

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 13 (1940-1941)

Artikel: Über Parallelinvarianten bei Eibereichen.
Autor: Hadwiger, H.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-13562>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über Parallelinvarianten bei Eibereichen

Von H. HADWIGER, Bern

Es seien \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{G}_2 zwei Eibereiche der Ebene mit den Flächeninhalten F_1 und F_2 und den Umfängen U_1 und U_2 . Eine mit stetigen partiellen Ableitungen versehene Funktion Φ von vier Veränderlichen nennen wir eine Parallelinvariante für zwei Eibereiche, wenn der Funktionswert

$$\Phi[F_1, F_2, U_1, U_2] \quad (1)$$

beim Übergang von den Eibereichen \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{G}_2 zu den äußeren Parallelbereichen $\mathfrak{G}_1(\xi)$ und $\mathfrak{G}_2(\xi)$ im Abstand ξ unverändert bleibt. Nach den Formeln von *J. Steiner* für Parallelbereiche gilt dann die Funktionalgleichung

$$\begin{aligned} \Phi[F_1 + U_1 \xi + \pi \xi^2, F_2 + U_2 \xi + \pi \xi^2, U_1 + 2\pi \xi, U_2 + 2\pi \xi] = \\ = \Phi[F_1, F_2, U_1, U_2] . \end{aligned} \quad (2)$$

Jede solche Invariante ist Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$U_1 \frac{\partial \Phi}{\partial F_1} + U_2 \frac{\partial \Phi}{\partial F_2} + 2\pi \frac{\partial \Phi}{\partial U_1} + 2\pi \frac{\partial \Phi}{\partial U_2} = 0 . \quad (3)$$

Das Fundamentalsystem, das aus drei funktional unabhängigen Integralen besteht, wählen wir so, daß eine einheitliche geometrische Interpretation möglich ist. Es besteht aus den drei Invarianten

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= 2F_1 - \frac{U_1^2}{2\pi} , \\ \Phi_{12} &= F_1 + F_2 - \frac{U_1 U_2}{2\pi} , \\ \Phi_{22} &= 2F_2 - \frac{U_2^2}{2\pi} . \end{aligned} \quad (4)$$

Der Rang der Funktionalmatrix

$$\frac{\partial [\Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{22}]}{\partial [F_1, F_2, U_1, U_2]} = \frac{1}{2\pi} \left| \begin{array}{cccc} 4\pi & 0 & -2U_1 & 0 \\ 2\pi & 2\pi & -U_2 & -U_1 \\ 0 & 4\pi & 0 & -2U_2 \end{array} \right| \quad (5)$$

ist 3, wie man leicht verifiziert. Dann ist jede Parallelinvariante der betrachteten Art von der Form

$$\Phi = \varphi \{ \Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{22} \} , \quad (6)$$

wo φ eine mit stetigen partiellen Ableitungen versehene Funktion von drei Veränderlichen ist.

$$\text{Die „Defizite“} \quad \Phi_{ik} = F_i + F_k - \frac{U_i U_k}{2\pi} \quad (7)$$

lassen nun eine geometrische Deutung zu, die ihre Parallelinvarianz unmittelbar plausibel erscheinen lässt.

Wenn $p_i(\alpha)$ die stetig differenzierbare Stützfunktion von \mathfrak{G}_i bezeichnet, so lässt sich die Invariante Φ_{ik} durch das Doppelintegral

$$\Phi_{ik} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} ([p_i(\alpha) - p_k(\beta)]^2 - [p'_i(\alpha) - p'_k(\beta)]^2) d\alpha d\beta \quad (8)$$

darstellen, was im Hinblick auf die Formeln

$$F_i = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p_i^2(\alpha) - p_i'^2(\alpha)) d\alpha, \quad U_i = \int_0^{2\pi} p_i(\alpha) d\alpha$$

sofort zu erkennen ist.

Das Integral (8) kann auch anders gelesen werden, nämlich

$$\Phi_{ik} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta, \quad (9)$$

wobei

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ([p_i(\alpha) - p_k(\alpha + \theta)]^2 - [p'_i(\alpha) - p'_k(\alpha + \theta)]^2) d\alpha \quad (10)$$

gesetzt wird. Wenn $\mathfrak{G}_k^{[\theta]}$ den Bereich bezeichnet, der aus \mathfrak{G}_k durch Drehung um den Winkel θ (im negativen Sinn) entsteht, so kann das Integral (10) als Flächeninhalt des Differenzbereiches $\mathfrak{G}_i - \mathfrak{G}_k^{[\theta]}$ gedeutet werden. Die Differenz $\mathfrak{G}_i - \mathfrak{G}_k^{[\theta]}$ ist im Sinne der *Minkowskischen* linearen Kombination konvexer Bereiche rein formal, das heißt ohne Rücksicht auf die geometrische Realisierbarkeit aufzufassen.

Die Beziehung (9) lässt also die folgende Deutung zu:

Die Parallelinvariante Φ_{ik} ist gleich dem über alle Drehlagen $0 \leq \theta < 2\pi$ erstreckte Mittelwert des Flächeninhaltes des formal gebildeten Differenzbereiches $\mathfrak{G}_i - \mathfrak{G}_k^{[\theta]}$.

Ist \mathfrak{K} ein Kreis, so findet die Parallelinvarianz von Φ_{ik} durch die formale Relation

$$(\mathfrak{G}_i + \mathfrak{R}) - (\mathfrak{G}_k^{[\theta]} + \mathfrak{R}^{[\theta]}) = \mathfrak{G}_i - \mathfrak{G}_k^{[\theta]} \quad (\mathfrak{R}^{[\theta]} = \mathfrak{R})$$

ihren sinnfälligen Ausdruck.

Wir wollen nun noch auf eine andere Möglichkeit eintreten, die Invarianten Φ_{ik} als geometrische Mittelwerte zu interpretieren. Wenn wir in der Ebene alle zu \mathfrak{G}_i kongruenten Bereiche auflegen, die aus \mathfrak{G}_i in fester Ausgangslage durch eine Decktranslation des quadratischen Einheitsgitters hervorgehen, so entsteht ein sog. Eibereichgitter $\{\mathfrak{G}_i\}$. In diesem Gitter wird nun \mathfrak{G}_k als frei beweglich angenommen. Jeder Lage von \mathfrak{G}_k entspricht eine *Treffzahl* N und eine *Schnittpunktzahl* S . Die Treffzahl N bezeichne die Zahl der Bereiche \mathfrak{G}_i von $\{\mathfrak{G}_i\}$, die mit \mathfrak{G}_k nicht leeren Durchschnitt haben (getroffen werden), und die Schnittpunktzahl S die Zahl der Schnittpunkte des Randes von \mathfrak{G}_k mit den Rändern der getroffenen \mathfrak{G}_i .

Die Endlage von \mathfrak{G}_k kann relativ zu einer festen Ausgangslage durch zwei Translationskomponenten x und y und einen Drehwinkel θ festgelegt werden, so daß die Zahlen N und S als Funktionen

$$N = N(x, y; \theta), \quad S = S(x, y; \theta) \quad (11)$$

der bezeichneten Veränderlichen erscheinen.

Durch Zurückführung auf die Hauptformeln der ebenen Integralgeometrie ergeben sich die Mittelwertformeln¹⁾

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} N(x, y; \theta) dx dy d\theta = F_i + F_k + \frac{U_i U_k}{2\pi}, \quad (12)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} S(x, y; \theta) dx dy d\theta = \frac{2 U_i U_k}{\pi}. \quad (13)$$

Mit ihrer Hilfe gewinnt man die Darstellung

$$\Phi_{ik} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \{N(x, y; \theta) - \frac{1}{2} S(x, y; \theta)\} dx dy d\theta. \quad (14)$$

Indem wir dieses Integral wieder als geometrischen Mittelwert lesen, gelangen wir zu der weiteren Deutung:

¹⁾ H. Hadwiger, Über Mittelwerte im Figurengitter. Coment. Math. Helv. 11, 1939, S. 221—233; bes. S. 225 und S. 232.

Über die Berechnung derartiger Mittelwerte in Gittern vgl. auch L. A. Santaló, Geometria Integral 31 (Sobre valores medios y probabilidades geométricas). Math. Abh. Hamburg 13, 1940, S. 284—294.

Die Parallelinvariante Φ_{ik} ist gleich dem über alle Lagen von \mathfrak{G}_k im Gitter $\{\mathfrak{G}_i\}$ erstreckten Mittelwert des „Überschusses“ $N - S/2$.

Es ist nun aufschlußreich, die Parallelinvarianz von Φ_{ik} nach der oben gegebenen geometrischen Deutung weiter zu verfolgen.

Es stellt sich nämlich heraus, daß nicht nur der Mittelwert, sondern für jede Lage von \mathfrak{G}_k die Differenz (15) $N - S/2$ selbst parallelinvariant ist. Dieser Sachverhalt kann durch den folgenden einfachen Hilfssatz über die Schnittpunktzahl zweier Eilinien klargestellt werden:

Haben zwei Eibereiche \mathfrak{G}_i und \mathfrak{G}_k einen inneren Punkt gemeinsam, bzw. keinen inneren Punkt gemeinsam, so erfährt die Ränderschnittpunktzahl beim Übergang zu den äußeren Parallelbereichen $\mathfrak{G}_i(\xi)$ und $\mathfrak{G}_k(\xi)$ keine Veränderung, bzw. höchstens einen Zuwachs 2.

Diese Aussage läßt sich leicht aus einer Feststellung von *H. Gericke*²⁾ folgern, wonach die Ränderschnittpunktzahl zweier Eibereiche mit gemeinsamem innerem Punkt gleich der Anzahl Zeichenwechsel der Differenz der auf den gemeinsamen Punkt bezogenen Stückfunktionen ist.

Nun kann leicht eingesehen werden, daß die Differenz (15) ihren Wert nicht ändern kann, wenn man von den Bereichen \mathfrak{G}_i und \mathfrak{G}_k zu den äußeren Parallelbereichen übergeht, denn für Bereiche \mathfrak{G}_i von $\{\mathfrak{G}_i\}$ die von \mathfrak{G}_k getroffen werden, ändern sich beim Übergang zu den äußeren Parallelbereichen die Schnittpunktzahlen nicht. Werden bei diesem Übergang neue \mathfrak{G}_i durch \mathfrak{G}_k getroffen, so erfährt die Zahl N für jeden Treffer den Zuwachs 1, die Zahl S jedoch den Zuwachs 2, so daß die Differenz unverändert bleibt.

Noch nach einer anderen Seite hin erweist sich die Diskussion von (14) als nützlich: Wenn von den beiden Bereichen \mathfrak{G}_i und \mathfrak{G}_k keiner den andern bedecken kann, so gilt offenbar stets

$$N - \frac{S}{2} \leq 0 ,$$

da die Schnittpunktzahl der Ränder mindestens 2 ist, wenn sich die Bereiche treffen. Hieraus schließen wir:

Notwendig dafür, daß von den beiden Bereichen \mathfrak{G}_i und \mathfrak{G}_k keiner den andern bedecken kann, ist die Bedingung $\Phi_{ik} \leq 0$.

²⁾ *H. Gericke*, Einige kennzeichnende Eigenschaften des Kreises. Math. Z. 40, 1935, S. 417—420, bes. S. 418.

Dieses Kriterium findet sich bei *W. Blaschke*³⁾ noch unter etwas allgemeineren Voraussetzungen. Es enthält die isoperimetrische Ungleichung

$$\Phi_{ii} \leq 0$$

als Spezialisierung auf den Fall kongruenter Bereiche, wo offenbar keiner den anderen bedecken kann. Der Satz, daß das Gleichheitszeichen in der isoperimetrischen Ungleichung nur für den Kreis Geltung hat, erweist sich in diesem Zusammenhang als äquivalent mit einem Satz von *T. Kubota*⁴⁾, wonach jede vom Kreis verschiedene Eilinie eine kongruente Eilinie in mehr als 2 Punkten schneiden kann.

(Eingegangen den 24. Februar 1941.)

³⁾ *W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie. Erstes Heft, 2. erw. Aufl., Leipzig und Berlin 1936, S. 45.*

⁴⁾ *T. Kubota, Notes on closed convex curves. Tôhoku Math. J. Bd. 21, 1922, S. 21—23.*