

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 13 (1940-1941)

Artikel: Fondements d'une théorie générale de la courbure linéaire.
Autor: Egerváry, Eugène / Alexits, Georges
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-13563>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Fondements d'une théorie générale de la courbure linéaire

PAR EUGÈNE EGERVÁRY et GEORGES ALEXITS, Budapest

L'évolution de l'analyse mathématique a suggéré de bonne heure l'idée de traduire les propriétés locales d'une figure géométrique en termes du calcul infinitésimal. Bien que cette méthode d'arithmétisation ait établi de nouveaux aspects à l'époque où il ne s'agissait que de définir plus ou moins exactement les notions intuitives de géométrie, on ne peut pas contester que l'arithmétisation illimitée a conduit, en quelque sorte, à une certaine décadence de l'idée géométrique. En effet, l'identification de la figure intuitive avec l'ensemble des valeurs de certaines fonctions dérivables est un procédé arbitraire et, en tout cas, contraire à l'esprit géométrique. Mais, abstraction faite de la tendance analyste qui veut transformer une partie considérable de la géométrie en une simple application du calcul infinitésimal, les conditions de dérivabilité créent, même du point de vue analyste, une atmosphère vague; car on ne connaît guère le sens géométrique exact de l'hypothèse que les fonctions par lesquelles on a réalisé la représentation paramétrique d'une figure arbitraire possèdent, dans un certain intervalle, une n -ième dérivée. La géométrie infinitésimale a donc un caractère heuristique; ses méthodes ont été imposées pour remédier à l'incapacité des méthodes de la géométrie classique; mais elles ne portent point les traits d'une nécessité mathématique.

Dans l'état actuel du développement de la science, il faut absolument reprendre le problème des fondements de la géométrie infinitésimale, en étudiant systématiquement les propriétés locales intrinsèques des continus sans faire appel à l'introduction de coordonnées. Alors, les propriétés locales des continus seront caractérisées par l'intermédiaire de la notion de distance, celle-ci étant l'élément déterminant de l'espace. Il s'agit donc d'une recherche systématique de certains invariants des isomorphies; invariants caractérisant les propriétés métriques des continus de même que certains invariants des homéomorphies caractérisent leurs propriétés topologiques.

L'idée de fonder l'étude des propriétés locales des continus uniquement sur la recherche des relations entre les distances mutuelles de leurs points est due à M. Menger¹). Il a commencé ses recherches par une étude

¹) *Menger*, 10. (Le nombre après le nom de l'auteur indique le numéro sous lequel le titre de l'ouvrage respectif figure dans la bibliographie que nous avons réunie à la fin de ce mémoire.

approfondie de la notion de première courbure d'un arc. La notion de deuxième courbure (torsion) d'un arc a été recherchée de ce point de vue par l'un des auteurs²⁾, tandis que l'autre³⁾ a réussi à introduire une définition générale des courbures supérieures d'un arc euclidien; définition qui se prête à une généralisation immédiate aux espaces distanciés.

Le plan du présent travail est le suivant: Nous définirons d'abord, au § 1, la notion de courbure linéaire d'ordre n . (Nous parlons d'une courbure *linéaire* pour mettre en évidence le caractère linéaire de notre notion de courbure, en opposition aux notions de courbure superficielle, courbure de Riemann, etc.) Nous passerons, au § 2, à la recherche des propriétés de continuité de la n -ième courbure linéaire. Il suit, au § 3, une recherche de la structure des continus euclidiens ayant une courbure linéaire d'ordre n ; puis nous allons étudier, au § 4, l'existence des courbures linéaires d'un arc situé dans un espace euclidien et assujetti aux conditions de dérivabilité, habituelles dans la géométrie infinitésimale. Nous nous occuperons enfin, au § 5, des arcs dont la n -ième courbure linéaire s'évanouit partout.

§ 1. La définition de la n -ième courbure linéaire

1.1. Nous appellerons *espace semi-distancié* un ensemble E tel que à tout couple p, q de ses éléments soit attaché un nombre pq assujetti aux conditions suivantes:

1. $pq = qp \geq 0$;
2. $pq = 0$ et $p = q$ s'entraînent réciproquement.

Les éléments de E s'appellent *points* de l'espace E et le nombre pq l'*écart* des points p et q . L'espace semi-distancié E est un espace *distancié*, si l'écart pq satisfait, outre les conditions 1 et 2, à l'inégalité triangulaire

3. $pq + qr \geq pr$.

Dans ce cas, on appelle l'écart pq la *distance* des points p et q . Considérons n points p_1, p_2, \dots, p_n d'un espace semi-distancié quelconque et posons

$$D(p_1, p_2, \dots, p_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & (p_i p_j)^2 \end{vmatrix} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) .$$

Ce déterminant jouera un rôle éminent dans nos recherches suivantes.

²⁾ *Alexits*, 1, 2.

³⁾ *Egerváry*, 6.

1.2. Etant donné dans l'espace semi-distancié E un système de $(n + 2)$ points différents p_0, p_1, \dots, p_{n+1} tels que⁴⁾ $D(p_0, p_1, \dots, p_n) \neq 0$, $D(p_1, p_2, \dots, p_{n+1}) \neq 0$, nous appellerons *courbure linéaire des points* p_0, p_1, \dots, p_{n+1} correspondant au sens de parcours $p_0 \rightarrow p_1 \rightarrow \dots \rightarrow p_{n+1}$ le nombre positif

$$\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1}) = \frac{n + 1}{p_0 p_{n+1}} \sqrt{\frac{|D(p_0, p_1, \dots, p_{n+1}) \cdot D(p_1, p_2, \dots, p_n)|}{|D(p_0, p_1, \dots, p_n) \cdot D(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})|}}. \quad (1)$$

La valeur de $\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$ dépend évidemment du sens de parcours du système de $n + 2$ points considéré, excepté au cas où $n = 1$; puisque, en prenant $n = 1$, on obtient :

$$- D(p_0, p_1, p_2) =$$

$$= (p_0 p_1 + p_0 p_2 + p_1 p_2) (p_0 p_1 + p_0 p_2 - p_1 p_2) (p_0 p_1 + p_1 p_2 - p_0 p_2) (p_0 p_2 + p_1 p_2 - p_0 p_1),$$

$$D(p_0 p_1) = 2(p_0 p_1)^2, \quad D(p_1, p_2) = 2(p_1 p_2)^2, \quad -D(p_1) = 1;$$

par conséquent :

$$\kappa(p_0, p_1, p_2) =$$

$$= \frac{\sqrt{|(p_0 p_1 + p_0 p_2 + p_1 p_2) (p_0 p_1 + p_0 p_2 - p_1 p_2) (p_0 p_1 + p_1 p_2 - p_0 p_2) (p_0 p_2 + p_1 p_2 - p_0 p_1)|}}{p_0 p_1 \cdot p_0 p_2 \cdot p_1 p_2}.$$

Cette expression est symétrique et elle coïncide avec la formule élémentaire dont M. Menger⁵⁾ s'est servi pour définir la courbure de trois points d'un espace distancié.

1.3. Soit maintenant p_0 un point d'accumulation de l'espace E . Envisageons l'expression $\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$ pour tout système de $n + 2$ points p_0, p_1, \dots, p_{n+1} de E et pour tout sens de parcours de ces points pour lesquels $\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$ existe. Admettons encore l'existence de la limite⁶⁾

$$\kappa_n(p_0) = \lim_{p_i \rightarrow p_0} \kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n + 1). \quad (2)$$

⁴⁾ Cette condition équivaut, dans un espace euclidien, à la condition que, ni les points p_0, p_1, \dots, p_n , ni p_1, p_2, \dots, p_{n+1} , ne soient pas situés dans un hyperplan $(n - 1)$ -dimensionnel.

⁵⁾ Menger, 10.

⁶⁾ La restriction engendrée par la condition que la limite de $\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$ existe pour *tout* sens de parcours du système de $n + 2$ points p_0, p_1, \dots, p_{n+1} disparaît, s'il s'agit d'une courbe de la géométrie infinitésimale classique; car, dans ce cas, tout sens de parcours équivaut, comme nous le verrons, au sens de parcours naturel de la courbe considérée.

Nous appellerons $\kappa_n(p_0)$ la n -ième courbure linéaire de l'espace E au point p_0 . Le point p_0 joue dans cette définition de la n -ième courbure linéaire un rôle particulier. Pour le faire disparaître, on peut introduire une n -ième courbure linéaire de seconde espèce, en posant

$$\kappa_n^*(p_0) = \lim_{p_i \rightarrow p_0} \kappa(p_1, p_2, \dots, p_{n+2}) \quad (i = 1, 2, \dots, n+2) \quad (2^*)$$

où l'expression $\kappa(p_1, p_2, \dots, p_{n+2})$ est à former pour tout système de $n+2$ points de E et pour tout sens de parcours de ces points pour lesquels $\kappa(p_1, p_2, \dots, p_{n+2})$ existe.

1.4. La première courbure linéaire $\kappa_1(p_0)$ est identique avec la courbure d'arc de M. Alt⁷⁾, tandis que la première courbure linéaire de seconde espèce $\kappa_1^*(p_0)$ se réduit à la définition de la courbure d'arc de M. Menger⁸⁾. Pour $n = 2$, on a $D(p_1, p_2) = 2(p_1 p_2)^2$, par suite

$$\kappa(p_0, p_1, p_2, p_3) = \frac{p_2 p_3}{p_1 p_4} \sqrt{\frac{18 |D(p_0, p_1, p_2, p_3)|}{|D(p_0, p_1, p_2) \cdot D(p_1, p_2, p_3)|}}$$

Les secondes courbures linéaires $\kappa_2(p_0)$ et $\kappa_2^*(p_0)$ se réduisent donc aux expressions par lesquelles l'un des auteurs⁹⁾ a réussi à définir la torsion des espaces distanciés.

1.5. Dans l'espace euclidien k -dimensionnel E_k , le sens géométrique des courbures linéaires est bien plausible. En effet, n étant ≥ 1 , tout système de $n+1$ points q_1, q_2, \dots, q_{n+1} de l'espace E_k détermine un simplexe n -dimensionnel ayant pour sommets les points q_1, q_2, \dots, q_{n+1} . Désignons par $V(q_1, q_2, \dots, q_{n+1})$ le volume de ce simplexe et posons, pour $n = 0$, $V(q_1) = 1$. Alors, les déterminants figurant dans la définition de la n -ième courbure linéaire se laissent représenter par l'intermédiaire des nombres $V(q_1, q_2, \dots, q_{n+1})$, puisqu'il est connu que

$$D(q_1, q_2, \dots, q_{n+1}) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n (n!)^2} [V(q_1, q_2, \dots, q_{n+1})]^2.$$

Dans l'espace E_k , l'expression $\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$ peut donc s'écrire sous la forme suivante:

$$\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1}) = \frac{(n+1)^2}{n \cdot p_0 p_{n+1}} \cdot \frac{V(p_0, p_1, \dots, p_{n+1}) \cdot V(p_1, p_2, \dots, p_n)}{V(p_0, p_1, \dots, p_n) \cdot V(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})}. \quad (3)$$

⁷⁾ Alt, 4.

⁸⁾ Menger, 10.

⁹⁾ Alexits, 1, 2.

Par conséquent, les courbures linéaires $\kappa_n(p_0)$ et $\kappa_n^*(p_0)$ se réduisent, dans les espaces euclidiens, aux expressions par l'intermédiaire desquelles l'un des auteurs¹⁰⁾ a défini la n -ième courbure d'un arc euclidien.

1.6. Soit $P_{i, n+i}$ l'hyperplan n -dimensionnel passant par les points $p_i, p_{i+1}, \dots, p_{i+n}$ et désignons par $\widehat{P_{i, n+i} P_{j, n+j}}$ l'angle¹¹⁾ des hyperplans $P_{i, n+i}$ et $P_{j, n+j}$. Il est connu¹²⁾ que

$$\sin \widehat{P_{0, n} P_{1, n+1}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{V(p_0, p_1, \dots, p_{n+1}) \cdot V(p_1, p_2, \dots, p_n)}{V(p_0, p_1, \dots, p_n) \cdot V(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})},$$

pourvu que $V(p_0, p_1, \dots, p_n) \neq 0 \neq V(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})$. On obtient par suite, en vertu de la relation (3):

$$\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1}) = (n+1) \frac{\sin \widehat{P_{0, n} P_{1, n+1}}}{p_0 p_{n+1}}. \quad (4)$$

1.7. Le sens géométrique de la n -ième courbure linéaire s'approche encore des notions habituelles de la géométrie infinitésimale, si l'on suppose que E est un arc situé dans l'espace E_k et représenté par k fonctions de la longueur s de l'arc E . Désignons, en effet, par η l'angle de deux hyperplans osculateurs n -dimensionnels de E , l'un appartenant au point p_0 , l'autre à un point voisin de p_0 . Il est aisé de démontrer¹³⁾ que, E étant un arc $(n+1)$ -fois dérivable, on a

$$(n+1) \lim_{p_i \rightarrow p_0} \frac{\sin \widehat{P_{0, n} P_{1, n+1}}}{p_0 p_{n+1}} = \frac{d\eta}{ds} \quad (i = 1, 2, \dots, n+1),$$

quel que soit l'ordre des points p_0, p_1, \dots, p_{n+1} ; par conséquent,

$$\kappa_n(p_0) = \frac{d\eta}{ds}.$$

¹⁰⁾ *Egerváry*, 6.

¹¹⁾ Désignons dans l'espace E_k par $x_{\mu\nu}$ ($\mu = 0, 1, \dots, n; \nu = 1, 2, \dots, k$) les coordonnées de $n+1$ points déterminant un hyperplan n -dimensionnel P et par $y_{\mu\nu}$ les coordonnées d'un autre système de $n+1$ points déterminant un hyperplan n -dimensionnel Q . Nous définissons l'angle η des hyperplans P et Q par la relation

$$\cos \eta = \frac{\|x_{\mu\nu} - x_{0\nu}\| \cdot \|y_{\mu\nu} - y_{0\nu}\|}{\sqrt{\|x_{\mu\nu} - x_{0\nu}\|^2 \cdot \|y_{\mu\nu} - y_{0\nu}\|^2}}.$$

Dans l'espace $(n+1)$ -dimensionnel, l'angle η se réduit à l'angle élémentaire des normales de P et Q . Cette définition de l'angle η remonte à Kronecker. Voir à ce sujet *H. Kühne*, 7.

¹²⁾ *Meyer*, 12.

¹³⁾ *Egerváry*, 6.

La notion de n -ième courbure linéaire généralise donc les notions infinitésimales de courbure et de torsion d'un arc euclidien.

§ 2. Propriétés générales des courbures linéaires

2.1. Un espace semi-distancié est *compact*, si toute suite infinie de ses points possède un point d'accumulation. Un espace distancié, connexe et compact, comprenant plus d'un point, s'appelle un *continu*. Si tout voisinage d'un point arbitraire du continu E contient un voisinage connexe, on dit que E est *localement connexe*. Introduisons pour un moment l'expression de *continu n fois courbé* pour un continu ayant la propriété que tout système de $n + 2$ de ses points, p_0, p_1, \dots, p_{n+1} , situés dans un voisinage suffisamment petit, ait une courbure linéaire $\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$ pour au moins un sens de parcours¹⁴). Après ces définitions, nous pouvons énoncer le théorème suivant¹⁵):

Si E est un continu localement connexe, n fois courbé et ayant à tout point p une n -ième courbure linéaire $\kappa_n(p)$, alors $\kappa_n(p)$ est une fonction de Baire de première classe au plus.

E étant un continu localement connexe, il existe, grâce à un théorème de Hahn et M. Mazurkiewicz¹⁶), une correspondance univoque et continue $f(x)$ transformant le segment $0 \leq x \leq 1$ dans le continu E . A un point arbitraire p_0 de E , il correspond donc au moins une valeur $0 \leq x_0 \leq 1$ telle que $p_0 = f(x_0)$. Choisissons les points p_1, p_2, \dots, p_{n+1} de sorte que $p_i = f\left(x_0 + \frac{i}{\nu}\right)$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$, où ν désigne un entier positif arbitraire. Le diamètre du système de $n + 2$ points p_0, p_1, \dots, p_{n+1} devient très petit, si ν devient assez grand. En prenant donc ν suffisamment grand, la courbure linéaire $\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$ existe pour un sens de parcours au moins, puisque E est, d'après l'hypothèse, un continu n fois courbé. Posons

$$\varphi_\nu(p_0) = \kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1}) \quad . \quad (5)$$

Comme $p_i = f\left(x_0 + \frac{i}{\nu}\right)$, la fonction $\varphi_\nu(p_0)$ ne dépend que du point $p_0 = f(x_0)$. On voit tout de suite que $\varphi_\nu(p)$ est une fonction continue en tout point p de E . En effet, il résulte de la relation (1) que, $p'_0, p'_1, \dots, p'_{n+1}$ et $p''_0, p''_1, \dots, p''_{n+1}$ étant deux systèmes de $n + 2$ points de E , la diffé-

¹⁴) Cette condition équivaut dans l'espace euclidien à la condition que $n + 1$ points ayant un diamètre suffisamment petit ne soient pas situés dans un hyperplan $(n - 1)$ -dimensionnel.

¹⁵) Pour $n = 2$ voir *Alexits*, 2.

¹⁶) Voir p. ex. *Menger*, 11.

rence $|\kappa(p'_0, p'_1, \dots, p'_{n+1}) - \kappa(p''_1, p''_2, \dots, p''_{n+1})|$ devient arbitrairement petite, pourvu que les points p'_i et p''_i soient assez voisins. Mais, il s'ensuit, en vertu des relations (2) et (5), que

$$\kappa_n(p) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi_\nu(p) ;$$

par suite, $\kappa_n(p)$ étant dans l'espace distancié E la limite d'une suite de fonctions continues, elle est une fonction de Baire au plus de première classe; c. q. f. d.

2.2. Si E est un espace distancié ayant partout une n -ième courbure linéaire de seconde espèce $\kappa_n^*(p)$, alors $\kappa_n^*(p)$ est une fonction continue dans l'espace E ¹⁷⁾.

Toute fonction étant continue en un point isolé de l'espace, nous n'avons qu'à envisager les points d'accumulation de E . Soit donc p un point-limite d'une suite de points $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(i)}, \dots$ de E . Il existe, en vertu de la relation (2*), pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un $\delta > 0$ tel que

$$|\kappa_n^*(p^{(i)}) - \kappa(p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \dots, p_{n+2}^{(i)})| < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

pourvu que les distances des points $p_j^{(i)}$ au point $p^{(i)}$ restent inférieures au nombre $\delta/2$. Mais, pour un i suffisamment grand, on a $pp^{(i)} < \delta/2$. Il s'ensuit donc, d'après l'inégalité triangulaire, $pp^{(i)} < \delta$. Par conséquent, si $\delta > 0$ est un nombre suffisamment petit, on obtient

$$|\kappa_n^*(p) - \kappa(p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \dots, p_{n+2}^{(i)})| < \frac{\varepsilon}{2} ;$$

par suite:

$$|\kappa_n^*(p) - \kappa_n^*(p^{(i)})| < \varepsilon ,$$

c. q. f. d.

2.3. Quant aux deux définitions différentes (2) et (2*) de la n -ième courbure linéaire, nous allons voir que leur différence n'est pas essentielle; car $\kappa_n^*(p)$ est, pour ainsi dire, la forme continue de $\kappa_n(p)$. Nous démontrerons à cet égard le théorème suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour que l'espace distancié et compact E ait partout une n -ième courbure linéaire de seconde espèce $\kappa_n^(p)$ est que $\kappa_n(p)$ existe et soit continue en tout point de E .*

La nécessité de notre condition est évidente, puisque l'existence de $\kappa_n^*(p)$ entraîne celle de $\kappa_n(p)$ et, $\kappa_n^*(p)$ étant continue d'après 2.2,

¹⁷⁾ Ce théorème a été démontré, pour $n = 1$, par Alt, 3, et, pour $n = 2$, par Alexits, 2.

$\kappa_n(p) = \kappa_n^*(p)$ l'est aussi. Pour démontrer la suffisance, nous avons besoin du lemme suivant :

Si $\kappa_n(p)$ est une fonction continue dans E , il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un $\delta > 0$ tel que

$$|\kappa_n(p_0) - \kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})| < \varepsilon$$

indépendamment du choix du point p_0 de E , pourvu que $\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$ existe et que les distances $p_0 p_j$, ($j = 1, 2, \dots, n + 1$), restent inférieures à δ .

Admettons que notre lemme soit faux et nous en déduirons une contradiction. Envisageons, à cet effet, deux systèmes de $n + 2$ points: p_0, p_1, \dots, p_{n+1} et q_0, q_1, \dots, q_{n+1} . On peut indiquer pour tout $\varepsilon > 0$ un $\delta(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$, dont la valeur dépend éventuellement du choix des points p_0, p_1, \dots, p_{n+1} , de sorte que

$$|\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1}) - \kappa(q_1, q_2, \dots, q_{n+1})| < \varepsilon, \quad (6)$$

pourvu que $p_j q_j < \delta(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$. Si, comme nous l'avons supposé, notre lemme était faux, il existerait une suite $\{p_0^{(i)}, p_1^{(i)}, \dots, p_{n+1}^{(i)}\}$ de systèmes de points tels que $p_0^{(i)} p_j^{(i)} < 1/i$ et

$$|\kappa_n(p^{(i)}) - \kappa(p_0^{(i)}, p_1^{(i)}, \dots, p_{n+1}^{(i)})| \geq 3\varepsilon, \quad (7)$$

quelque petit que soit le nombre $\varepsilon > 0$ donné à l'avance. L'espace E étant compact, on peut supposer sans restreindre la généralité que¹⁸⁾ la suite des points $p_0^{(1)}, p_0^{(2)}, \dots, p_0^{(i)}, \dots$ converge vers un point-limite p_0 . On peut donc prendre $p_0 p_0^{(i)} < \delta_1$; il en résulte, si $\delta_1 > 0$ est un nombre assez petit :

$$|\kappa_n(p_0) - \kappa_n(p_0^{(i)})| < \varepsilon. \quad (8)$$

La définition (2) de $\kappa_n(p_0)$ entraîne l'existence d'un nombre $\delta_2 > 0$ tel que, pour $p_0 p_j < \delta_2$, on ait

$$|\kappa_n(p_0) - \kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})| < \varepsilon. \quad (9)$$

Choisissons maintenant l'entier i de sorte que $1/i$ reste inférieur au plus petit des trois nombres positifs $\delta_1, \delta_2, \delta(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$, et que $p_0 p_j < 1/i, p_j p_j^{(i)} < 1/i, p_0^{(i)} p_j^{(i)} < 1/i$. Il en résulte

$$p_j p_j^{(i)} < \delta(p_0, p_1, \dots, p_{n+1}).$$

¹⁸⁾ Si la suite $p_0^{(1)}, p_0^{(2)}, \dots, p_0^{(i)}, \dots$ n'est pas convergente, on en peut extraire une suite partielle convergente.

On voit donc que, même en choisissant les points figurant aux inégalités (7), (8) et (9) de sorte que leurs distances satisfassent aux susdites conditions, les relations (7), (8) et (9) entraînent nécessairement l'inégalité

$$| \kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1}) - \kappa(p_0^{(i)}, p_1^{(i)}, \dots, p_{n+1}^{(i)}) | > \varepsilon ;$$

ce qui est en contradiction avec la relation (6), et la démonstration de notre lemme est achevée.

Passons maintenant à la démonstration de la suffisance de notre condition. Envisageons, à ce but, un système de $n + 2$ points p_1, p_2, \dots, p_{n+2} dont chacun a une distance inférieure à $\delta > 0$ du point p_0 arbitrairement choisi. Si $\delta > 0$ est suffisamment petit, il résulte de notre lemme que

$$| \kappa_n(p_1) - \kappa(p_1, p_2, \dots, p_{n+2}) | < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

quelque petit que soit $\varepsilon > 0$ et indépendamment du choix des points p_1, p_2, \dots, p_{n+2} . Comme $\kappa_n(p)$ est une fonction continue de p , on obtient

$$| \kappa_n(p_0) - \kappa_n(p_1) | < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

pourvu que $\delta > 0$ soit suffisamment petit; par conséquent

$$| \kappa_n(p_0) - \kappa(p_1, p_2, \dots, p_{n+2}) | < \varepsilon .$$

Nous avons donc démontré que, les points p_1, p_2, \dots, p_{n+2} étant situés dans un voisinage suffisamment petit du point p_0 , leur courbure linéaire diffère très peu de $\kappa_n(p_0)$. Cette proposition équivaut, d'après (2*), à l'existence de $\kappa_n^*(p_0) = \kappa_n(p_0)$; c. q. f. d.

§ 3. Propriétés des continus euclidiens doués d'une n-ième courbure linéaire

3.1. Soit dans ce paragraphe E un sous-ensemble de l'espace euclidien k -dimensionnel E_k . On appelle généralement voisinage du point p_0 de E un sous-ensemble ouvert U de E_k auquel p_0 est intérieur. Mais, pour simplifier les notations, nous appellerons *voisinage de p* , et nous désignerons par $U(p_0)$, l'ensemble des points communs de E et U .

Si l'ensemble E de E_k possède au point p_0 une n-ième courbure linéaire, aucun voisinage de p_0 n'est contenu dans un hyperplan $(n - 1)$ -dimensionnel de E_k .

En effet, si $U(p_0)$ était un voisinage de p_0 situé dans un hyperplan $(n - 1)$ -dimensionnel, le volume $V(p_0, p_1, \dots, p_n)$ du simplexe n -dimen-

sionnel déterminé par les points p_0, p_1, \dots, p_n s'évanouirait. On ne pourrait donc attribuer une courbure linéaire $\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$ à aucun système de $n + 2$ points p_0, p_1, \dots, p_{n+1} situés dans $U(p_0)$, parce que le dénominateur de la fraction figurant dans la définition (3) de cette expression s'évanouirait. Par suite, la n -ième courbure linéaire $\kappa_n(p_0)$ n'existerait pas non plus, contrairement à notre hypothèse.

3.2. Un sous-ensemble E de E_k possède en son point d'accumulation p_0 un hyperplan osculateur n -dimensionnel, si tout hyperplan n -dimensionnel passant par $n + 1$ points p_1, p_2, \dots, p_{n+1} arbitraires de E tend vers un seul hyperplan n -dimensionnel, lorsque p_1, p_2, \dots, p_{n+1} tendent sur E indépendamment vers p_0 .

Si le continu E de E_k possède en son point p_0 une n -ième courbure linéaire finie $\kappa_n(p_0)$, il y possède aussi un hyperplan osculateur n -dimensionnel.

Il existe, d'après 3.1, dans tout voisinage $U(p_0)$ de p_0 $n + 1$ points p_1, p_2, \dots, p_{n+1} de E qui déterminent exactement un hyperplan n -dimensionnel $P_{1, n+1}$. Nous avons à démontrer que $P_{1, n+1}$ tend vers une position-limite. Aucun voisinage de p_0 n'étant situé dans un hyperplan $(n - 1)$ -dimensionnel, on peut parvenir — s'il le faut par un petit déplacement des points p_1, p_2, \dots, p_n — à ce que les $n + 1$ points p_0, p_1, \dots, p_n déterminent aussi exactement un hyperplan n -dimensionnel $P_{0, n}$.

L'angle $\overset{\frown}{P_{0, n} P_{1, n+1}}$ est donc défini; on en obtient d'après (2), (3) et (4):

$$(n + 1) \lim_{p_i \rightarrow p_0} \frac{\sin \overset{\frown}{P_{0, n} P_{1, n+1}}}{p_0 p_{n+1}} = \kappa_n(p_0) .$$

Or $\kappa_n(p_0)$ étant un nombre fini, il en résulte $\overset{\frown}{P_{0, n} P_{1, n+1}} \rightarrow 0$; ce qui équivaut à notre proposition.

3.3. *Si le continu E de E_k possède à son point p_0 une n -ième courbure linéaire de second espèce $\kappa_n^*(p_0) \neq 0$, il existe un voisinage $U(p_0)$ de p_0 tel que tout hyperplan n -dimensionnel ait au plus $n + 1$ points communs avec $U(p_0)$.*

Admettons, en effet, que notre proposition soit fautive et nous en déduirons une contradiction. Soit donc $U_i(p_0)$ un voisinage de p_0 dont le diamètre est $< 1/i$. Il existe, d'après l'hypothèse, $n + 2$ points p_1, p_2, \dots, p_{n+2} de $U_i(p_0)$ situés dans un hyperplan n -dimensionnel. Par un petit déplacement éventuel des points p_1, p_2, \dots, p_{n+2} , on peut parvenir à ce que les hyperplans n -dimensionnels $P_{1, n+1}$ et $P_{2, n+2}$ aient un angle aussi

peu différent de zéro que l'on veut. Plus précisément, on peut choisir p_1, p_2, \dots, p_{n+2} , tout en restant dans le voisinage $U(p_0)$, de sorte que

$$\sin \widehat{P_{1,n+1} P_{2,n+2}} < \frac{p_1 p_{n+2}}{i} .$$

On en tire donc, d'après (2), (3) et (4) :

$$\kappa_n^*(p_0) = (n + 1) \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\sin \widehat{P_{1,n+1} P_{2,n+2}}}{p_1 p_{n+2}} = 0 ,$$

contrairement à notre hypothèse. C'est la contradiction annoncée.

3.4. *Si le continu E situé dans l'espace E_{n+1} possède en tout point p une n -ième courbure linéaire continue $\kappa_n(p) \neq 0$, alors E est un continu localement connexe décomposable en une infinité dénombrable d'arcs¹⁹⁾ rectifiables deux quelconques d'entre eux ayant un nombre fini de points communs.*

La fonction $\kappa_n(p)$ étant continue, $\kappa_n^*(p)$ existe, grâce au théorème 2.3, en tout point p de E ; on a donc partout $\kappa_n^*(p) = \kappa_n(p) \neq 0$. Par conséquent, il correspond, d'après 3.3, à chaque point p un voisinage $U(p)$ tel que tout hyperplan n -dimensionnel ait au plus $n + 1$ points communs avec $U(p)$. La somme de tous les voisinages $U(p)$ est le continu E ; mais d'après un théorème connu de MM. Borel et Lebesgue²⁰⁾, on peut extraire de cette infinité de voisinages un nombre fini, par exemple les voisinages $U(p_1), U(p_2), \dots, U(p_k)$, de sorte que E soit contenu dans la somme $U(p_1) + U(p_2) + \dots + U(p_k)$. Alors, chaque hyperplan n -dimensionnel ayant au plus $n + 1$ points communs avec $U(p_i)$, le continu E n'a donc pas plus de $k(n + 1)$ points communs avec un hyperplan n -dimensionnel quelconque. Notre théorème est par suite une conséquence immédiate d'un théorème²¹⁾ concernant les sous-continus de E_{n+1} ayant au plus un nombre fini de points communs avec un hyperplan n -dimensionnel arbitraire de E_{n+1} .

3.5. *Si le continu E situé dans l'espace E_3 possède en tout point p une deuxième courbure linéaire continue $\kappa_2(p) \neq 0$, alors E est un arc rectifiable ou une image homéomorphe de la circonférence.*

On voit d'abord que $\kappa_2^*(p) = \kappa_2(p) \neq 0$; il correspond donc, d'après 3.3, à tout point p de E un voisinage $U(p)$ n'ayant pas plus de 3 points communs avec un plan quelconque. Mais E est, d'après 3.4, un continu

¹⁹⁾ Nous appelons tout image homéomorphe du segment un *arc*.

²⁰⁾ Voir p. ex. *Menger*, 11.

²¹⁾ *Marchaud*, 9.

localement connexe; $U(p)$ contient par suite un voisinage connexe $U^*(p)$ dont la fermeture²²⁾ $\overline{U^*}(p)$ est aussi contenue dans $U(p)$. Un plan quelconque a donc au plus 3 points communs avec le continu $\overline{U^*}(p)$. Il en résulte, en vertu d'un théorème de M. Marchaud²³⁾, que $\overline{U^*}(p)$ est un arc rectifiable. Tout point de E est donc contenu dans un voisinage qui est un arc, E est donc lui-même un arc ou une image homéomorphe de la circonférence²⁴⁾. De plus, E étant contenu, d'après le théorème de MM. Borel et Lebesgue, dans un nombre fini de $\overline{U^*}(p)$, E est rectifiable et notre proposition est entièrement démontrée.

3.6. Il est remarquable que, si $n = 1$, on n'a pas besoin de se restreindre au cas $\kappa_1(p) \neq 0$, puisqu'il est connu que, si E est un continu euclidien ayant partout une première courbure linéaire $\kappa_1(p)$, E est un arc²⁵⁾. Mais, si $n \geq 2$, la restriction $\kappa_n(p) \neq 0$ est essentielle; car un continu ayant partout une courbure linéaire $\kappa_n(p) = 0$ n'est pas toujours la somme d'une infinité dénombrable d'arcs; au contraire, il peut arriver qu'un tel continu contienne même un simplexe n -dimensionnel. La raison en est claire après avoir considéré le théorème suivant:

E étant un continu euclidien quelconque et p_0 un point de E tel que p_0 ait un voisinage $U(p_0)$ situé dans l'espace E_n , mais qu'aucun voisinage de p_0 ne soit contenu dans un hyperplan $(n - 1)$ -dimensionnel de E_n , la n -ième courbure linéaire $\kappa_n(p_0)$ existe et est égale à zéro.

Aucun voisinage de p_0 n'étant situé dans un hyperplan $(n - 1)$ -dimensionnel, il existe dans tout voisinage de p_0 un système de $n + 2$ points p_0, p_1, \dots, p_{n+1} de sorte que, ni p_0, p_1, \dots, p_n , ni p_1, p_2, \dots, p_{n+1} , ne soient situés dans un hyperplan $(n - 1)$ -dimensionnel. Les simplexes n -dimensionnels déterminés par ces deux systèmes de $n + 2$ points ont donc des volumes positifs $V(p_0, p_1, \dots, p_n)$ et $V(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})$. Le dénominateur de la fraction figurant dans la définition (3) de $\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$ est donc différent de zéro. Quant au numérateur, il est évidemment zéro, si l'on prend p_0, p_1, \dots, p_{n+1} dans le voisinage $U(p_0)$ de p_0 , parce que $U(p_0)$ est situé dans l'espace E_{n+1} . On a donc $\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1}) = 0$ pour tout système de $n + 2$ points suffisamment voisins de p_0 pour lesquels $\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$ existe. Il en résulte, d'après (2), $\kappa_n(p_0) = 0$; c. q. f. d.

²²⁾ On appelle fermeture d'un ensemble A la somme de A et de l'ensemble de ses points d'accumulation.

²³⁾ Marchaud, 9.

²⁴⁾ Menger, 11.

²⁵⁾ Pauc, 14.

§ 4. Les courbures linéaires des arcs euclidiens dérivables

4.1. Soit dans ce paragraphe E un arc rectifiable, situé dans l'espace E_k et représentons les coordonnées des points de E par les fonctions continues

$$x_1 = x_1(s), x_2 = x_2(s), \dots, x_k = x_k(s)$$

où le paramètre s désigne la longueur de l'arc E . Admettons encore que les fonctions $x_\nu(s)$ sont n -fois dérivables au point $s = s_0$ et posons pour abrégé

$$x_\nu^{(i)} = \left(\frac{d^i x_\nu}{ds^i} \right)_{s=s_0}, \quad X_{ij} = \sum_{\nu=1}^k x_\nu^{(i)} x_\nu^{(j)},$$

$$G_n = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nn} \end{vmatrix}.$$

Désignons par p_i le point de E dont les coordonnées sont

$$x_1 = x_1(s_i), x_2 = x_2(s_i), \dots, x_k = x_k(s_i)$$

et supposons que p_0 soit un point régulier de E . Nous entendons par là que $G_n \neq 0$ pour $s = s_0$. Il est connu que le carré du volume $V(p_0, p_1, \dots, p_n)$ du simplexe n -dimensionnel ayant p_0, p_1, \dots, p_n pour sommets est égal, dans l'espace E_k , à la somme des carrés des volumes de ses projections orthogonales sur les $\binom{k}{n}$ hyperplans n -dimensionnels déterminés par les axes des coordonnées. Par conséquent

$$\left\{ \frac{V(p_0, p_1, \dots, p_n)}{\prod_{(i,j)} p_i p_j} \right\}^2 = \frac{1}{(n!)^2} \cdot \frac{\sum_{(\nu)} \begin{vmatrix} x_{\nu_1}(s_0) & x_{\nu_2}(s_0) & \dots & x_{\nu_n}(s_0) & 1 \\ x_{\nu_1}(s_1) & x_{\nu_2}(s_1) & \dots & x_{\nu_n}(s_1) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{\nu_1}(s_n) & x_{\nu_2}(s_n) & \dots & x_{\nu_n}(s_n) & 1 \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} s_0^n & s_0^{n-1} & \dots & s_0 & 1 \\ s_1^n & s_1^{n-1} & \dots & s_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_n^n & s_n^{n-1} & \dots & s_n & 1 \end{vmatrix}^2} \cdot \prod_{(i,j)} \frac{(s_i - s_j)^2}{p_i p_j^2} \quad (10)$$

où nous avons désigné par $\overline{p_i p_j}$ la distance euclidienne des sommets p_i, p_j de ce simplexe.

4.2. Si les $(n+1)$ -ièmes dérivées des fonctions $x_i(s)$ existent au point $s = s_0$ et p_0 est un point régulier de E , alors E possède en p_0 une n -ième courbure linéaire.

L'existence de la n -ième dérivée des fonctions $x_i(s)$ au point $s = s_0$ entraîne, grâce à un théorème de Schwarz-Stieltjes²⁶), la relation suivante :

$$1! 2! \dots n! \lim_{s_i \rightarrow s_0} \frac{\begin{vmatrix} x_{\nu_1}(s_0) & x_{\nu_2}(s_0) & \dots & x_{\nu_n}(s_0) & 1 \\ x_{\nu_1}(s_1) & x_{\nu_2}(s_1) & \dots & x_{\nu_n}(s_1) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{\nu_1}(s_n) & x_{\nu_2}(s_n) & \dots & x_{\nu_n}(s_n) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_0^n & s_0^{n-1} & \dots & s_0 & 1 \\ s_1^n & s_1^{n-1} & \dots & s_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_n^n & s_n^{n-1} & \dots & s_n & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x'_{\nu_1}(s_0) & x'_{\nu_2}(s_0) & \dots & x'_{\nu_n}(s_0) \\ x''_{\nu_1}(s_0) & x''_{\nu_2}(s_0) & \dots & x''_{\nu_n}(s_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{(n)}_{\nu_1}(s_0) & x^{(n)}_{\nu_2}(s_0) & \dots & x^{(n)}_{\nu_n}(s_0) \end{vmatrix}}{\dots}$$

La rectifiabilité de l'arc E entraîne

$$\lim_{s_i, s_j \rightarrow s_0} \prod_{(i,j)} \frac{|s_i - s_j|}{p_i p_j} = 1 .$$

On obtient donc, d'après (10), la relation suivante :

$$[1! 2! \dots (n-1)! (n!)^2]^2 \lim_{p_i \rightarrow p_0} \left\{ \frac{V(p_0, p_1, \dots, p_n)}{\prod_{(i,j)} p_i p_j} \right\}^2 = \sum_{(\nu)} \begin{vmatrix} x'_{\nu_1}(s_0) & x'_{\nu_2}(s_0) & \dots & x'_{\nu_n}(s_0) \\ x''_{\nu_1}(s_0) & x''_{\nu_2}(s_0) & \dots & x''_{\nu_n}(s_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{(n)}_{\nu_1}(s_0) & x^{(n)}_{\nu_2}(s_0) & \dots & x^{(n)}_{\nu_n}(s_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nn} \end{vmatrix} = G_n . \quad (11)$$

Introduisons pour un moment l'abréviation $\prod_{\alpha, \beta} = \prod_{\alpha \leq i < j \leq \beta} \overline{p_i p_j}$; alors on peut écrire en vertu de la relation (3) :

²⁶) *Stieltjes, 16*. La démonstration de notre théorème ne fait usage du passage à la limite que dans cette relation de *Schwarz-Stieltjes*. Mais cette relation est indépendante (*Stieltjes, 16*) du sens de parcours des points $(x_1(s_i), x_2(s_i), \dots, x_k(s_i))$. Il n'est donc pas nécessaire de supposer que l'ordre de ces points soit établi par le rangement croissant ou décroissant des valeurs s_0, s_1, \dots, s_{n+1} ; ce que justifie notre remarque antérieure, faite dans la note ⁶), d'après laquelle l'existence de la limite (2) pour *tout* sens de parcours des points p_0, p_1, \dots, p_{n+1} n'est pas une condition restrictive, lorsqu'on se borne aux arcs considérés dans la géométrie infinitésimale.

$$\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1}) = \frac{(n+1)^2}{n} \cdot \frac{\frac{V(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})}{\Pi_{0,n+1}} \cdot \frac{V(p_1, p_2, \dots, p_n)}{\Pi_{1,n}}}{\frac{V(p_0, p_1, \dots, p_n)}{\Pi_{0,n}} \cdot \frac{V(p_1, p_2, \dots, p_{n+1})}{\Pi_{1,n+1}}}.$$

Il en résulte d'après les relations (2) et (11):

$$\kappa_n(p_0) = \frac{\sqrt{G_{n+1} \cdot G_{n-1}}}{G_n}.$$

Le point p_0 étant régulier, cette relation prouve l'existence de $\kappa_n(p_0)$; ce qui était justement notre proposition.

4.3. Il est remarquable que M. Blaschke²⁷⁾, ayant défini la n -ième courbure d'un arc d'une manière tout à fait formelle comme les coefficients des équations généralisées de Frenet, a obtenu la valeur $\sqrt{G_{n+1} \cdot G_{n-1}}/G_n$. La n -ième courbure linéaire $\kappa_n(p_0)$ définie par une voie purement géométrique coïncide donc dans le cas spécial des courbes euclidiennes dérivables avec les courbures formelles de M. Blaschke. La notion de n -ième courbure linéaire permet alors de généraliser les équations de Frenet. Désignons, à cet effet, par v_i le vecteur unitaire du i -ième axe du repère mobile et posons $1/\varrho_i = \kappa_i(p_0)$; alors

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{ds} &= \frac{v_2}{\varrho_1} \\ \frac{dv_2}{ds} &= -\frac{v_1}{\varrho_1} + \frac{v_3}{\varrho_2} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dv_i}{ds} &= -\frac{v_{i-1}}{\varrho_{i-1}} + \frac{v_{i+1}}{\varrho_i} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dv_n}{ds} &= -\frac{v_{n-1}}{\varrho_{n-1}} \end{aligned}$$

4.4. Si les $(n+1)$ -ièmes dérivées des fonctions $x_i(s)$ existent dans un voisinage de $s = s_0$ et si elles sont continues au point $s = s_0$, alors E possède au point régulier p_0 une n -ième courbure de seconde espèce $\kappa_n^*(p_0)$ ²⁸⁾.

La démonstration de ce théorème est tout à fait analogue à la démonstration du théorème précédent; il suffit même d'appliquer, au lieu de la relation Schwarz-Stieltjes, la relation originelle de Schwarz²⁹⁾.

²⁷⁾ Blaschke, 5.

²⁸⁾ Egerváry, 6.

²⁹⁾ Schwarz, 15.

4.5. Le théorème 4.2 nous assure que la notion de n -ième courbure linéaire n'est pas moins générale que les différentes notions de n -ième courbure prises au sens classique de la géométrie infinitésimale³⁰). Mais, la n -ième courbure linéaire peut exister même quand aucune méthode infinitésimale n'est applicable. Envisageons par exemple un arc plan $y = f(x)$ tel que $f(x)$ n'ait nulle part une dérivée. La deuxième courbure (torsion) de cet arc ne peut être définie par voie infinitésimale, tandis que les 2-ièmes courbures linéaires $\kappa_2(p)$ et $\kappa_2^*(p)$ sont partout définies, puisqu'on a, d'après 3.6, $\kappa_2(p) = \kappa_2^*(p) = 0$ ³¹). Il faut pourtant remarquer que, si $\kappa_n(p) \neq 0$ en tout point d'un arc euclidien E , il semble que E satisfait à certaines conditions de dérivabilité. Mais, jusqu'à présent, rien n'est connu à cet égard, excepté le cas où $n = 1$. Dans ce cas, on connaît les théorèmes suivants: 1. Si E est un arc plan représenté sous la forme $y = f(x)$ et s'il possède au point $p_0 = f(x_0)$ une première courbure linéaire de seconde espèce, alors $f(x)$ admet au point $x = x_0$ une dérivée seconde³²). 2. Si, au lieu de $\kappa_1^*(p_0)$, on n'exige que l'existence de $\kappa_1(p_0)$, la seconde dérivée de $f(x)$ n'existe pas toujours, mais la fonction $f(x)$ admet une dérivée seconde généralisée³³); c'est à dire la limite suivante:

$$\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} \frac{2}{h_1 - h_2} \left[\frac{f(x_0 + h_1) - f(x_0)}{h_1} - \frac{f(x_0 + h_2) - f(x_0)}{h_2} \right].$$

§ 5. Propriétés des arcs à courbure linéaire nulle

5.1. Nous avons vu au numéro 3.6 qu'un continu E situé dans l'espace E_n a partout une courbure linéaire $\kappa_n(p) = 0$, à moins qu'aucun de ses sous-ensembles ouverts relativement à E ne soit situé dans l'espace E_{n-1} . Pour une classe importante de continus euclidiens, on peut démontrer aussi le théorème inverse:

Si E est un arc rectifiable situé dans un espace euclidien quelconque et tel que $\kappa_n(p) = 0$ à tout point p de E , alors E est plongé dans un hyperplan n -dimensionnel de l'espace considéré³⁴).

³⁰) En parlant de n -ième courbure au sens infinitésimal, on peut bien se borner aux cas $n = 1, 2$; car, pour $n \geq 3$, la théorie classique de la n -ième courbure n'a jamais été développée d'une manière satisfaisante. Voir p. ex. *Egerváry*, 6.

³¹) Voir à ce sujet: *Alexits*, 2.

³²) *Haupt et Alt*, 7.

³³) *Alt*, 4 et *Pauc*, 13.

³⁴) Première démonstration de ce théorème, pour $n = 1$, chez *Menger*, 10; pour $n = 2$, chez *Alexits*, 1, 2.

Désignons par p, q deux points arbitraires de E et par \overline{pq} leur distance euclidienne. Intercalons entre p et q les points $p = p_0, p_1, \dots, p_{k+n+1} = q$ de l'arc E . Posons pour abrégé

$$v_k(p, q) = \text{Max} \{ \overline{p_0 p_1}, \overline{p_1 p_2}, \dots, \overline{p_{k+n} p_{k+n+1}} \}$$

et choisissons les points p_1, p_2, \dots, p_{k+n} de sorte que $v_k(p, q)$ tende avec $1/k$ vers zéro; c'est-à-dire que, $\varepsilon > 0$ étant un nombre aussi petit que l'on veut, il existe un $k_\varepsilon > 0$ tel que

$$v_k(p, q) < \frac{\varepsilon}{n} \quad (k \geq k_\varepsilon) .$$

On déduit de cette relation que la distance des points p_i, p_j ($i = 0, 1, \dots, k$; $j = i + 1, i + 2, \dots, i + n + 1$) peut s'évaluer par l'inégalité

$$\overline{p_i p_j} \leq \sum_{\alpha=i}^{j-1} \overline{p_\alpha p_{\alpha+1}} \leq n \cdot v_k(p, q) < \varepsilon \quad (k \geq k_\varepsilon) . \quad (12)$$

Nous avons supposé que E possède en tout point une n -ième courbure linéaire. Il en résulte d'après 3.1 qu'aucun des sous-ensembles relativement ouverts de E n'est plongé dans un hyperplan $(n - 1)$ -dimensionnel. Par conséquent, on peut choisir les points p_1, p_2, \dots, p_{k+n} de sorte que, pour tout $i = 0, 1, \dots, k$, les $n + 1$ points $p_i, p_{i+1}, \dots, p_{i+n+1}$ ne soient pas situés dans un hyperplan $(n - 1)$ -dimensionnel. Alors le dénominateur de la fraction qui figure dans la relation (3) ne s'évanouit pas; c'est-à-dire que l'expression $\kappa(p_i, p_{i+1}, \dots, p_{i+n+1})$ peut être définie pour tout $i = 0, 1, \dots, k$. D'après l'inégalité (12), les distances entre le point p_i et les points $p_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_{i+n+1}$ deviennent aussi petites que l'on veut, pourvu que k soit suffisamment grand. Les conditions du lemme dont nous avons fait usage en 2.3 se trouvent donc satisfaites. Il en résulte pour un $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit

$$\kappa(p_i, p_{i+1}, \dots, p_{i+n+1}) < \varepsilon \quad (i = 0, 1, \dots, k) ,$$

pourvu que k soit suffisamment grand. Désignons par P_i l'hyperplan n -dimensionnel passant par les points $p_i, p_{i+1}, \dots, p_{i+n}$, alors cette inégalité peut s'écrire aussi, en vertu de la relation (4), sous la forme suivante:

$$(n + 1) \frac{\sin \widehat{P_i P_{i+1}}}{p_i p_{i+n+1}} < \varepsilon \quad (i = 0, 1, \dots, k) , \quad (13)$$

pourvu que k soit suffisamment grand.

Grâce à une remarque orale de M. Hajós, l'angle $\widehat{P_0 P_{k+1}}$ peut être évalué par l'inégalité suivante :

$$\widehat{P_0 P_{k+1}} \leq \sum_{i=0}^k \widehat{P_i P_{i+1}} . \quad (14)$$

Or $\widehat{P_i P_{i+1}} \leq \frac{\pi}{2}$; il s'ensuit donc d'après l'inégalité (13) que

$$\widehat{P_i P_{i+1}} \leq \frac{\pi}{2} \sin \widehat{P_i P_{i+1}} < \frac{\varepsilon \pi}{2(n+1)} \cdot \frac{1}{p_i p_{i+n+1}} \leq \frac{\varepsilon \pi}{2(n+1)} \sum_{j=i}^{i+n} \frac{1}{p_j p_{j+1}} . \quad (15)$$

Nous avons supposé que E est un arc rectifiable ; c'est-à-dire que sa longueur λ est finie. On obtient donc d'après (14) et (15) :

$$\widehat{P_0 P_{k+1}} < \frac{\varepsilon \pi}{2(n+1)} \sum_{i=0}^k \sum_{j=i}^{i+n} \frac{1}{p_j p_{j+1}} < \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2} \sum_{i=0}^k \frac{1}{p_i p_{i+1}} \leq \varepsilon \cdot \frac{\lambda \pi}{2} .$$

Par conséquent :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{P_0 P_{k+1}} = 0 . \quad (16)$$

Les hyperplans P_0 et P_{k+1} , passant par les points $p = p_0, p_1, \dots, p_n$, et $p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_{k+n+1} = q$, tendent, en vertu de la relation (12) et du théorème 3.2, vers les hyperplans n -dimensionnels osculateurs P_p , et P_q , de E appartenant aux points p ou q . Mais p et q sont des points arbitrairement choisis sur E ; il s'ensuit donc de (16) que l'angle de deux hyperplans n -dimensionnels osculateurs arbitraires de E est égal à zéro. Par suite, l'arc E est contenu dans chacun de ses hyperplans n -dimensionnels osculateurs ; ce qui était exactement notre proposition.

5.2. Un cas spécial du théorème précédent équivaut à un résultat classique d'après lequel un arc E représenté par les fonctions $x_1(s)$, $x_2(s)$, $x_3(s)$ est un segment, si la première courbure classique de E est partout $= 0$, ou est situé dans un plan, si sa torsion s'évanouit partout.

5.3. Nous avons fait l'hypothèse que E est un arc rectifiable. Il semble pourtant que cette hypothèse n'est pas nécessaire et qu'elle n'est imposée que par une faiblesse de notre méthode de démonstration. En effet, pour $n = 1$, nous pouvons énoncer ce théorème plus général :

E étant un continu situé dans un espace euclidien quelconque, la condition nécessaire et suffisante pour que E soit un segment est $\kappa_1(p) = 0$.

La nécessité de cette condition a été déjà démontrée au numéro 3.6. Quant à sa suffisance, si $\kappa_1(p) = 0$, le continu est un arc rectifiable³⁵⁾. Toutes les conditions du théorème 5.1 sont donc satisfaites.

5.4. Bien qu'il semble que la propriété de E d'être un arc rectifiable est superflue, il est essentiel que E soit un arc euclidien. Pour s'en convaincre, il suffit de construire un arc non-euclidien jouissant des propriétés suivantes³⁶⁾:

1° E est un arc rectifiable ; 2° $\kappa_n(p) = 0$ en tout point p de E ; 3° E n'est isométrique avec aucun sous-ensemble de l'espace E_n .

Envisageons, en effet, un arc rectifiable euclidien C ayant partout une n -ième courbure linéaire $\kappa_n(p) = 0$. Choisissons C de sorte qu'il contienne $n + 2$ points q_0, q_1, \dots, q_{n+1} pour lesquels $\overline{q_i q_j} \geq 1$, ($i, j = 0, 1, \dots, n + 1$). Définissons maintenant l'espace E de la manière suivante: Les points de E sont les mêmes que les points de C , mais la distance pq des points p et q de E est définie par la relation

$$pq = \begin{cases} \overline{pq} , & \text{si } \overline{pq} \leq 1 , \\ 1 , & \text{si } \overline{pq} > 1 . \end{cases} \quad (17)$$

E est évidemment un continu homéomorphe avec C ; par conséquent E est un arc. De plus, tout voisinage $U(p)$ d'un point p de E dont le diamètre ne dépasse pas l'unité est isométrique avec un voisinage de C . Tout voisinage $U(p)$ contient donc un voisinage fermé $\overline{U^*}(p)$ de p qui est un arc rectifiable. Or E est contenu, grâce à un théorème de MM. Borel et Lebesgue³⁷⁾, dans la somme d'un nombre fini de voisinages $\overline{U^*}(p)$. Par conséquent, E est lui-même un arc rectifiable. La propriété 1° de E est donc démontrée. Choisissons maintenant les points p_0, p_1, \dots, p_{n+1} dans le voisinage $\overline{U^*}(p_0)$ du point arbitraire p_0 . Comme $\overline{U^*}(p_0)$ est isométrique avec un voisinage de C , c'est-à-dire que $p_i p_j = \overline{p_i p_j}$, la courbure linéaire $\kappa(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$ de ces points a la même valeur qu'elle aurait prise si nous avions mesuré les $\binom{n+2}{2}$ distances $p_i p_j$ sur l'arc C . Par conséquent, la valeur de $\kappa_n(p_0)$ est égale à la valeur de la n -ième courbure linéaire au point p_0 de C . Celle-ci étant partout $= 0$, il s'ensuit que $\kappa_n(p_0) = 0$ en

³⁵⁾ Menger, 10 et Pauc, 14.

³⁶⁾ Chez Menger, 10, on trouve l'exemple d'un arc non-droit ayant pourtant une première courbure linéaire évanouissante partout. La construction que nous employons dans ce mémoire est due, pour $n = 2$, à Alexits, 1, 2.

³⁷⁾ Voir p. ex. Menger, 11.

tout point p_0 de E . La propriété 2° de E est aussi démontrée. Pourtant, E n'est isométrique avec aucun sous-ensemble de E_n , puisque C contient, d'après l'hypothèse, $n+2$ points q_0, q_1, \dots, q_{n+1} tels que $\overline{q_i q_j} \geq 1$, ($i, j = 0, 1, \dots, n+1$). Il en résulte, grâce à notre définition (17) de la distance en E , que $q_i q_j = 1$, ($i, j = 0, 1, \dots, n+1$). Or, dans l'espace euclidien n -dimensionnel E_n , il n'y a pas $n+2$ points différents dont les $\binom{n+2}{2}$ distances mutuelles soient toutes égales. La propriété 3° de E est donc aussi démontrée; ce qui était justement notre but.

B I B L I O G R A P H I E

1. *G. Alexits*, La torsion des espaces distanciés. *Comp. Math.* **6** (1939), p. 471—477.
2. *G. Alexits*, Der Torsionsbegriff in metrischen Räumen. *Mat. Fiz. Lapok* **46** (1939), p. 13—28 (en hongrois), p. 29—30 (en allemand).
3. *F. Alt*, Zur Theorie der Krümmung. *Ergebn. Math. Koll. Wien* **3** (1932), p. 5—6.
4. *F. Alt*, Zur Theorie der Krümmung. *Ergebn. Math. Koll. Wien* **4** (1933), p. 4.
5. *W. Blaschke*, Frenets Formeln für den Raum von Riemann. *Math. Zeitschr.* **6** (1920), p. 94—99.
6. *E. Egerváry*, Über die Kurven des n -dimensionalen euklidischen Raumes. *Math. Term. Tud. Ertesitö* **59** (1940), p. 787—795 (en hongrois), p. 796—797 (en allemand).
7. *O. Haupt* und *F. Alt*, Zum Krümmungsbegriff. *Ergebn. Math. Koll. Wien* **3** (1932), p. 4—5.
8. *H. Kühne*, Beiträge zur Lehre von der n -fachen Mannigfaltigkeit. *Arch. Math. Phys.* **11** (1892), p. 353—407.
9. *A. Marchaud*, Sur les continus d'ordre borné. *Acta Math.* **55** (1930), p. 67—115.
10. *K. Menger*, Untersuchungen über allgemeine Metrik. *Math. Ann.* **103** (1930), p. 466—501.
11. *K. Menger*, Kurventheorie (Leipzig und Berlin, 1932).
12. *L. W. Fr. Meyer*, Über die Anwendung eines Sylvesterschen Determinantensatzes auf ein metrisches Problem des R_n . *Jahresber. Deutsch. Math. Ver.* **20** (1911), p. 211—216.
13. *Chr. Pauc*, De quelques propriétés locales des continus euclidiens. *C. R. Paris* **203** (1936), p. 29—32.
14. *Chr. Pauc*, Courbure dans les espaces métriques. *Rend. R. Acc. Naz. Lincei* (6) **24** (1936), p. 109—115.
15. *H. A. Schwarz*, Verallgemeinerung eines analytischen Fundamentalsatzes. *Ges. math. Abhandlungen*. Vol. **2**, p. 296—302.
16. *Stieltjes*, Sur une généralisation de la formule des accroissements finis. *Oeuvres complètes*. Vol. **2**, p. 105—123.

(Reçu le 14 février 1940.)