et $q_i'(p)$ des intégrales qui interviennent dans le calcul de $L(p)$ sont des fonctions analytiques de p; ce sont en effet les fonctions inverses de la fonction $p = \overline{P}(q)$ $\{$ou $p = \overline{N}(q)\}$, analytique et telle que $\frac{d\overline{P}(q)}{dq} \neq 0$ $\left\{\text{ou } \frac{d\overline{N}(q)}{dq} \neq 0\right\}$ en tout point extrême non particulier. Quant à $n(p)$ c'est, d'après le même théorème, une constante pour une petite variation autour d'une valeur non particulière de p. Comme nous avons vu au n^0 6. 3 que $f(p, q)$ est une fonction analytique, il s'ensuit que la fonction $L(p)$ est analytique.

9. 6. Pour toute valeur non particulière, la règle de dérivation d'une intégrale par rapport à un paramètre nous permet de calculer la dérivée de $L(p)$. (Nous ne pourrions plus appliquer cette formule pour des valeurs particulières de p, pour lesquelles nous avons renoncé à définir la dérivée de $L(p)$. En fait il serait aussi possible de définir une dérivée par la gauche et une dérivée par la droite, à condition d'admettre $-\infty$ et $+\infty$ comme valeurs admissibles pour ces dérivées.)

Nous obtenons la formule suivante

$$\frac{dL(p)}{dp} = \sum_{i=1}^{n(p)} \left[\int_{q_i(p)}^{q_i'(p)} \frac{\partial f(p,q)}{\partial p}\, dq + f(p, q_i'(p))\, \frac{dq_i'(p)}{dp} - f(p, q_i(p))\, \frac{dq_i(p)}{dp} \right].$$

Cherchons la signification géométrique de cette formule. On sait que la courbure géodésique d'une parallèle géodésique vaut $\frac{f_p(p,q)}{f(p,q)}$ ([5], p. 174). Nous désignerons cette quantité par $k_p(q)$ et l'élément d'arc de la parallèle géodésique par $d\sigma_p$; on sait que ce dernier est égal à $f(p, q)\, dq$. Désignons par $\vartheta_i(p)$ la mesure de l'angle compris entre l'arc extrême correspondant à $q_i(p)$ et le lieu des points extrêmes. Désignons de façon analogue par

$\vartheta_i'(p)$ la mesure de l'angle compris entre l'arc extrême correspondant à $q_i'(p)$ et le lieu des points extrême. Nous pouvons évidemment choisir $\vartheta_i(p)$ $\{$ou $\vartheta_i'(p)\}$ compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Les formules établies au n° 8. 7 nous permettent de démontrer facilement les relations suivantes, valables pour $p > 0$,

$$f(p, q_i(p))\,\frac{dq_i(p)}{dp} = \operatorname{tg}\vartheta_i(p) \quad \text{et} \quad f(p, q_i'(p))\,\frac{dq_i'(p)}{dp} = -\operatorname{tg}\vartheta_i'(p).$$

On vérifiera en particulier le juste choix des signes, en remarquant que $q_i(p)$ est une fonction croissante et que $q_i'(p)$ est une fonction décroissante de p. Pour p négatif on obtient les mêmes formules, mais avec le signe contraire.

On peut donc exprimer la dérivée de $L(p)$ à l'aide des formules suivantes:

$$p > 0\,, \quad \frac{dL(p)}{dp} = \sum_{i=1}^{n(p)} \left[\int_{q_i(p)}^{q_i'(p)} k_p(q)\,d\sigma_p - \operatorname{tg}\vartheta_i'(p) - \operatorname{tg}\vartheta_i(p)\right],$$

$$p < 0\,, \quad \frac{dL(p)}{dp} = \sum_{i=1}^{n(p)} \left[\int_{q_i(p)}^{q_i'(p)} k_p(q)\,d\sigma_p + \operatorname{tg}\vartheta_i'(p) + \operatorname{tg}\vartheta_i(p)\right].$$

Appliquons la formule de Bonnet généralisée, au domaine connexe compris entre la courbe $\mathfrak{F}$ et la vraie parallèle à distance p. Soit $k(q)$ la courbure géodésique de la courbe $\mathfrak{F}$, $m(p)$ le nombre de composantes de la vraie parallèle à distance p et $C(p)$ l'intégrale de la courbure totale sur le domaine compris entre la courbe $\mathfrak{F}$ et la vraie parallèle à distance p. On a alors pour une valeur positive et non particulière de p,

$$\sum_{i=1}^{n(p)} \left(\int_{q_i(p)}^{q_i'(p)} k_p(q)\,d\sigma_p\right) - \sum_{i=1}^{n(p)} [\vartheta_i(p) + \vartheta_i'(p)] - \int_0^{L(\mathfrak{F})} k(q)\,dq + C(p) =$$
$$= (1 - m(p)) \cdot 2\pi\ .$$

Le second terme, le seul dont la présence demande quelques explications, provient des angles que forment les différents arcs de la vraie parallèle aux points où ils se raccordent. En un tel point aboutissent deux arcs extrêmes $\mathfrak{A}(q_0)$ et $\mathfrak{A}(q_0')$; l'angle formé par les deux arcs de la vraie parallèle se compose de deux droits plus les deux angles ϑ_0 et ϑ_0' compris entre le lieu des points extrêmes et les arcs $\mathfrak{A}(q_0)$ et $\mathfrak{A}(q_0')$. L'excédent de π est bien

$\vartheta_0 + \vartheta_0'$ dont la somme étendue à tous les points extrêmes de la vraie parallèle considérée est égale au deuxième terme de notre formule.

Pour p négatif on trouve une formule analogue.

Nous pouvons maintenant donner pour la dérivée de $L(p)$ deux formules que nous pouvons considérer comme le but principal de cette première partie:

$$p > 0\,, \quad \frac{dL(p)}{dp} =$$

$$= \int_0^{L(\mathfrak{F})} k(q)\,dq - 2\pi(m(p)-1) - C(p) - \sum_{i=1}^{n(p)} [\operatorname{tg} \vartheta_i'(p) - \vartheta_i'(p) + \operatorname{tg} \vartheta_i(p) - \vartheta_i(p)]\,,$$

$$p < 0\,, \quad \frac{dL(p)}{dp} =$$

$$= \int_0^{L(\mathfrak{F})} k(q)\,dq + 2\pi(m(p)-1) + C(p) + \sum_{i=1}^{n(p)} [\operatorname{tg} \vartheta_i'(p) - \vartheta_i'(p) + \operatorname{tg} \vartheta_i(p) - \vartheta_i(p)]\,.$$

9. 7. Des deux formules précédentes, on peut tirer des inégalités qui nous serviront dans la suite et qui constituent notre

Théorème 3

$$\textit{pour} \quad p > 0 \quad , \qquad \frac{dL(p)}{dp} \leqq \int_0^{L(\mathfrak{F})} k(q)\,dq - C(p)\,,$$

$$\textit{pour} \quad \bar{p} < p < 0\,, \qquad \frac{dL(p)}{dp} \geqq \int_0^{L(\mathfrak{F})} k(q)\,dq + C(p)\,.$$

Il suffit en effet de remarquer que dans les formules du n⁰ 9. 6 $m(p)$ est au moins égal à 1 et que chacune des différences $\operatorname{tg} \vartheta_i(p) - \vartheta_i(p)$ est positive, puisque $\vartheta_i(p)$ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

9. 8. Nous aurons enfin besoin de la formule suivante valable sans exception, bien que $\frac{dL(p)}{dp}$ ne soit peut-être pas défini pour toute valeur de p:

Théorème 4 $$L(p_2) - L(p_1) = \int_{p_1}^{p_2} \frac{dL(p)}{dp}\,dp\,.$$

Cette formule est évidente si dans l'intervalle $p_1 \leqq p \leqq p_2$ il n'y a aucune valeur particulière; $\frac{dL(p)}{dp}$ est en effet une fonction analytique dans tout l'intervalle.

Supposons maintenant qu'une des limites, par exemple p_2, soit une valeur particulière de l'intervalle $p_1 \leqq p \leqq p_2$ et que ce soit la seule. On définit alors $\int\limits_{p1}^{p_2} \frac{dL(p)}{dp}\, dp$ comme $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{p_1}^{p_2-\varepsilon} \frac{dL(p)}{dp}\, dp$. Pour l'intervalle $p_1 \leqq p \leqq p_2 - \varepsilon$, on a évidemment

$$\int\limits_{p_1}^{p_2-\varepsilon} \frac{dL(p)}{dp}\, dp = L(p_2 - \varepsilon) - L(p_1) \ .$$

Lorsque ε tend vers zéro, le membre de droite tend vers $L(p_2) - L(p_1)$, puisque la fonction $L(p)$ est continue, d'après le n⁰ 9. 4; dans ce cas, la formule est donc aussi valable.

Dans le cas général, on peut affirmer que dans tout intervalle $p_1 \leqq p \leqq p_2$, il n'y a éventuellement qu'un nombre fini de valeurs particulières. On pourra donc décomposer l'intervalle en un nombre fini d'intervalles pour chacun desquels la formule sera valable. En faisant la somme de toutes les intégrales et grâce à la continuité de la fonction $L(p)$, on démontre la formule proposée, pour des valeurs p_1 et p_2 quelconques.

9. 9. Soient p_1, p_2 deux nombres tels que $\bar{p} \leqq p_1 < p_2$, où $\bar{p}$ représente, comme au n⁰ 8. 1, la longueur, comptée négativement, du plus grand arc minimum contenu à l'intérieur de $\mathfrak{F}$. Désignons par $\mathfrak{D}(p_1, p_2)$ la partie du domaine $\mathfrak{D}_2$ comprise entre les droites $p = p_1$ et $p = p_2$; c'est l'image de l'ensemble des points dont la distance à la courbe $\mathfrak{F}$ est comprise entre p_1 et p_2. L'élément d'aire étant égal en coordonnées géodésiques à $f(p, q)\, dp\, dq$, l'aire du domaine situé entre les deux vraies parallèles à distance p_1 et p_2 peut s'exprimer à l'aide de l'intégrale

$$A(p_1, p_2) = \iint\limits_{\mathfrak{D}(p_1, p_2)} f(p, q)\, dp\, dq \ .$$

La frontière de ce domaine étant formée d'un nombre fini d'arcs rectifiables ne crée aucune difficulté pour le calcul de cette intégrale.

Commençons par intégrer par rapport à q; l'intégrale est alors à étendre sur un certain nombre d'intervalles dont nous avons désigné les limites au n⁰ 9. 3 par $q_i(p)$ et $q'_i(p)$. Nous obtenons

$$A(p_1, p_2) = \int\limits_{p_1}^{p_2} dp \left(\sum_{i=1}^{n(p)} \int\limits_{q_i(p)}^{q'_i(p)} f(p, q)\, dq \right) \ .$$

La quantité entre parenthèses est précisément égale à $L(p)$, de sorte que notre formule devient

$$A(p_1, p_2) = \int_{p_1}^{p_2} L(p)\, dp \ .$$

Cette formule nous permet de calculer en particulier l'aire comprise à l'intérieur d'une courbe analytique régulière, simplement fermée $\mathfrak{F}$. La formule obtenue constitue le

Théorème 5

$$A(\mathfrak{F}) = \int_{\bar{p}}^{0} L(p)\, dp \ .$$

On peut d'autre part calculer l'aire du plan de Riemann tout entier par un passage à la limite à l'aide du

Théorème 5'

$$A_T = \int_{\bar{p}}^{\infty} L(p)\, dp \ .$$

9. 10. Pour les démonstrations de la seconde partie, il suffira de retenir de cette première partie les théorèmes 1 à 5, énoncés à partir du n⁰ 9. 4.

Nous voulons signaler enfin un cas particulier intéressant; c'est celui des vrais cercles, dont nous donnons la définition suivante: *Un vrai cercle* est le lieu des points équidistants d'un point fixe. La courbe $\mathfrak{F}$ se réduisant à un point, les démonstrations que nous avons données pour une courbe $\mathfrak{F}$ analytique régulière ne sont naturellement pas valables sans autre explication. On pourrait les refaire de manière tout à fait semblable, en tenant compte des résultats déjà obtenus par Myers [15]). Mais il est encore plus simple de prendre, autour du point fixe, un cercle géodésique suffisamment petit pour qu'il soit régulier, et de considérer les vrais cercles autour du point comme les vrais parallèles à ce petit cercle géodésique.

SECONDE PARTIE

Le problème isopérimétrique

10. Aire totale

Dans ce chapitre, nous nous proposons de démontrer le

Théorème A. *Tout plan de Riemann à courbure non négative possède une aire infinie.*

Dans ce but nous allons donner quelques définitions et établir deux lemmes.

---

[15]) Voir note [10]).

10. 1. Etant donné dans un plan de Riemann (à courbure d'ailleurs quelconque) un domaine borné, nous appelons *ceinture autour de ce domaine*) une ligne rectifiable simplement fermée comprenant tous les points du domaine donné à l'intérieur.

Nous appelons d'autre part *suite divergente de courbes* une suite de courbes $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_n, \ldots$ telles que toute suite de points $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$, pris respectivement sur $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_n, \ldots$ soit divergente dans le plan de Riemann. Nous avons donné la définition exacte d'une suite divergente de points au n⁰ 4. 1.

Soit $\mathfrak{S}$ une suite divergente de ceintures $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots$ autour d'un domaine $\mathfrak{B}$; nous désignons leurs longueurs par $L(\mathfrak{F}_1)$, $L(\mathfrak{F}_2), \ldots$, $L(\mathfrak{F}_n), \ldots$.

Soit $L^*(\mathfrak{S}) = \varliminf_{n \to \infty} L(\mathfrak{F}_n)$.

Puisque $L(\mathfrak{F}_n) > 0$, cette limite existe évidemment; elle est positive ou nulle.

Dans un plan de Riemann, nous considérons toutes les suites divergentes de ceintures autour d'un domaine $\mathfrak{B}$ et nous posons

$$L^* = \text{borne inf. } L^*(\mathfrak{S}) .$$

Cette borne existe évidemment, puisque $L^*(\mathfrak{S}) \geqq 0$. On peut même ajouter que L^* est en quelque sorte indépendant du domaine $\mathfrak{B}$. Il est en effet facile de démontrer qu'étant donné un autre domaine borné $\mathfrak{B}'$, il existe un n à partir duquel toute ceinture d'une suite divergente autour de $\mathfrak{B}$ est aussi ceinture autour de $\mathfrak{B}'$. Il suffit de considérer un domaine borné simplement connexe $\mathfrak{B}^*$ contenant $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}'$ et de remarquer que les courbes d'une suite divergente n'ont à partir d'un certain rang aucun point commun avec un domaine borné donné, mais quelconque.

Toute suite divergente de ceintures autour du domaine $\mathfrak{B}$ forme donc aussi, à part un nombre fini de courbes, une suite divergente autour de $\mathfrak{B}'$, ce qui montre bien que L^* ne dépend pas du domaine $\mathfrak{B}$.

10. 2. Dans un plan de Riemann à courbure non négative, les résultats de Cohn-Vossen (voir en particulier [4], p. 132) nous permettent d'affirmer que

$$L^* > 0 .$$

En effet, étant donné un domaine $\mathfrak{B}$, simplement connexe, du plan de Riemann, Cohn-Vossen considère la borne inférieure de la longueur de toutes les ceintures autour de $\mathfrak{B}$; soit Λ cette borne. Cohn-Vossen appelle suite minimale une suite de ceintures dont la longueur tend vers Λ; dans le cas d'un plan de Riemann à courbure non négative, il démontre l'existence d'une suite minimale bornée, c'est-à-dire dont les courbes sont situées dans un domaine borné; on vérifie aisément que la limite Λ de leur longueur ne saurait être nulle. Comme on a évidemment $L^* > \Lambda$, on peut énoncer le

Lemme I. *Pour tout plan de Riemann à courbure non négative* $L^* > 0$.

10. 3. Etant donnée une courbe analytique régulière simplement fermée $\mathfrak{F}$, nous avons désigné dans la première partie de ce travail la longueur de la vraie parallèle à distance p par $L(p)$. Nous avons vu au n⁰ 9. 9 comment on peut calculer l'aire totale du plan de Riemann à l'aide de l'intégrale

$$A_T = \int_{\bar{p}}^{\infty} L(p)\, dp \ .$$

Supposons que nous ayons à faire à un plan dont l'aire totale soit finie. On voit qu'une condition nécessaire pour cela est que $\underline{\lim}_{n \to \infty} L(p) = 0$, c'est-à-dire qu'il existe une suite de valeurs $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ tendant vers l'infini, telles que $\lim_{n \to \infty} L(p_n) = 0$. Or il est clair que les composantes extérieures $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots$ de ces vraies parallèles forment une suite divergente de ceintures autour du domaine compris à l'intérieur de $\mathfrak{F}$ (n⁰ 9. 2). Comme on a évidemment $L(\mathfrak{F}_n) \leqq L(p_n)$, on peut affirmer que $\lim_{n \to \infty} L(\mathfrak{F}_n) = 0$. D'où nous tirons la conclusion suivante:

Lemme II. *Si l'aire d'un plan de Riemann est finie, on a nécessairement* $L^* = 0$.

10. 4. L^* ne pouvant être à la fois positif et nul, on constate que le théorème A n'est qu'une conséquence logique de la conjonction des lemmes I et II; il est donc démontré.

10. 5. Si l'on considère un plan de Riemann à courbure jamais positive, on sait que le système de coordonnées géodésiques polaires autour d'un point quelconque est valable sur tout le plan. A l'aide de ces coordonnées, on démontre facilement que l'aire totale d'un plan de Riemann à courbure non positive est infinie.

Ce résultat, joint au théorème A, nous permet de conclure par le théorème suivant:

Tout plan de Riemann dont l'aire totale est finie présente des points à courbure positive et des points à courbure négative.

11. Inégalité isopérimétrique

Etant donnée dans un plan de Riemann une courbe analytique, régulière, simplement fermée $\mathfrak{F}$, nous désignons par L la longueur de $\mathfrak{F}$, par A l'aire du domaine compris à l'intérieur de $\mathfrak{F}$ et par κ l'intégrale de la courbure géodésique le long de $\mathfrak{F}$.

Nous nous proposons de démontrer maintenant l'*inégalité isopérimétrique* (I), valable dans un plan de Riemann à courbure non négative

$$L^2 \geqq 2A\cdot\kappa\,. \tag{I}$$

11. 1. Nous partons de la formule établie au n⁰ 9. 7,

$$\frac{dL(p)}{dp} \geqq \kappa + C(p)\quad . \tag{1}$$

Elle est valable dans tout intervalle $p_1 \leqq p \leqq p_2$, où $\bar{p} \leqq p_1 < p_2 \leqq 0$, sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs particulières (n⁰ 9. 6) où $\dfrac{dL(p)}{dp}$ n'existe pas.

En tenant compte de l'inégalité (1) dans la formule du n⁰ 9. 8

$$L(0) - L(p) = \int_p^0 \frac{dL(p)}{dp}\,dp$$

nous obtenons immédiatement pour tout p, où $\bar{p} \leqq p \leqq 0$

$$L(p) \leqq L + \kappa p - \int_p^0 C(p)\,dp\,. \tag{2}$$

Dans un plan de Riemann à courbure non négative $C(p) \geqq 0$ et nous pouvons en déduire l'inégalité

$$L(p) \leqq L + \kappa p\,.$$

Nous voulons introduire cette dernière dans la formule du n⁰ 9. 9

$$A = \int_{\bar{p}}^0 L(p)\,dp$$

qui nous livre alors

$$A \leqq -L\bar{p} - \kappa\,\frac{\bar{p}^2}{2}\quad .$$

En désignant par $\bar{r}$ la longueur du plus grand arc minimum contenu à l'intérieur de $\mathfrak{F}$, on a $\bar{p} = -\bar{r}$. Remarquons encore que $\bar{r}$ peut être considéré comme le rayon du vrai cercle le plus grand inscrit dans la courbe $\mathfrak{F}$. Notre inégalité s'écrit alors

$$A \leqq L\bar{r} - \kappa \frac{\bar{r}^2}{2} . \tag{3}$$

Cette formule est la généralisation d'une formule connue, démontrée dans le plan euclidien par Bonnesen[16]). Notre inégalité (I) en est une conséquence presque immédiate. Une simple transformation algébrique nous livre en effet

$$A \leqq \frac{L^2}{2\kappa} - \frac{1}{2\kappa}(L - \kappa\bar{r})^2 .$$

Nous verrons au n⁰ 11. 1. 1 que κ est positif. Cette formule est donc équivalente à

$$L^2 \geqq 2\kappa A + (L - \kappa\bar{r})^2 \tag{4}$$

d'où l'on déduit immédiatement l'inégalité isopérimétrique (I), ainsi démontrée.

11. 1. 1. Nous devons encore montrer que la quantité κ est comprise entre 0 et 2π. La formule de Bonnet nous montre en effet qu'elle est égale à $2\pi - C(\mathfrak{F})$, où $C(\mathfrak{F})$ représente l'intégrale de la courbure de Gauss $K(x, y)$ sur le domaine compris à l'intérieur de $\mathfrak{F}$. Puisque $K(x, y)$ est analytique et jamais négatif, on a évidemment d'une part $C(\mathfrak{F}) \geqq 0$ et d'autre part, si $C(\mathfrak{F}) \neq 0$, $C(\mathfrak{F}) < C_T$ où C_T désigne l'intégrale de la courbure totale étendue à tout le plan de Riemann. Or Cohn-Vossen a démontré ([4], p. 79—80) que $C_T \leqq 2\pi$. Nous en concluons donc que

$$0 \leqq C(\mathfrak{F}) < 2\pi$$

et que

$$0 < \kappa \leqq 2\pi .$$

11. 2. Pour que l'*égalité* ait lieu dans la formule (I), il faut, d'après (4), que

$$L - \kappa\bar{r} = 0 . \tag{5}$$

Or, on tire de (2) que

$$L - \kappa\bar{r} \geqq \int_{\bar{p}}^{0} C(p)\, dp \geqq 0 . \tag{6}$$

Il faut donc que

$$\int_{\bar{p}}^{0} C(p)\, dp = 0 . \tag{7}$$

Ceci n'est possible que si $K(x, y) \equiv 0$, c'est-à-dire si l'on se trouve dans un *plan euclidien*.

---

16) Voir note 11).

11. 3. Nous avons vu au n⁰ 11. 1. 1 que κ est égal à $2\pi - C(\mathfrak{F})$. On peut remplacer κ par cette expression dans toutes les formules du n⁰ 11. 1 ainsi que dans l'inégalité (I) qui devient

$$L^2 \geqq 2A(2\pi - C(\mathfrak{F}))\,. \tag{II}$$

11. 4. Considérons maintenant le cas d'une courbe non analytique $\mathfrak{F}$ pour laquelle nous voulons aussi démontrer la validité de la formule isopérimétrique (II).

Nous nous bornons à supposer que $\mathfrak{F}$ est rectifiable et simplement fermée. La longueur L de la courbe $\mathfrak{F}$ est donc un nombre bien défini, ainsi que l'aire A et l'intégrale $C(\mathfrak{F})$ de la courbure totale du domaine situé à l'intérieur de $\mathfrak{F}$. Une démonstration de ce fait serait basée sur l'approximation de $\mathfrak{F}$ à l'aide de polygones géodésiques.

Comme nous l'avons fait pour une courbe analytique régulière au n⁰ 5. 3, nous pouvons aussi définir la distance $\varrho(P, \mathfrak{F})$ d'un point P du plan de Riemann à la courbe $\mathfrak{F}$ comme la borne inférieure de la longueur des arcs de courbe rectifiables joignant P et un point quelconque Q de $\mathfrak{F}$. Nous pouvons également définir les arcs minimum et les points extrêmes par rapport à la courbe non analytique $\mathfrak{F}$. En particulier, nous continuerons à désigner par $\bar{p}(= -\bar{r})$ la longueur, comptée négativement, du plus grand arc minimum contenu à l'intérieur de $\mathfrak{F}$. Remarquons par contre que κ perd sa signification primitive, dès que l'on ne suppose plus que les fonctions qui représentent la courbe $\mathfrak{F}$ sont au moins deux fois dérivables; dans ce cas, la formule (I) n'a plus de sens. Il n'en est heureusement pas de même pour la formule (II), qui, pour cette raison, présente un réel avantage sur la formule (I). Toutes les formules contenant κ sont cependant valables, d'une manière tout à fait générale, à la condition que l'on entende par κ la quantité $2\pi - C(\mathfrak{F})$; c'est ce que nous ferons jusqu'à la fin du chapitre 11, en particulier au n⁰ 11. 5.

11. 4. 1. Afin d'appliquer les résultats déjà obtenus, nous considérons une suite de courbes analytiques régulières, simplement fermées, $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots$ convergeant vers $\mathfrak{F}$ et telles que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \quad L_n &= L\,, \\ \lim_{n\to\infty} \quad A_n &= A\,, \\ \lim_{n\to\infty} C(\mathfrak{F}_n) &= C(\mathfrak{F})\,, \\ \lim_{n\to\infty} \quad \bar{p}_n &= \bar{p}\,; \end{aligned} \tag{8}$$

les symboles avec l'indice n ayant la même signification pour la courbe $\mathfrak{F}_n$ qu'au n⁰ 11. 1 les symboles sans indice pour la courbe $\mathfrak{F}$.

Si $\mathfrak{F}$ se compose d'un nombre fini d'arcs analytiques, on construirait facilement la suite de courbes dont il est question à l'aide par exemple de la représentation conforme de l'intérieur de $\mathfrak{F}$ sur un cercle. Les quatre relations exigées sont alors facilement vérifiables pour les courbes correspondant aux cercles concentriques, tendant vers le cercle frontière.

Si $\mathfrak{F}$ ne remplit aucune hypothèse de régularité autre que celle énoncée, il faudrait faire une double approximation, tout d'abord de $\mathfrak{F}$ à l'aide de polygones géodésiques convenablement choisis, puis de chacun de ces polygones à l'aide de courbes analytiques régulières. Notre but n'est pas d'entrer dans les calculs qui permettraient de trouver, à l'aide du procédé diagonal, la suite cherchée et de vérifier les quatre relations exigées.

Les formules (3), (4) et (II), vraies pour chacune des courbes $\mathfrak{F}_n$, peuvent être directement étendues à la courbe $\mathfrak{F}$, grâce aux formules (8).

11. 5. Il nous reste à discuter le signe d'égalité de la formule (I) pour des courbes quelconques. Nous allons également démontrer qu'une condition nécessaire pour l'égalité et que la courbe soit située dans un plan euclidien.

Supposons qu'on aie le signe " = " dans la formule (I). Comme au n⁰ 11. 2, on en déduit, en vertu de (4), que

$$L - \kappa \bar{r} = 0 \ , \tag{5}$$

d'où l'on tire à l'aide des formules (8)

$$\lim_{n \to \infty} (L_n - \kappa_n \bar{r}_n) = 0 \ . \tag{5'}$$

La formule (6), valable pour chacune des courbes $\mathfrak{F}_n$ nous permet alors d'affirmer que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\bar{p}_n}^{0} C_n(p)\, dp = 0 \ . \tag{7'}$$

Pour déduire de là que, pour p constant,

$$\lim_{n \to \infty} C_n(p) = 0 \ , \tag{7''}$$

nous considérons deux nombres p' et p'', où l'on a $\bar{p} < p' < p'' < 0$; d'après (8) on a dès que n est suffisamment grand $\bar{p}_n < p'$; on peut en conclure, puisque $C_n(p)$ est positif et ne peut croître lorsque p croît, que

$$\int_{\bar{p}_n}^{0} C_n(p)\, dp \geqq \int_{p'}^{p''} C_n(p)\, dp \geqq (p'' - p')\, C_n(p'') \ .$$

Cette formule combinée avec (7′) nous livre immédiatement (7″).

Désignons par $\mathfrak{B}_n(p)$ le domaine compris entre la courbe et la vraie parallèle à distance p de cette courbe. Il est aisé de voir que la convergence des courbes $\mathfrak{F}_n$ vers la courbe $\mathfrak{F}$ entraîne l'existence d'un domaine $\mathfrak{G}$ compris entièrement à l'intérieur de tous les $\mathfrak{B}_n(p)$ dont l'indice n est suffisamment grand. On peut prendre par exemple l'intérieur d'un cercle géodésique dont le centre est à distance $\frac{p}{2}$ de $\mathfrak{F}$ et dont le rayon est suffisamment petit. En désignant par $C(\mathfrak{G})$ l'intégrale de la courbure totale sur le domaine $\mathfrak{G}$, on a évidemment

$$C(\mathfrak{G}) \leqq C_n(p) ,$$

En tenant compte de (7″), on voit que

$$C(\mathfrak{G}) = 0 ,$$

ce qui n'est possible que si $K(x, y)$ est identiquement nul, c'est-à-dire, à cause de l'analyticité de $K(x, y)$, si l'on se trouve dans un plan euclidien. Dans ce cas bien connu, la solution du problème isopérimétrique nous permet de résumer nos résultats par le théorème suivant:

Théorème B. *L'égalité dans les formules isopérimétriques (I) et (II) n'a lieu que si le plan de Riemann est isométrique au plan euclidien et si la courbe considérée est un cercle dans ce plan.*

11. 6. Dans les plans de Riemann où $C_T < 2\pi$, on peut donner une inégalité isopérimétrique dont la constante ne dépend pas de la courbe considérée. On a en effet $C(\mathfrak{F}) < C_T$ et l'inégalité (II) peut évidemment être remplacée par

$$L^2 \geqq 2\,(2\pi - C_T)\,A \quad . \tag{III}$$

Si $C_T = 2\pi$, cette inégalité est triviale.

Du n⁰ 11. 5, on tire immédiatement que l'égalité ne peut avoir lieu que si $C_T = 0$, c'est-à-dire si l'on se trouve dans un plan euclidien.

12. Une limite

Le but de ce chapitre est la démonstration du

Théorème C. *Dans un plan de Riemann à courbure totale non négative, on a pour l'ensemble des courbes simplement fermées*

$$\text{borne inf.} \left(\frac{L^2}{A}\right) = 2\,(2\pi - C_T) \; .$$

12. 1. Une courbe simplement fermée, analytique régulière $\mathfrak{J}$ étant donnée, nous désignons par $L^*(p)$ la longueur de la composante extérieure de la vraie parallèle à distance p. Cette composante extérieure est une courbe simplement fermée (n⁰ 9. 2); nous désignons par $A^*(p)$ l'aire du domaine compris à l'intérieur.

Nous avons vu dans l'introduction que le théorème C sera démontré en même temps que la formule

$$\lim_{p \to \infty} \frac{L^{*2}(p)}{A^*(p)} = 2(2\pi - C_T) \ . \tag{1'}$$

Les relations évidentes $L^*(p) \leqq L(p)$ et $A^*(p) \geqq A(p)$ ainsi que l'inégalité isopérimétrique (III) appliquée à la composante extérieure de la vraie parallèle considérée, nous livrent la relation suivante:

$$\frac{L^2(p)}{A(p)} \geqq \frac{L^{*2}(p)}{A^*(p)} \geqq 2(2\pi - C_T) \ .$$

Pour obtenir (1′), il suffira donc de démontrer

$$\lim_{p \to \infty} \frac{L^2(p)}{A(p)} = 2(2\pi - C_T) \ . \tag{1}$$

Cette formule repose sur la relation fondamentale suivante, dont nous présenterons la démonstration au n⁰ 12. 2

$$\lim_{p \to \infty} \frac{L(p)}{p} = 2\pi - C_T \ . \tag{2}$$

On peut en effet déduire de cette dernière formule, à l'aide du théorème de l'Hospital la formule

$$\lim_{p \to \infty} \frac{A(p)}{p^2} = \frac{2\pi - C_T}{2} \ . \tag{3}$$

Il suffit de remarquer que $\lim\limits_{p \to \infty} A(p) = \infty$ d'après le théorème A et que $\dfrac{dA(p)}{dp} = L(p)$ d'après le n⁰ 9. 9. Si $C_T \neq 2\pi$ un calcul élémentaire permet de tirer (1) de (2) et (3). Si $C_T = 2\pi$ la démonstration nécessite une petite modification que nous présenterons au n⁰ 12. 3.

12. 2. Avant de donner la démonstration proprement dite de la formule (2), nous voulons tout d'abord nous assurer de l'existence de la limite de $\dfrac{L(p)}{p}$ lorsque p tend vers l'infini. Il suffit pour cela de montrer que $\dfrac{L(p)}{p}$ *est une fonction positive, non croissante de p.*

Au n⁰ 9. 4, nous avons déjà mis $L(p)$ sous la forme suivante:

$$L(p) = \int_0^L \varphi(p, q)\, dq$$

où

$$\varphi(p, q) = f(p, q) \quad \text{si} \quad 0 \leqq p \leqq \overline{P}(q)\ ,$$

et

$$\varphi(p, q) = 0 \quad \text{si} \quad p > \overline{P}(q)\ .$$

Il est facile de démontrer que $\dfrac{\varphi(p,q)}{p}$ est une fonction non croissante de p. En effet

pour $p_2 > p_1 > \overline{P}(q)$, $\dfrac{\varphi(p_2, q)}{p_2}$ et $\dfrac{\varphi(p_1, q)}{p_1}$ sont tous deux nuls;

pour $p_2 > \overline{P}(q) \geqq p_1$, $\dfrac{\varphi(p_2, q)}{p_2}$ est nul et $\dfrac{\varphi(p_1, q)}{p_1}$ est positif ;

pour $\overline{P}(q) \geqq p_2 > p_1$, $\dfrac{\varphi(p, q)}{p}$ est égal à $\dfrac{f(p, q)}{p}$. Un calcul élémentaire nous montre que la dérivée de cette fonction est négative pour toute valeur de $p > 0$. On a en effet

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f(p, q)}{p}\right) = \frac{\dfrac{\partial f(p, q)}{\partial p} - \dfrac{f(p, q)}{p}}{p}\ .$$

Or en tenant compte de $f(0, q) > 0$ (n⁰ 6. 2) on voit que

$$\frac{f(p, q)}{p} > \frac{f(p, q) - f(0, q)}{p}\ .$$

Le théorème des accroissements finis nous permet d'affirmer que le membre de droite est égal à $\dfrac{\partial f(p^*, q)}{\partial p}$ où $p^* < p$. Nous obtenons donc la relation

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f(p, q)}{p}\right) < \frac{\dfrac{\partial f(p, q)}{\partial p} - \dfrac{\partial f(p^*, q)}{\partial p}}{p}\ .$$

Mais le membre de droite ne saurait être positif, car l'hypothèse de la courbure non négative du plan de Riemann entraîne pour les valeurs de p considérées $\dfrac{\partial^2 f(p, q)}{\partial p^2} < 0$ à cause de la formule d) du n⁰ 6. 2.

Pour q constant, la fonction $\frac{\varphi(p,q)}{p}$ n'est donc jamais croissante; on peut évidemment affirmer la même chose de la fonction

$$\frac{L(p)}{p} = \int_0^L \frac{\varphi(p,q)}{p}\, dq \quad .$$

Comme cette fonction est positive pour toute valeur de $p > 0$, elle tend nécessairement vers une limite lorsque p tend vers l'infini.

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration de la formule (2) que nous décomposons en deux parties.

12. 2. 1. Nous démontrerons tout d'abord

$$\frac{L(p)}{p} \geqq 2\pi - C_T \ . \tag{2'}$$

Comme nous venons de voir que $\frac{L(p)}{p}$ est une fonction non croissante de p nous savons que, pour tout p', où $0 \leqq p' \leqq p$

$$L(p') \geqq L(p)\,\frac{p'}{p} \ .$$

En introduisant cette inégalité dans la formule du n° 9. 9, nous obtenons

$$A(p) = \int_0^p L(p')\, dp' \geqq \frac{p\,L(p)}{2} \quad .$$

En tenant compte de cette inégalité dans la formule du n° 12. 1

$$\frac{L^2(p)}{A(p)} \geqq 2(2\pi - C_T)$$

nous pouvons écrire

$$L^2(p) \geqq (2\pi - C_T)\cdot p\cdot L(p)$$

d'où il est facile de déduire la formule (2').

12. 2. 2. On peut d'autre part démontrer que

$$\lim_{p\to\infty} \frac{L(p)}{p} \leqq 2\pi - C_T \, . \tag{2''}$$

Nous avons vu en effet au n° 9. 7 que l'on a pour tout $p > 0$

$$\frac{dL(p)}{dp} \leqq 2\pi - C(\mathfrak{F}) - C(p) \ .$$

Le membre de droite ne pouvant croître avec p — à cause de la courbure du plan de Riemann considéré — on a pour tout $p > p_0$

$$\frac{dL(p)}{dp} \leqq 2\pi - C(\mathfrak{F}) - C(p_0)$$

d'où l'on tire, grâce à la formule du n° 9. 7

$$L(p) - L(p_0) \leqq [2\pi - C(\mathfrak{F}) - C(p_0)]\,(p - p_0)\,.$$

Une conséquence directe de cette formule est

$$\lim_{p\to\infty} \frac{L(p)}{p} \leqq 2\pi - C(\mathfrak{F}) - C(p_0)$$

d'où l'on déduit la formule (2″), car en prenant p_0 suffisamment grand, on peut choisir le membre de droite aussi près que l'on veut de $2\pi - C_T$.

12. 2. 3. La formule (2) est maintenant une simple conséquence des formules (2′) et (2″) que nous venons de démontrer. Elle est donc aussi démontrée, et avec elle pour les plans de Riemann où $C_T \neq 2\pi$ la formule (1) et le théorème C, but de ce chapitre.

12. 3. Un cas cependant reste en suspens: celui des plans de Riemann pour lesquels $C_T = 2\pi$. La formule (1) à démontrer est alors

$$\lim_{p\to\infty} \frac{L^2(p)}{A(p)} = 0\,.$$

De la formule (2″) on déduit facilement que, étant donné un nombre positif quelconque ε, on a pour $p > p_0(\varepsilon)$

$$L(p) < \varepsilon p\,.$$

Nous avons d'autre part montré au n° 12. 2. 1 que

$$\frac{L(p)}{A(p)} \leqq \frac{2}{p}\,.$$

Nous tirons de ces deux inégalités la formule suivante, d'où il est facile de déduire la relation demandée, puisque ε peut être choisi arbitrairement petit.

$$\frac{L^2(p)}{A(p)} < 2\varepsilon\,.$$

13. Conséquences

Le but de ce dernier chapitre est la démonstration du

Théorème D. *Si $C_T < 2\pi$, l'aire limitée par une courbe simplement fermée de longueur L est bornée supérieurement pour tout L.*

Si $C_T = 2\pi$, l'aire limitée par une courbe simplement fermée de longueur $L < L^*$ est bornée supérieurement; L^* est une constante positive, éventuellement infinie, qui dépend du plan de Riemann considéré; c'est la même constante qu'au n° 10.

Nous entendons, qu'étant donné un nombre L satisfaisant à nos conditions, il existe un nombre $\overline{A}(L)$ plus grand que l'aire A du domaine compris à l'intérieur de toute courbe simplement fermée de longueur L.

13. 1. La première partie de ce théorème est une conséquence immédiate de l'inégalité isopérimétrique (III), qui nous permet même d'évaluer la borne en question. On a en effet, grâce à cette inégalité

$$A \leqq \frac{L^2}{2(2\pi - C_T)}\,, \quad \text{donc} \quad \overline{A}(L) \leqq \frac{L^2}{2(2\pi - C_T)}\,.$$

13. 2. La démonstration de la seconde partie du théorème D est un peu plus compliquée. Dans ce cas, l'inégalité III est en effet triviale et ne peut nous servir de moyen de démonstration.

Nous allons commencer par présenter quelques considérations préliminaires, avant de passer à la démonstration indirecte de cette proposition.

13. 2. 1. Dans un plan de Riemann quelconque, sur la courbure duquel nous ne faisons pas d'hypothèse, nous considérons une suite de courbes rectifiables, simplement fermées $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots$. Au n° 10. 1, nous avons défini une suite divergente de courbes $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots$ par la condition que toute suite de points $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ appartenant respectivement à $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots$ soit divergente.

13. 2. 2. Nous allons démontrer que

Si toutes les courbes $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots$ d'une suite ont la même longueur et si l'aire comprise à l'intérieur tend vers l'infini, la suite est divergente.

Soit L la longueur des courbes $\mathfrak{F}_n$.

Pour que l'aire comprise à l'intérieure de la courbe $\mathfrak{F}_n$ tende vers l'infini avec n, il faut évidemment qu'il existe une suite divergente de points $P_1, P_2, \ldots P_n, \ldots$ appartenant respectivement à $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots$; c'est une conséquence de la remarque du n° 4. 3. P étant un point fixe du plan de Riemann, nous avons donc

$$\lim_{n \to \infty} \varrho(P, P_n) = \infty\,.$$

Considérons maintenant une suite quelconque de points $P_1' P_2' \ldots, P_n'$

appartenant respectivement à $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots$. On a évidemment $\varrho(P_n, P'_n) \leqq \frac{L}{2}$ et grâce à la formule du n⁰ 4. 2 c)

$$\varrho(P, P'_n) \geqq \varrho(P, P_n) - \varrho(P_n, P'_n)$$

on peut affirmer que

$$\lim \varrho(P, P'_n) = \infty \; .$$

Une suite quelconque de points $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n, \ldots$ appartenant respectivement à $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots$ est donc divergente, ce qui démontre la proposition.

13. 2. 3. Etant donné dans un plan de Riemann une suite divergente de courbes $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots$ et un domaine borné $\mathfrak{B}$, nous avons vu au n⁰ 10. 1 que pour un n assez grand, le domaine $\mathfrak{B}$ n'a aucun point commun avec $\mathfrak{F}_n$ et qu'il est situé soit entièrement à l'intérieur, soit entièrement à l'extérieur.

Si $\mathfrak{B}$ est situé à l'intérieur de toutes les courbes $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots$ nous appelons la suite, comme au n⁰ 10. 1, *une suite divergente de ceintures autour de* $\mathfrak{B}$. Si $\mathfrak{B}$ est situé à l'extérieur de toutes les courbes $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots$, nous appelons la suite *une suite divergente de boucles extérieures à* $\mathfrak{B}$. Etant donné un domaine $\mathfrak{B}$, il est évident que toute suite divergente $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots$ contient soit une suite partielle divergente de ceintures, soit une suite partielle divergente de boucles extérieures; ces deux possibilités ne s'excluent pas.

Nous avons déjà fait au n⁰ 10. 1 la remarque suivante:

Etant donné un domaine $\mathfrak{B}'$ et une suite divergente de ceintures autour d'un domaine $\mathfrak{B}$, il existe un ν tel que la suite $\mathfrak{F}_\nu, \mathfrak{F}_{\nu+1}, \mathfrak{F}_{\nu+2}, \ldots$ forme une suite divergente de ceintures autour de $\mathfrak{B}'$.

On constate de même qu'étant donné un domaine $\mathfrak{B}'$ et une suite divergente de boucles $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots$ extérieures à un domaine $\mathfrak{B}$, il existe un ν tel que la suite $\mathfrak{F}_\nu, \mathfrak{F}_{\nu+1}, \mathfrak{F}_{\nu+2}, \ldots$ forme une suite divergente de boucles extérieures à $\mathfrak{B}'$.

13. 3. Dans un plan de Riemann à courbure non négative, considérons maintenant une suite divergente de boucles $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots$ de longueur L extérieures à un domaine $\mathfrak{B}$. Nous allons démontrer la formule suivante:

$$\varlimsup_{n \to \infty} A(\mathfrak{F}_n) \leqq \frac{L^2}{4\pi}$$

qui montre bien que dans ce cas l'aire comprise à l'intérieure des courbes $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots$ est bornée.

On a en effet $\lim C(\mathfrak{F}_n) = 0$, car on peut toujours prendre un domaine borné $\mathfrak{B}'$ tel que $C_T - C(\mathfrak{B}') < \varepsilon$ et pour n suffisamment grand, nous venons de voir que $\mathfrak{B}'$ est extérieur à $\mathfrak{F}_n$, d'où $C(\mathfrak{F}_n) < \varepsilon$. L'inégalité isopérimétrique (II) nous permet de conclure que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ A(\mathfrak{F}_n) \leqq \lim_{n\to\infty} \frac{L^2}{2(2\pi - C(\mathfrak{F}_n))} = \frac{L^2}{4\pi} .$$

13. 3. 1. Considérons d'autre part une suite divergente de ceintures $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots$ autour d'un domaine $\mathfrak{B}$; comme elle finit par contenir tout domaine borné, on peut affirmer, grâce au théorème A du n° 10 que

$$\lim_{n\to\infty} A(\mathfrak{F}_n) = \infty .$$

Mais il résulte d'autre part du n° 10. 2 que

$$\lim_{n\to\infty} L(\mathfrak{F}_n) \geqq L^* > 0 .$$

13. 4. Nous sommes maintenant à même de démontrer le théorème D. En effet, étant donné un nombre L, s'il n'existe pas de borne supérieure pour l'aire du domaine compris à l'intérieur de toute courbe simplement fermée de longueur L, on peut trouver une suite de courbes $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots$ telles que $L(\mathfrak{F}_n) = L$ et que $\lim_{n\to\infty} A(\mathfrak{F}_n) = \infty$.

Etant donné un domaine $\mathfrak{B}$ quelconque, il faut, à cause du n° 13. 2. 2, que la suite de courbes soit divergente; à cause du n° 13. 3, cette suite ne saurait contenir une suite partielle infinie de boucles extérieures à $\mathfrak{B}$; à partir d'un certain n la suite est donc une suite divergente de ceintures autour de $\mathfrak{B}$. Il faut, à cause du n° 13. 3. 1, que L soit plus grand ou égal à L^*; si L est plus petit que L^*, une suite telle que nous l'avons supposée est impossible, ce qui démontre le théorème D.

Remarquons qu'une telle suite ne peut exister que si L^* est fini. Si $C_T < 2\pi$, l'inégalité isopérimétrique (III) nous montre que ce n'est pas le cas. On a en effet, pour une suite quelconque de courbes $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots$

$$L^2(\mathfrak{F}_n) \geqq 2(2\pi - C_T) A(\mathfrak{F}_n) .$$

Pour une suite divergente de ceintures, $A(\mathfrak{F}_n)$ tend vers l'infini; il en est de même de $L(\mathfrak{F}_n)$ et l'on a évidemment $L^* = \infty$, ce qui démontre de nouveau la première partie du théorème D.

(Reçu le 2 avril 1941.)