

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 13 (1940-1941)

**Artikel:** Ein topologischer Beitrag zur reellen Algebra.  
**Autor:** Hopf, Heinz  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-13560>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Ein topologischer Beitrag zur reellen Algebra

Von HEINZ HOPF, Zürich

E. Stiefel hat seine allgemeine Theorie der Systeme von Richtungsfeldern in geschlossenen Mannigfaltigkeiten<sup>1)</sup> speziell auf die projektiven Räume angewandt und ist dadurch zu Ergebnissen gelangt, die nicht nur vom geometrischen Gesichtspunkt aus interessant sind, sondern die auch neue und merkwürdige Sätze der reellen Algebra enthalten<sup>2)</sup>. Im folgenden leite ich dieselben algebraischen Sätze, sowie etwas allgemeinere, mit einer ebenfalls topologischen, jedoch von der Stiefelschen verschiedenen Methode her, indem ich den Hauptsatz, der die übrigen Sätze umfaßt, durch Anwendung der Theorie des Umkehrungs-Homomorphismus der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten<sup>3)</sup> beweise.

Dieser Beweis bildet den Inhalt des § 2. Im § 1 wird der Hauptsatz (Satz I) formuliert, und es werden Folgerungen aus ihm gezogen; topologische Betrachtungen kommen im § 1 nicht vor.

Der Satz I handelt von stetigen Funktionen; er wird aber zu einem *algebraischen* Satz, sobald man diese Funktionen zu Polynomen (in mehreren Veränderlichen) spezialisiert; und dann wieder werden die Ergebnisse besonders einfach und besonders interessant, wenn die Polynome Bilinearformen sind. Nachdem diese Sätze, die algebraischen Charakter haben — sie handeln von der Existenz von Nullstellen gewisser Gleichungssysteme —, auf topologischem Wege entdeckt worden waren, entstand die Aufgabe, auch Beweise zu finden, die man mit Recht als „algebraisch“ bezeichnen dürfte. Diese Aufgabe — die nicht nur mir, sondern auch anderen Mathematikern als schwierig erschien — ist von F. Behrend gelöst worden<sup>4)</sup>.

Herr Behrend hat mich auf die Frage aufmerksam gemacht, welche

---

<sup>1)</sup> E. Stiefel, Richtungsfelder und Fernparallelismus in  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten, *Comment. Math. Helvet.* **8** (1936), 305—353.

<sup>2)</sup> A. a. O., 349, sowie besonders: E. Stiefel, Über Richtungsfelder in den projektiven Räumen und einen Satz aus der reellen Algebra, *Comment. Math. Helvet.* **13** (1941), 201—218.

<sup>3)</sup> H. Hopf, Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, *Crelles Journ.* **163** (1930), 71—88. — Neue Begründung und Verallgemeinerung: H. Freudenthal, Zum Hopfschen Umkehrhomomorphismus, *Ann. of Math.* **38** (1937), 847—853; ferner: A. Komatu, Über die Ringdualität eines Kompaktaums, *Tôhoku Math. Journ.* **43** (1937), 414—420; H. Whitney, On Products in a complex, *Ann. of Math.* **39** (1938), 397—432 (Theorem 6).

<sup>4)</sup> F. Behrend, Über Systeme reeller algebraischer Gleichungen, *Compos. Math.* **7** (1939), 1—19.

Verschärfung unser Hauptsatz gestatte, wenn man die in ihm auftretenden Funktionen zu *symmetrischen* Bilinearformen spezialisiert. Dieses Problem scheint sich sowohl der Stiefelschen Methode der Richtungsfelder als auch meiner Methode des Umkehrungs-Homomorphismus zu entziehen. Aber mit einer dritten topologischen Methode habe ich einen — allerdings nur schwachen — Fortschritt in der gewünschten Richtung erzielt. Hierüber berichte ich kurz im „Anhang II“; die ausführliche Darstellung ist an anderer Stelle erschienen.

Im „Anhang I“ wird gezeigt, daß nicht nur die algebraischen, sondern auch gewisse der geometrischen Sätze von Stiefel — nämlich notwendige Bedingungen für die Existenz von linear unabhängigen Systemen stetiger Richtungsfelder in den projektiven Räumen — aus dem Satz I abgeleitet werden können.

## § 1. Formulierung des Hauptsatzes ; algebraische Folgerungen

**1. Definite Systeme ungerader Funktionen in zwei Variablenreihen.** Es sei  $f$  eine reelle Funktion der  $r+s$  reellen Veränderlichen

$$x_1, \dots, x_r; \quad y_1, \dots, y_s; \quad r \geq 1, s \geq 1; \quad (1)$$

und zwar sei sie erklärt und stetig für

$$\sum_{\varrho=1}^r x_{\varrho}^2 = 1, \quad \sum_{\sigma=1}^s y_{\sigma}^2 = 1; \quad (2)$$

sie erfülle die Funktionalgleichungen

$$\begin{aligned} f(-x_1, \dots, -x_r; y_1, \dots, y_s) &= f(x_1, \dots, x_r; -y_1, \dots, -y_s) \quad (3) \\ &= -f(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s). \end{aligned}$$

Dann sagen wir kurz: „ $f$  ist eine ungerade Funktion der Variablenreihen (1).“

Beispiele sind diejenigen reellen algebraischen Formen in den Variablen (1), welche homogen in den  $x_{\varrho}$  von einer ungeraden Dimension sowie homogen in den  $y_{\sigma}$  von einer ungeraden Dimension sind; die einfachsten Fälle sind die Bilinearformen in den beiden Variablenreihen.

Ein System

$$f_1, \dots, f_n \quad (4)$$

ungerader Funktionen der Variablen (1) soll „definit“ heißen, wenn das Gleichungssystem

$$f_1 = 0, \dots, f_n = 0 \quad (4_0)$$

in dem durch (2) gegebenen Bereich der Variablen (1) keine Lösung besitzt.

Besteht das System (4) aus Formen der oben besprochenen Art, so sind die Gleichungen (4<sub>0</sub>) immer erfüllt, wenn

$$\text{entweder } x_1 = \dots = x_r = 0 \quad \text{oder} \quad y_1 = \dots = y_s = 0 \quad (5)$$

ist; infolge der Homogenität der  $f_\nu$  ist die Definitheit des Systems (4) *gleichbedeutend* damit, daß diese trivialen Lösungen (5) von (4<sub>0</sub>) die einzigen sind (die Beschränkung auf den Bereich (2) ist also nicht notwendig).

Ein Beispiel eines definiten Systems bei beliebigen  $r$  und  $s$  wird durch die Produkte

$$x_\varrho y_\sigma, \quad \varrho = 1, \dots, r, \quad \sigma = 1, \dots, s$$

geliefert; hier ist  $n = rs$ . Ein weiteres Beispiel, und zwar mit

$$n = r + s - 1$$

(also mit  $n < rs$  für  $r > 1, s > 1$ ), ist das folgende:

$$\begin{aligned} f_\nu &= \sum x_\varrho y_\sigma, \quad \varrho + \sigma = \nu + 1, \\ 1 \leq \varrho &\leq r, \quad 1 \leq \sigma \leq s, \quad \nu = 1, \dots, r + s - 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Die Definitheit dieses Systems, also die Tatsache, daß die zugehörigen Gleichungen (4<sub>0</sub>) nur die trivialen Lösungen (5) besitzen, bestätigt man leicht durch vollständige Induktion in bezug auf die Anzahl  $r + s$  aller Variablen.

Für gewisse  $r$  und  $s$  gibt es aber auch definite Systeme, die aus weniger als  $r + s - 1$  ungeraden Funktionen in den Variablen (1) bestehen; z. B. bilden für  $r = s = 2$  bereits die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 y_1 - x_2 y_2 \\ f_2 &= x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{aligned} \quad (7)$$

ein definites System.

Daher entsteht die Frage: „Welches ist, bei gegebenen  $r$  und  $s$ , die *kleinste* Zahl  $n$ , für welche es ein definites System von  $n$  ungeraden Funktionen in den Variablenreihen (1) gibt?“ Diese Minimalzahl heiße  $n^*(r, s)$ . <sup>5)</sup>

<sup>5)</sup> Ohne die Forderung, daß die Funktionen  $f_\nu$  ungerade seien, ist die Frage uninteressant; denn die eine Funktion  $f = \sum x_\varrho^2 \cdot \sum y_\sigma^2$  bildet immer ein definites System.

Hat man für ein Paar  $r, s$  die Zahl  $n^*(r, s)$ , oder auch nur eine untere Schranke für  $n^*(r, s)$ , bestimmt, so hat man damit einen Existenzsatz für Lösungen von Gleichungen gewonnen: denn aus  $n < n^*(r, s)$  folgt, daß das Gleichungssystem  $(4_0)$  eine Lösung in dem Bereich  $(2)$  besitzt; sind die  $f_v$  Formen, so ist dies, wie schon betont, gleichbedeutend mit der Existenz einer nicht-trivialen, d. h. von  $(5)$  verschiedenen, Lösung.

**2. Der Hauptsatz.** Die Zahl  $n^*(r, s)$  kann ich zwar im allgemeinen nicht bestimmen; jedoch liefert der nachstehende Satz Beschränkungen nach unten für  $n^*$ . <sup>5a)</sup>

*Satz I. Es gebe ein definites System von  $n$  ungeraden Funktionen in den Variablenreihen  $x_1, \dots, x_r$  und  $y_1, \dots, y_s$ . Dann ist die folgende Bedingung erfüllt:*

Alle Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{k}$  mit

$$n - r < k < s \quad (8)$$

sind gerade. <sup>5b)</sup>

Diese Bedingung soll kurz mit  $\mathfrak{B}(r, s; n)$  bezeichnet werden. Aus der Symmetrie-Eigenschaft

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

der Binomialkoeffizienten folgt, daß, wie zu erwarten,  $\mathfrak{B}(r, s; n)$  symmetrisch in  $r$  und  $s$  ist, daß also unter der Voraussetzung des Satzes I auch alle  $\binom{n}{k}$  mit

$$n - s < k < r \quad (8')$$

gerade sind.

Der Beweis des Satzes I wird im § 2 geführt werden.

Eine erste Folgerung aus dem Satz I ergibt sich, wenn man bedenkt, daß  $\binom{n}{0} = 1$  ist; unter der Voraussetzung des Satzes I kann nämlich daher  $(8)$  nicht durch  $k = 0$  befriedigt werden, es kann also nicht  $n - r < 0$ , sondern es muß  $n - r \geq 0$ , also  $n \geq r$  sein; und ebenso, nach  $(8')$ :  $n \geq s$ . Daher und infolge der Existenz des definiten Systems  $(6)$  gilt

$$\max. (r, s) \leq n^*(r, s) \leq r + s - 1. \quad (9)$$

---

<sup>5a)</sup> Interessante Beschränkungen von  $n^*$  nach oben gibt Behrend, a. a. O.<sup>4</sup>), § 4.

<sup>5b)</sup> Für bilineare Formen  $f_v$  von Stiefel, a. a. O.<sup>3</sup>), für beliebige Formen ungerader Grade von Behrend, a. a. O.<sup>4</sup>), bewiesen.

### 3. Spezialisierungen von $r, s, n$ .

(a) Im Falle  $s = 1$  wird, wenn  $n \geq r$  ist, (8) durch kein  $k$  befriedigt; das heißt:

*Satz Ia.* Für  $s = 1$  ist die Behauptung des Satzes I gleichbedeutend mit:  $n \geq r$ .

Dieser Satz ist äquivalent mit dem nachstehenden Satz B, der eine bekannte Konsequenz eines Satzes von Borsuk ist; in ihm sind die  $g_\nu$  Funktionen der einen Variablenreihe  $x_1, \dots, x_r$ , welche für  $\sum x_\nu^2 = 1$  stetig und ungerade sind.

*Satz B.* Wenn die Funktionen  $g_1, \dots, g_n$  keine gemeinsame Nullstelle haben, so ist  $n \geq r$ . <sup>6)</sup>

Die Äquivalenz der beiden Sätze ist leicht zu sehen: sind Funktionen  $f_\nu$  vorgelegt, welche die Voraussetzung von Ia erfüllen, so setze man in ihnen die Variable  $y_1 = 1$  und wende auf die dadurch entstehenden Funktionen  $g_\nu$  den Satz B an; sind Funktionen  $g_\nu$  gegeben, die die Voraussetzung des Satzes B erfüllen, so wende man Satz Ia auf die Funktionen  $f_\nu = y_1 \cdot g_\nu$  an.

Somit ist unser Satz I eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes B. <sup>a)</sup>

(b) Wir stellen eine Bedingung auf, die *hinreichend* dafür ist, daß die Zahl  $n^*$  mit ihrer durch (9) gegebenen *oberen* Schranke zusammenfällt; ob die Bedingung hierfür auch notwendig ist, weiß ich nicht.

Es sei  $n^*(r, s) < r + s - 1$ ; dann gibt es — da man zu einem definiten System immer beliebige Funktionen hinzufügen kann, ohne die Definitheit zu zerstören — gewiß ein definites System mit  $n = r + s - 2$ ; also ist  $\mathfrak{B}(r, s; r + s - 2)$  erfüllt, das heißt:  $\binom{r+s-2}{k}$  ist gerade für  $s - 2 < k < s$ , also für  $k = s - 1$ . Folglich:

*Satz Ib.* Ist der Binomialkoeffizient

$$\binom{r+s-2}{s-1} = \binom{r+s-2}{r-1}$$

ungerade, so ist  $n^*(r, s) = r + s - 1$ .

<sup>6)</sup> Alexandroff-Hopf, Topologie I (Berlin 1935), 485, Satz VIII.

<sup>a)</sup> Da der Satz B bekannt ist, darf man im Beweis des Satzes I auf den Fall  $s = 1$  (und ebenso auf den Fall  $r = 1$ ) verzichten. Wir werden dies nicht tun, müssen aber einige Male (Fußnoten b), c), d), e)) auf Modifikationen hinweisen, welche durch die beiden genannten Fälle bedingt sind. Ausschließen wollen wir jedoch den ganz trivialen Fall  $r = s = 1$ ; in ihm lautet die Behauptung des Satzes I nur:  $n \geq 1$ .

Die Voraussetzung des Satzes Ib ist z. B. erfüllt, wenn  $r$  ungerade und  $s = 2$  ist.

(c) Wir stellen eine Bedingung auf, die *notwendig* dafür ist, daß die Zahl  $n^*$  mit ihrer durch (9) gegebenen *unteren* Schranke zusammenfällt; ob die Bedingung hierfür auch hinreichend ist, ist fraglich.

Es gebe ein definites System mit  $n = s$ ; dann sind nach (8') alle  $\binom{n}{k}$  gerade für  $0 < k < r$ ; das ist die Bedingung  $\mathfrak{B}(r, n; n)$ ; um ihre Bedeutung festzustellen, schreiben wir  $n$  in der Form

$$n = 2^\lambda \cdot u, \quad u \text{ ungerade}, \quad (10)$$

und betrachten die binomische Entwicklung von  $(1+t)^n$ , wobei  $t$  eine Unbestimmte ist:

$$(1+t)^n = ((1+t)^{2^\lambda})^u,$$

also modulo 2:

$$(1+t)^n \equiv (1+t^{2^\lambda})^u \equiv 1 + t^{2^\lambda} + \dots + t^n;$$

hieraus ist ersichtlich:

$$\binom{n}{2^\lambda} \not\equiv 0 \pmod{2};$$

unter der Bedingung  $\mathfrak{B}(r, n; n)$  ist daher *nicht*  $0 < 2^\lambda < r$ , also ist

$$r \leq 2^\lambda. \quad (11)$$

Folglich:

*Satz Ic.* Wenn es ein definites System mit  $n = s$  gibt — mit anderen Worten: wenn  $n^*(r, s) = s$  ist —, so ist  $r$  durch (11) beschränkt, wobei  $2^\lambda$  durch (10) bestimmt ist.

(d) Es sei  $r = s$ . Die Bedingung  $\mathfrak{B}(r, r; n)$  lautet:  $\binom{n}{k}$  ist gerade für  $n - r < k < r$ . Um diese Bedingung zu untersuchen, setzen wir

$$n = 2^\mu + m, \quad 0 \leq m < 2^\mu,$$

und behaupten:

$$\binom{n}{m} \not\equiv 0 \pmod{2}. \quad (12)$$

Für  $m = 0$  ist dies trivial; es sei  $m > 0$ ; dann betrachten wir wieder  $(1+t)^n$  modulo 2:

$$\begin{aligned} (1+t)^n &= (1+t)^{2^\mu} \cdot (1+t)^m \equiv (1+t^{2^\mu}) \cdot (1 + \dots + t^m) \equiv \\ &\equiv 1 + \dots + t^m + t^{2^\mu} + \dots + t^n, \end{aligned}$$

es gilt also (12).

Unter der Bedingung  $\mathfrak{B}(r, r; n)$  ist daher *nicht*  $n - r < m < r$ , also nicht gleichzeitig  $r > n - m$  und  $r > m$ , also, da  $n - m = 2^\mu > m$  ist, jedenfalls nicht  $r > 2^\mu$ ; es ist also  $2^\mu \geq r$ . Wenn

$$2^{\varrho-1} < r \leq 2^\varrho \quad (13)$$

ist, so ist also  $2^\mu \geq 2^\varrho$ , und folglich  $n \geq 2^\varrho$ . Somit gilt

*Satz Id.* Ein definites System stetiger ungerader Funktionen in zweimal  $r$  Variablen  $x_1, \dots, x_r$  und  $y_1, \dots, y_r$  besteht aus wenigstens  $2^\varrho$  Funktionen, wobei  $\varrho$  durch (13) bestimmt ist.

(e) In jedem der Sätze Ic und Id ist enthalten:

*Satz Ie.* Ein definites System von  $n$  stetigen ungeraden Funktionen der zweimal  $n$  Variablen  $x_1, \dots, x_n$  und  $y_1, \dots, y_n$  ist höchstens dann möglich, wenn  $n$  eine Potenz von 2 ist.

Ein Beispiel hierzu mit  $n = 2$  ist das System (7); über weitere Beispiele zum Satz Ie sowie zum Satz Ic wird in der nächsten Nummer etwas gesagt werden.

**4. Der Satz von Hurwitz-Radon.** Ein System (4) von Bilinearformen

$$f_\nu = \sum_{\varrho, \sigma} a_{\varrho \sigma \nu} x_\varrho y_\sigma, \quad \nu = 1, \dots, n, \quad (14)$$

in den Variablen (1) ist gewiß dann definit, wenn die Gleichung

$$\sum f_\nu^2 = \sum x_\varrho^2 \cdot \sum y_\sigma^2 \quad (15)$$

(als Identität in den  $x_\varrho$  und  $y_\sigma$ ) erfüllt ist. Für diesen Spezialfall und unter der weiteren Voraussetzung

$$s = n$$

ist der maximale Wert  $r^*(n)$  von  $r$ , der bei gegebenem  $n$  möglich ist, durch Hurwitz und durch Radon bestimmt worden<sup>7)</sup>:

Man stelle  $n$  in der Form

$$n = 16^\alpha \cdot 2^\beta \cdot u, \quad 0 \leq \beta \leq 3, \quad u \text{ ungerade},$$

dar; dann ist

$$r^*(n) = 2^\beta + 8\alpha. \quad (16)$$

---

<sup>7)</sup> A. Hurwitz, Über die Komposition der quadratischen Formen, Math. Ann. 88 (1923), 1—25 (Math. Werke, Bd. II, 641—666). — J. Radon, Lineare Scharen orthogonaler Matrizen, Abh. math. Sem. Hamburg 1 (1922), 1—14. — Die obige Formulierung stammt von Radon.

Für diejenigen  $n$ , die nicht durch 16 teilbar sind, in denen also  $\alpha = 0$  ist, ist derjenige Teil dieses Satzes, welcher besagt, daß der Wert (16) durch kein  $r$  übertroffen werden kann, in unserem Satz Ic enthalten. Der andere Teil des Hurwitz-Radonschen Satzes, durch welchen die Existenz von Lösungen (14) der Gleichung (15) mit dem durch (16) gegebenen Wert  $r = r^*$  — (und mit  $s = n$ ) — festgestellt wird, zeigt, daß die Schranke (11) in unserem Satz Ic wenigstens für diejenigen  $n$  nicht verbessert werden kann, die  $\not\equiv 0 \pmod{16}$  sind.

Für  $r = s = n$  geht der obige Satz in den berühmten Satz von Hurwitz über<sup>8)</sup>:

*Identitäten (15) für Bilinearformen (14) mit  $r = s = n$  existieren nur für  $n = 1, 2, 4, 8$ .*

Zu unserem Satz Ie gibt es also für  $n = 2^\lambda$  mit  $\lambda > 3$  kein Beispiel vom Typus (14), (15); es sind für diese  $n$  überhaupt keine definiten Systeme von  $n$  ungeraden Funktionen in zweimal  $n$  Variablen bekannt. <sup>9)</sup>

**5. Matrizen ungerader Funktionen einer Variablenreihe.** Unter einer ungeraden Funktion der Variablen

$$x_1, \dots, x_r \quad (1_x)$$

soll immer eine solche reelle Funktion  $g$  dieser Variablen verstanden werden, welche für

$$\sum_{\varrho=1}^r x_\varrho^2 = 1 \quad (2_x)$$

erklärt und stetig ist und die Funktionalgleichung

$$g(-x_1, \dots, -x_r) = -g(x_1, \dots, x_r) \quad (3_x)$$

erfüllt. Wir betrachten eine Matrix, die aus derartigen ungeraden Funktionen  $g_{\sigma\nu}$ , besteht:

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{s1} & \dots & g_{sn} \end{pmatrix}.$$

<sup>8)</sup> A. Hurwitz, Über die Komposition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen, Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen 1898, 309—316 (Math. Werke, Bd. II, 565—571).

<sup>9)</sup> Übrigens besteht ein prinzipieller Unterschied zwischen den Hurwitz-Radonschen und unseren Sätzen: jene gelten, wie aus den beiden Arbeiten von Hurwitz hervorgeht, nicht nur für reelle, sondern auch für komplexe Bilinearformen, allgemeiner sogar für solche, deren Koeffizienten einem beliebigen Körper, dessen Charakteristik  $\neq 2$  ist, angehören.

*Satz II.* Dafür, daß die Matrix  $G$  durchweg den Rang  $s$  hat, ist die Bedingung  $\mathfrak{B}(r, s; n)$  notwendig.

Denn wenn der Rang durchweg  $s$  ist, so bilden die linearen Verbindungen

$$f_\nu(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s) = \sum_{\sigma=1}^s y_\sigma g_{\sigma\nu}, \quad \nu = 1, \dots, n,$$

ein definites System ungerader Funktionen im Sinne von Nr. 1.

Besonders naheliegend ist die Betrachtung quadratischer Matrizen  $G$ , also solcher, für welche  $s = n$  ist; für sie ergibt sich aus Satz Ic, analog wie sich Satz II aus Satz I ergab:

*Satz IIc.* Eine  $n$ -reihige quadratische Matrix

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix},$$

deren Elemente ungerade Funktionen in den  $r$  Variablen ( $1_x$ ) sind, kann höchstens dann durchweg nicht-singulär sein, wenn die Anzahl  $r$  der Variablen nicht größer ist als die größte Potenz von 2, die in  $n$  aufgeht.

Hierin ist enthalten:

*Satz IIe.* Die im Satz IIc genannte Matrix  $G$  kann, falls überdies  $r = n$  ist, höchstens dann durchweg nicht-singulär sein, wenn  $n$  eine Potenz von 2 ist.

Beispiele derartiger nicht-singulärer Matrizen mit  $r = n$  erhält man für  $n = 1, 2, 4, 8$ , indem man

$$g_{\sigma\nu} = \sum_{\varrho} a_{\varrho\sigma\nu} x_\varrho$$

setzt, wobei die  $a_{\varrho\sigma\nu}$  die Koeffizienten derjenigen Bilinearformen (14) sind, welche die Identitäten (15) — mit  $r = s = n$  — erfüllen<sup>10)</sup>; Beispiele mit größeren  $n$  sind nicht bekannt.

**6. 11) Lineare Scharen quadratischer Matrizen aus reellen Zahlen.** Wir machen eine Anwendung des Satzes IIc. Mit  $A_\varrho$  sollen  $n$ -reihige quadra-

---

<sup>10)</sup> Auf der vorletzten Seite der Arbeit<sup>9)</sup> von Hurwitz sind diese Matrizen angegeben.

<sup>11)</sup> Die Sätze der Nummern 6 und 7 folgen aus dem Spezialfall des Satzes I, in dem die  $f_\nu$  bilineare Formen sind; sie ergeben sich daher auch aus den in der Einleitung genannten Arbeiten von Stiefel und von Behrend; insbesondere liefert die Arbeit von Behrend algebraische Beweise für diese Sätze.

tische Matrizen reeller Zahlen bezeichnet werden; bei gegebenen  $A_1, \dots, A_r$  bilden die Matrizen

$$x_1 A_1 + \dots + x_r A_r \quad (17)$$

eine „lineare Schar“ von Matrizen, welche von den Parametern  $x_1, \dots, x_r$  abhängt. Die Schar soll „durchweg nicht-singulär“ heißen, wenn nur diejenige Matrix (17) singulär ist, welche zu den Parametern  $(0, \dots, 0)$  gehört.

*Satz IIIc.* Die Anzahl  $r$  der Parameter einer linearen, durchweg nicht-singulären Schar  $n$ -reihiger quadratischer reeller Matrizen ist höchstens gleich der größten Potenz von 2, die in  $n$  aufgeht.

Denn ist  $A_\varrho = (a_{\varrho\sigma\nu})$ , so hat die Matrix (17) die Elemente

$$g_{\sigma\nu}(x_1, \dots, x_r) = \sum_\varrho a_{\varrho\sigma\nu} x_\varrho ;$$

sie sind ungerade Funktionen in den  $x_\varrho$ ; daher folgt Satz IIIc aus Satz IIc.

*Korollar:* Ist  $n = 2^\lambda \cdot u$ ,  $u$  ungerade, so gibt es in jeder Schar

$$x_1 A_1 + \dots + x_{2\lambda} A_{2\lambda}$$

eine Matrix mit  $(x_1, \dots, x_{2\lambda}) \neq (0, \dots, 0)$ , die einen reellen Eigenwert besitzt.

Dies erfolgt daraus, daß nach Satz IIIc die lineare Schar, die von den Matrizen  $A_1, \dots, A_{2\lambda}$  und der Einheitsmatrix  $E$  erzeugt wird, nicht durchweg nicht-singulär sein kann.

7. <sup>11)</sup> *Nicht-assoziative Divisions-Algebren über dem Körper der reellen Zahlen.* Von den „Algebren“ oder „hyperkomplexen Systemen“, die wir hier betrachten, soll nicht verlangt werden, daß in ihnen das assoziative Gesetz der Multiplikation gelte. Dagegen beschränken wir uns auf „Divisions-Algebren“, d. h. Systeme ohne Nullteiler. Es handle sich immer um Systeme über dem Körper der reellen Zahlen. Die Anzahl der Einheiten sei  $n$ . Man weiß, daß es nur drei Divisions-Algebren gibt, in denen das assoziative Gesetz gilt: die reellen Zahlen, die komplexen Zahlen, die Quaternionen; für sie ist  $n = 1, 2$  bzw. 4. Ferner hat man eine nicht-assoziative Divisions-Algebra mit  $n = 8$  studiert: die Cayleyschen Zahlen<sup>12)</sup>. Es ist aber nicht bekannt, ob es auch für andere Werte von  $n$  als 1, 2, 4, 8 Divisions-Algebren gibt.

---

<sup>12)</sup> Man vergleiche z. B.: *L. E. Dickson, Algebren und ihre Zahlentheorie* (Zürich 1927), § 133.

*Satz IV. Die Anzahl  $n$  der Einheiten einer Divisions-Algebra über dem Körper der reellen Zahlen ist notwendigerweise eine Potenz von 2.*

*Beweis.*  $e_1, \dots, e_n$  seien die Einheiten einer Divisions-Algebra; ihre Multiplikation sei durch

$$e_\varrho e_\sigma = \sum_\nu a_{\varrho\sigma\nu} e_\nu$$

erklärt. Für zwei Größen

$$x = \sum_\varrho x_\varrho e_\varrho, \quad y = \sum_\sigma y_\sigma e_\sigma$$

ist dann das Produkt durch

$$x y = \sum_\nu \left( \sum_{\varrho, \sigma} a_{\varrho\sigma\nu} x_\varrho y_\sigma \right) e_\nu$$

gegeben. Daß es keine Nullteiler gibt, ist gleichbedeutend damit, daß die Bilinearformen

$$f_\nu = \sum_{\varrho, \sigma} a_{\varrho\sigma\nu} x_\varrho y_\sigma, \quad \nu = 1, \dots, n,$$

ein definites System bilden. Daher folgt der Satz IV aus dem Satz I e. <sup>12 a)</sup>

## § 2. Beweis des Hauptsatzes

8. *Geometrische Deutung der definiten Systeme ungerader Funktionen.*

Es sei ein definites System (4) vorgelegt, wie es in Nr. 1 erklärt worden ist. Da auch die Funktionen

$$f'_\nu = \frac{f_\nu}{\sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2}}$$

stetig und ungerade sind und ein definites System bilden, dürfen wir, indem wir statt  $f'_\nu$  wieder  $f_\nu$  schreiben, annehmen, daß

$$\sum_{\nu=1}^n f_\nu^2 = 1 \quad (1)$$

ist.

Durch

$$\sum_{\varrho=1}^r x_\varrho^2 = 1, \quad \sum_{\sigma=1}^s y_\sigma^2 = 1, \quad \sum_{\nu=1}^n z_\nu^2 = 1$$

sind Sphären  $S_{r-1}$ ,  $S_{s-1}$ ,  $S_{n-1}$  erklärt, deren Dimensionszahlen durch die Indizes angegeben sind. Infolge (1) wird durch

$$z_\nu = f_\nu (x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s)$$

---

<sup>12 a)</sup> Im Anhang II kommen wir noch einmal auf Algebren zurück.

jedem Punktpaar  $(x, y)$  mit  $x \in S_{r-1}$ ,  $y \in S_{s-1}$  ein Punkt  $z \in S_{n-1}$  zugeordnet, es wird also eine Abbildung  $f$  des topologischen Produktes  $S_{r-1} \times S_{s-1}$  in die Sphäre  $S_{n-1}$  erklärt; diese Abbildung ist stetig; sie ist ferner „ungerade“, d. h. es ist

$$f(-x, y) = f(x, -y) = -f(x, y),$$

wenn wir durch  $-x, \dots$  die Antipoden der Punkte  $x, \dots$  bezeichnen.

Durch Identifizierung je zweier antipodischer Punkte einer Sphäre  $S_k$  entsteht ein  $k$ -dimensionaler projektiver Raum  $P_k$ . Daher folgt aus der Ungeradheit von  $f$  erstens, daß durch  $f$  eine stetige Abbildung  $F$  des topologischen Produktes  $P_{r-1} \times P_{s-1}$  in den Raum  $P_{n-1}$  bewirkt wird. Zweitens: hält man einen Punkt  $x^0$  von  $S_{r-1}$  fest und läßt  $y$  einen halben Großkreis auf  $S_{s-1}$  von einem Punkt  $y^0$  in den Antipoden  $-y^0$  durchlaufen, so durchläuft der Bildpunkt  $f(x^0, y)$  auf  $S_{n-1}$  einen Weg, der ebenfalls einen Punkt  $z^0$  mit dem Antipoden  $-z^0$  verbindet; da einem Weg auf der Sphäre  $S_k$ , der zwei Antipoden verbindet, in  $P_k$  ein geschlossener Weg vom Homologietypus der projektiven Geraden entspricht, so bedeutet die eben festgestellte Eigenschaft der ungeraden Abbildung  $f$  für die Abbildung  $F$ :

$$F(\text{Punkt} \times \text{Gerade}) \sim \text{Gerade}; \quad (2a)$$

analog ergibt sich:

$$F(\text{Gerade} \times \text{Punkt}) \sim \text{Gerade}; \quad (2b)$$

dies sind Homologien, in denen „Punkt“ und „Gerade“ als Zyklen der Dimensionen 0 bzw. 1 aufzufassen sind.

Eine Abbildung  $F$  des Produktes zweier projektiver Räume in einen projektiven Raum, welche die Eigenschaften (2a) und (2b) besitzt, möge kurz „ungerade“ heißen. Dann sehen wir: *Ein definites System von  $n$  ungeraden Funktionen der Variablen  $x_1, \dots, x_r$  und  $y_1, \dots, y_s$  bewirkt eine ungerade Abbildung<sup>13)</sup> des Produktes  $P_{r-1} \times P_{s-1}$  in den Raum  $P_{n-1}$ .*

Damit ist der Satz I auf den folgenden zurückgeführt:

*Satz I\*:* *Voraussetzung: Es existiert eine ungerade Abbildung<sup>13)</sup> von  $P_{r-1} \times P_{s-1}$  in  $P_{n-1}$ . Behauptung: Die Bedingung  $\mathfrak{B}(r, s; n)$  ist erfüllt. b)*

---

<sup>13)</sup> Unter einer „Abbildung“ einer Mannigfaltigkeit wird immer eine *stetige* Abbildung verstanden.

b) Ist  $s = 1$ , so ist  $P_{s-1}$  ein Punkt, (2a) inhaltslos und die Ungeradheit von  $F$  also allein durch (2b) charakterisiert; die Behauptung lautet:  $n \geq r$ . Man vergl. Fußnote. a)

**9. Die Ringe des projektiven Raumes und des Produktes zweier projektiver Räume.** Für den Beweis des Satzes I\* müssen wir uns zunächst näher mit den Homologie-Eigenschaften von  $P_{n-1}$  und  $P_{r-1} \times P_{s-1}$  befassen. *Als Koeffizientenbereich legen wir den Restklassenring modulo 2 zugrunde.* Dann ist für jede geschlossene Mannigfaltigkeit  $L$  der Homologiering  $\mathfrak{R}(L)$  in bekannter Weise erklärt: seine Elemente sind die Homologieklassen, die Addition ist die der Bettischen Gruppen, das Produkt ist der Schnitt.

Wir betrachten zunächst einen projektiven Raum  $P_k$ . Man weiß, daß es für jedes  $\kappa$ ,  $0 \leq \kappa \leq k$ , genau eine Homologiekasse gibt, die nicht Null ist; sie wird durch eine  $\kappa$ -dimensionale projektive Ebene repräsentiert; sie heiße  $\zeta_\kappa$ ; es wird also speziell  $\zeta_0$  durch einen Punkt,  $\zeta_1$  durch eine Gerade,  $\zeta_{k-1}$  durch eine  $(k-1)$ -dimensionale Ebene,  $\zeta_k$  durch den ganzen Raum  $P_k$  dargestellt. Für jedes  $\kappa < k$  ist  $\zeta_\kappa$  der Schnitt von  $k-\kappa$  Ebenen des Typus  $\zeta_{k-1}$ , also, wenn wir kurz  $\zeta_{k-1} = \zeta$  schreiben: <sup>14)</sup>

$$\zeta_\kappa = \zeta^{k-\kappa} ;$$

dies gilt auch noch für  $\kappa = k$ , indem wir unter  $\zeta^0$  das Eins-Element des Ringes  $\mathfrak{R}(P_k)$  verstehen. Dagegen ist  $\zeta^\kappa = 0$  für alle  $\kappa > k$ .

Somit läßt sich die Struktur des Ringes  $\mathfrak{R}(P_{n-1})$  folgendermaßen beschreiben:

*$\mathfrak{R}(P_{n-1})$  ist der Ring der Polynome in einer Unbestimmten  $\zeta$  mit Koeffizienten aus dem Restklassenring mod. 2, wobei  $\zeta$  die Relation*

$$\zeta^n = 0 \tag{3}$$

erfüllt; mit anderen Worten: bezeichnet  $\Gamma$  den Ring aller Polynome in der Unbestimmten  $\zeta$  mit Koeffizienten mod. 2, so ist  $\mathfrak{R}(P_{n-1})$  der Restklassenring von  $\Gamma$  nach dem von  $\zeta^n$  erzeugten Ideal  $(\zeta^n)$ .

Für die Dimensionszahlen ergibt sich

$$\text{Dim. } \zeta^\nu = (n-1) - \nu , \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1 .$$

Daraus folgt weiter: Für jedes  $d$  bildet  $\zeta^{n-1-d}$  eine  $d$ -dimensionale Homologiebasis; und zwar sind die Basen  $\{\zeta^{n-1-d}\}$  und  $\{\zeta^d\}$  zueinander dual <sup>15)</sup>.

<sup>14)</sup> Obere Indizes sind im folgenden immer *Exponenten* (nicht etwa Dimensionszahlen).

<sup>15)</sup> In einer  $k$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $L$  heißt die  $(k-d)$ -dimensionale Homologiebasis  $\{z'_1, \dots, z'_q\}$  zu der  $d$ -dimensionalen Homologiebasis  $\{z_1, \dots, z_q\}$  dual, wenn für die Schnittzahlen gilt:  $(z'_i \cdot z_i) = 1$ ,  $(z'_h \cdot z_i) = 0$  für  $h \neq i$ .

Nach dem Poincaré-Veblenschen Dualitätssatz gibt es in jeder geschlossenen Mannigfaltigkeit, gleichgültig ob orientierbar oder nicht, zu jeder Basis eine (und nur eine) duale, vorausgesetzt, daß der Ring mod. 2 als Koeffizientenbereich dient.

Man vergleiche *Seifert-Threlfall, Lehrbuch der Topologie* (Leipzig und Berlin 1934), 253, Satz III.

Die Bestimmung des Ringes  $\mathfrak{R}(P_{r-1} \times P_{s-1})$ , die jetzt vorgenommen werden soll, beruht auf den folgenden beiden Sätzen (E) und (F), die als bekannt gelten dürfen;  $U$  und  $V$  sind beliebige geschlossene Mannigfaltigkeiten; unter einer „vollen“ Bettischen Basis (mod. 2) einer Mannigfaltigkeit wird eine Basis der „vollen“ Bettischen Gruppe verstanden, d. h. der direkten Summe der Bettischen Gruppen aller Dimensionen.

(E) Durchlaufen  $\xi_i$  und  $\eta_j$  volle Bettische Basen von  $U$  bzw.  $V$ , so durchläuft  $\xi_i \times \eta_j$  eine volle Bettische Basis von  $U \times V$ .<sup>16)</sup>

(F) Sind  $\xi, \xi'$  bzw.  $\eta, \eta'$  Elemente von  $\mathfrak{R}(U)$  bzw.  $\mathfrak{R}(V)$ , so gilt für die Produkte (mod. 2) in  $U \times V$ :

$$(\xi \times \eta) \cdot (\xi' \times \eta') = \xi \cdot \xi' \times \eta \cdot \eta'. \quad 17)$$

Es sei nun  $U = P_{r-1}$ ,  $V = P_{s-1}$ ; wie oben festgestellt wurde, werden volle Basen in  $P_{r-1}$  und  $P_{s-1}$  von Potenzen

$$\xi^0, \xi, \dots, \xi^{r-1} \quad \text{bzw.} \quad \eta^0, \eta, \dots, \eta^{s-1}$$

gebildet, wobei  $\xi$  durch eine  $(r - 2)$ -dimensionale Ebene in  $P_{r-1}$  und  $\eta$  durch eine  $(s - 2)$ -dimensionale Ebene in  $P_{s-1}$  repräsentiert wird. Setzen wir

$$\xi \times \eta^0 = X, \quad \xi^0 \times \eta = Y,$$

so ist nach (F)

$$\xi^\varrho \times \eta^\sigma = X^\varrho \cdot Y^\sigma,$$

und diese Produkte mit

$$0 \leq \varrho \leq r - 1, \quad 0 \leq \sigma \leq s - 1 \quad (4)$$

bilden nach (E) eine volle Bettische Basis in  $P_{r-1} \times P_{s-1}$ . Das Ergebnis ist:

$\mathfrak{R}(P_{r-1} \times P_{s-1})$  ist der Ring der Polynome in zwei Unbestimmten  $X, Y$  mit Koeffizienten aus dem Restklassenring mod. 2, wobei  $X$  und  $Y$  die Relationen

$$X^r = 0, \quad Y^s = 0 \quad (5)$$

erfüllen; mit anderen Worten: bezeichnet  $\mathcal{A}$  den Ring aller Polynome in den Unbestimmten  $X, Y$  mit Koeffizienten mod. 2, so ist  $\mathfrak{R}(P_{r-1} \times P_{s-1})$  der Restklassenring von  $\mathcal{A}$  nach dem von  $X^r$  und  $Y^s$  erzeugten Ideal  $(X^r, Y^s)$ .

<sup>16)</sup> Einen Beweis erhält man z. B., indem man den § 3 des Kap. VII in dem Buche<sup>6)</sup> von *Alexandroff-Hopf* dadurch abändert (und wesentlich vereinfacht), daß man den dort zugrunde gelegten ganzzahligen Koeffizientenbereich durch den Ring mod. 2 ersetzt.

<sup>17)</sup> S. Lefschetz, *Topology* (New York 1930), 238, Formel (21) — aber, da wir mod. 2 arbeiten, ohne Berücksichtigung von Vorzeichen.

Für die Dimensionszahlen ergibt sich durch eine leichte Abzählung

$$\text{Dim. } X^\varrho \cdot Y^\sigma = (r+s-2) - (\varrho + \sigma) . \quad (6)$$

Daraus folgt weiter: Für jedes  $d$  bilden die Produkte  $X^\varrho \cdot Y^\sigma$  mit  $\varrho + \sigma = r + s - 2 - d$ , wobei  $\varrho$  und  $\sigma$  außerdem durch (4) eingeschränkt sind, eine  $d$ -dimensionale Basis; setzen wir  $r + s - 2 - d = n$  und  $\varrho = n - \sigma$ , so ist (4) gleichbedeutend mit

$$0 \leq n - \sigma < r , \quad 0 \leq \sigma < s ,$$

also mit

$$0 \leq \sigma \leq n , \quad n - r < \sigma < s . \quad (7)$$

Daher können wir eine  $d$ -dimensionale Basis auch folgendermaßen charakterisieren, wobei  $d + n = r + s - 2$  ist: sie besteht aus denjenigen Produkten  $X^{r-\sigma} \cdot Y^\sigma$ , für welche  $\sigma$  alle Werte durchläuft, die (7) genügen.

Insbesondere bilden

$$X^{r-1} \cdot Y^{s-2} , \quad X^{r-2} \cdot Y^{s-1}$$

bzw.

$$Y , \quad X$$

Basen der Dimensionen 1 bzw.  $r + s - 2$ , und zwar ergibt sich aus den Multiplikationsregeln, daß diese Basen zueinander dual sind. <sup>c)</sup>

**10. Topologische Deutung der Bedingung  $\mathfrak{B}(r, s; n)$ .** Wir behaupten: *Die Bedingung  $\mathfrak{B}(r, s; n)$  ist gleichbedeutend mit dem Bestehen der Relation*

$$(X + Y)^n = 0 \quad (8)$$

im Ringe  $\mathfrak{R}(P_{r-1} \times P_{s-1})$ . <sup>d)</sup>

*Beweis.* Nach dem binomischen Satz und nach (5) ist

$$(X + Y)^n = \sum_k \binom{n}{k} X^{n-k} \cdot Y^k , \quad (9)$$

wobei die Summe über alle  $k$  zu erstrecken ist, die die Bedingungen

$$0 \leq k \leq n \quad \text{und} \quad n - r < k < s \quad (10)$$

erfüllen.

---

<sup>c)</sup> Ist  $s = 1$ , so besteht die erste dieser Basen nur aus  $X^{r-2} \cdot Y^{s-1}$ , die zweite nur aus  $X$ ; analog für  $r = 1$ ; man vergleiche Fußnote b).

<sup>d)</sup> Ist  $s = 1$  oder  $r = 1$ , so lautet (8) einfach:  $X^n = 0$  bzw.  $Y^n = 0$ .

Gilt nun  $\mathfrak{B}(r, s; n)$ , so ist daher jeder Koeffizient auf der rechten Seite von (9) das Null-Element des Koeffizientenringes — des Restklassenringes mod. 2 —, und folglich gilt auch (8).

Es gelte andererseits (8); dann verschwindet die rechte Seite von (9); die dort auftretenden  $X^{n-k} \cdot Y^k$  bilden aber nach Nr. 9 eine Basis der Dimension  $r+s-2-n$  und sind daher gewiß linear unabhängig, und daher ist jeder Koeffizient das Null-Element des Koeffizientenringes; es sind also alle diejenigen  $\binom{n}{k}$  gerade, für welche (10) gilt; da aber die  $\binom{n}{k}$  für welche die erste Bedingung (10) *nicht* gilt, ohnehin Null sind, ist bereits die Gültigkeit der zweiten Bedingung (10) für die Geradheit von  $\binom{n}{k}$  hinreichend. Folglich ist  $\mathfrak{B}(r, s; n)$  erfüllt.

Aus der damit bewiesenen Äquivalenz der Bedingungen  $\mathfrak{B}(r, s; n)$  und (8) ergibt sich, daß der Satz I\* gleichbedeutend mit dem folgenden ist:

**Satz I\*\*.** *Voraussetzung: Es existiert eine ungerade Abbildung von  $P_{r-1} \times P_{s-1}$  in  $P_{n-1}$ . Behauptung: Im Ringe  $\mathfrak{R}(P_{r-1} \times P_{s-1})$  gilt (8).*

**11. Der Umkehrungs-Homomorphismus.** Ich berichte hier über die Methode, die zum Beweis des Satzes I\*\* führen wird.  $L$  und  $\Lambda$  seien geschlossene Mannigfaltigkeiten. Ihre Dimensionszahlen seien  $l$  bzw.  $\lambda$ . Der Koeffizientenbereich sei weiterhin der Restklassenring mod. 2. Die Homologieringe werden mit  $\mathfrak{R}(L)$  und  $\mathfrak{R}(\Lambda)$  bezeichnet.<sup>18)</sup>

Jede Abbildung  $f$  von  $L$  in  $\Lambda$  bewirkt bekanntlich eine Abbildung von  $\mathfrak{R}(L)$  in  $\mathfrak{R}(\Lambda)$ ; diese Ringabbildung nennen wir ebenfalls  $f$ ; sie ist dimensionstreu; sie ist ein additiver, aber im allgemeinen kein multiplikativer Homomorphismus.

Die Elemente von  $\mathfrak{R}(L)$  und  $\mathfrak{B}(\Lambda)$ , die einfach gezählten Punkten entsprechen, seien mit  $p$  bzw.  $\pi$  bezeichnet; dann ist immer

$$f(p) = \pi. \quad (11)$$

Es gilt nun der folgende Satz:<sup>18)</sup>

*Zu jeder Abbildung  $f$  von  $L$  in  $\Lambda$  gibt es eine Abbildung  $\varphi$  von  $\mathfrak{R}(\Lambda)$  in  $\mathfrak{R}(L)$  mit folgenden Eigenschaften:*

---

<sup>18)</sup> Man vergleiche die unter <sup>3)</sup> zitierten Arbeiten; die von mir a. a. O. gemachte Voraussetzung, daß die beiden Mannigfaltigkeiten gleiche Dimension haben, ist unnötig. Da wir den Koeffizientenbereich mod. 2 zugrunde legen, brauchen wir nichts über die Orientierbarkeit der Mannigfaltigkeiten vorauszusetzen.

- (A)  $\varphi$  ist ein additiver und multiplikativer Homomorphismus;  
 (B)  $\varphi$  ist mit  $f$  durch die Funktionalgleichung

$$f(\varphi(\zeta) \cdot z) = \zeta \cdot f(z) \quad (12)$$

verknüpft; hierin sind  $z$  und  $\zeta$  beliebige Elemente von  $\mathfrak{R}(L)$  bzw.  $\mathfrak{R}(A)$ .

$\varphi$  heißt der „Umkehrungs-Homomorphismus“ von  $f$ ; daß er durch  $f$  in eindeutiger Weise bestimmt ist, ergibt sich aus dem späteren Satz (D).

Jetzt zeigen wir zunächst:

(C) Ist  $\zeta$  homogen-dimensional<sup>19)</sup> von der Dimension  $\sigma$ , so ist auch  $\varphi(\zeta)$  homogen-dimensional; und zwar ist

$$\text{Dim. } \varphi(\zeta) = \sigma + l - \lambda .$$

*Beweis.* <sup>20)</sup> Ist  $\varphi(\zeta) = 0$ , so ist nichts zu beweisen<sup>21)</sup>; es sei  $\varphi(\zeta) \neq 0$ ; dann läßt sich  $\varphi(\zeta)$  in der Form

$$\varphi(\zeta) = Z_{\varrho_1} + Z_{\varrho_2} + \cdots + Z_{\varrho_k} \quad (13)$$

schreiben, wobei  $Z_{\varrho_i}$  einen homogen  $\varrho_i$ -dimensionalen, von 0 verschiedenen Element von  $\mathfrak{R}(L)$  bezeichnet und die  $\varrho_i$  paarweise voneinander verschieden sind. Aus dem Dualitätssatz<sup>15)</sup> folgt, daß es ein homogen  $(l - \varrho_1)$ -dimensionales Element  $z_{l - \varrho_1}$  gibt, für welches  $Z_{\varrho_1} \cdot z_{l - \varrho_1} = p$  ist; dann ist

$$\varphi(\zeta) \cdot z_{l - \varrho_1} = p + \sum_{i=2}^k Z_{\varrho_i} \cdot z_{l - \varrho_1} ;$$

übt man hierauf  $f$  aus, so folgt nach (12) und (11)

$$\zeta \cdot f(z_{l - \varrho_1}) = \pi + \sum_{i=2}^k f(Z_{\varrho_i} \cdot z_{l - \varrho_1}) . \quad (14)$$

Hierin ist die linke Seite homogen  $(\sigma + l - \varrho_1 - \lambda)$ -dimensional; das-selbe gilt daher für die rechte Seite; hier aber ist  $\pi$  homogen 0-dimensional und  $\neq 0$ , das Glied  $f(Z_{\varrho_i} \cdot z_{l - \varrho_1})$  dagegen homogen-dimensional von der Dimension  $\varrho_i - \varrho_1 \neq 0$ <sup>22)</sup>; das ist nur möglich, wenn (14) einfach

$$\zeta \cdot f(z_{l - \varrho_1}) = \pi$$

<sup>19)</sup> Alexandroff-Hopf, wie <sup>6)</sup>, 169.

<sup>20)</sup> Der Satz C ergibt sich auch unmittelbar aus jeder einzelnen der verschiedenen Definitionen von  $\varphi$ ; <sup>3)</sup> ich will hier aber auf diese Definitionen nicht eingehen, sondern zeigen, daß alle Eigenschaften von  $\varphi$  aus den Eigenschaften (A) und (B) folgen.

<sup>21)</sup> Der Null-Zyklus ist homogen-dimensional von jeder Dimension.

<sup>22)</sup> Zyklen negativer Dimension sind immer gleich 0 zu setzen.

lautet und  $\sigma + l - \varrho_1 - \lambda = 0$ , also  $\varrho_1 = \sigma + l - \lambda$  ist. Da  $\varrho_1$  aber nicht vor den anderen  $\varrho_i$  ausgezeichnet ist, folgt hieraus weiter, daß die rechte Seite von (13) nur aus einem Glied besteht. Damit ist (C) bewiesen.

Es seien jetzt  $\{z_i\}$  und  $\{\zeta_k\}$  Basen in  $L$  bzw.  $A$  von derselben Dimension  $d$ ; ihre dualen Basen<sup>15)</sup>  $\{z'_h\}$ ,  $\{\zeta'_j\}$  sind von den Dimensionen  $l - d$  bzw.  $\lambda - d$ ; die Dualität bedeutet das Bestehen der Relationen

$$z'_h \cdot z_i = \begin{cases} p & \text{für } h = i \\ 0 & \text{für } h \neq i \end{cases}, \quad \zeta'_j \cdot \zeta_k = \begin{cases} \pi & \text{für } j = k \\ 0 & \text{für } j \neq k \end{cases}. \quad (15)$$

$f$  bewirkt eine Substitution

$$f(z_i) = \sum a_{ik} \zeta_k; \quad (16)$$

da  $\varphi(\zeta'_j)$  nach (C) die Dimension  $l - d$  hat, bewirkt  $\varphi$  eine Substitution

$$\varphi(\zeta'_j) = \sum \alpha_{jh} z'_h. \quad (17)$$

Es gilt nun:

(D) *Die  $\varphi$ -Substitution (17) ist die Transponierte der  $f$ -Substitution (16), das heißt*

$$\alpha_{ji} = a_{ij}. \quad (18)$$

*Beweis.* Aus (17), (15), (11) folgt

$$f(\varphi(\zeta'_j) \cdot z_i) = \sum \alpha_{jh} f(z'_h \cdot z_i) = \alpha_{ji} f(p) = \alpha_{ji} \pi;$$

aus (16), (15) folgt

$$\zeta'_j \cdot f(z_i) = \sum a_{ik} \zeta'_j \cdot \zeta_k = a_{ij} \pi;$$

aus (12), mit  $\zeta = \zeta'_j$  und  $z = z_i$ , folgt daher (18).

**12. Beweis des Satzes I\*\*.**  $F$  sei eine ungerade Abbildung von  $P_{r-1} \times P_{s-1}$  in  $P_{n-1}$ . Die Bedingungen (2a) und (2b) aus Nr. 8 lauten in den Bezeichnungen aus Nr. 9: <sup>14)</sup>

$$\begin{aligned} F(\xi^{r-1} \times \eta^{s-2}) &= \zeta^{n-2} \\ F(\xi^{r-2} \times \eta^{s-1}) &= \zeta^{n-2} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} F(X^{r-1} \cdot Y^{s-2}) &= \zeta^{n-2} \\ F(X^{r-2} \cdot Y^{s-1}) &= \zeta^{n-2} \end{aligned} \quad (19)$$

Da, wie in Nr. 9 festgestellt wurde, die Basis  $\{Y, X\}$  dual zur Basis  $\{X^{r-1} \cdot Y^{s-2}, X^{r-2} \cdot Y^{s-1}\}$  und die Basis  $\{\zeta\}$  dual zur Basis  $\{\zeta^{n-2}\}$  ist, folgt nach Nr. 11 (D) aus (19) für den Umkehrungs-Homomorphismus  $\Phi$  von  $F$ :

$$\Phi(\zeta) = X + Y. \quad (20)$$

Da  $\Phi$  ein multiplikativer Homomorphismus ist, folgt hieraus

$$(X + Y)^n = \Phi(\zeta^n),$$

und damit folgt aus

$$\zeta^n = 0 \quad (3)$$

die Gültigkeit der Behauptung

$$(X + Y)^n = 0. \quad \text{e)} \quad (8)$$

## A N H A N G I

### Systeme von Richtungsfeldern in den projektiven Räumen <sup>23)</sup>

Mit  $P_k$  wird der  $k$ -dimensionale reelle projektive Raum bezeichnet.

*Satz V.* Auf einer  $(r - 1)$ -dimensionalen Ebene  $P_{r-1}$  des Raumes  $P_{n-1}$  seien  $s - 1$  stetige Felder von Richtungen des  $P_{n-1}$  angebracht, welche in jedem Punkte von  $P_{r-1}$  linear unabhängig voneinander sind. Dann ist die Bedingung  $\mathfrak{B}(r, s; n)$  erfüllt.

*Beweis.* Im euklidischen Raum  $R_n$  mit den Koordinaten  $(x_1, \dots, x_n)$  sei  $S_{n-1}$  die Sphäre mit dem Mittelpunkt  $o = (0, \dots, 0)$  und dem Radius 1; wir fassen sie als zweiblättrige Überlagerung von  $P_{n-1}$  auf, derart, daß je zwei antipodische Punkte von  $S_{n-1}$  einem Punkte von  $P_{n-1}$  entsprechen; der Ebene  $P_{r-1}$  entspricht eine Großkugel  $S_{r-1}$  von  $S_{n-1}$ ; wir dürfen annehmen, daß  $S_{r-1}$  der Schnitt von  $S_{n-1}$  mit der  $(x_1, \dots, x_r)$ -Koordinatenebene des  $R_n$  ist.

Jeder Richtung des  $P_{n-1}$  entsprechen zwei Tangentialrichtungen der  $S_{n-1}$ , die durch Spiegelung am Mittelpunkt  $o$  ineinander übergehen; einem Richtungsfeld auf  $P_{r-1}$  entspricht daher ein Feld von Tangenten der  $S_{n-1}$ , das auf  $S_{r-1}$  erklärt und symmetrisch in bezug auf  $o$  ist; repräsentieren wir diese Tangentialrichtungen etwa durch Vektoren der Länge 1, so sind deren Komponenten ungerade Funktionen von  $x_1, \dots, x_r$ .

Die Vektoren  $g_1, \dots, g_{s-1}$ , welche auf diese Weise den auf  $P_{r-1}$  gegebenen Richtungen entsprechen, sind an jeder Stelle linear unabhängig; da sie tangential an  $S_{n-1}$  sind, so ist auch das System  $g_1, \dots, g_{s-1}, \mathfrak{x}$ , welches durch Hinzufügung des Normalvektors  $\mathfrak{x} = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$

---

e) Für  $s = 1$  hat man den Beweis folgendermaßen zu modifizieren: Nur die zweite Gleichung (19) ist sinnvoll, (20) lautet:  $\varphi(\zeta) = X$ , und daraus folgt  $X^n = 0$ ; analog für  $r = 1$ . Man vergleiche die Fußnoten a), b), c), d).

<sup>23)</sup> Die Sätze dieses Anhanges stammen von Stiefel, a. a. O.<sup>2)</sup>.

der  $S_{r-1}$  entsteht, linear unabhängig; folglich hat, wenn wir die  $\nu$ -te Komponente von  $g_\sigma$  mit  $g_{\sigma\nu}$  bezeichnen, die Matrix

$$\begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{s-1,1} & \dots & g_{s-1,n} \\ x_1 \dots x_r & 0 \dots 0 \end{pmatrix}$$

durchweg, d. h. für alle  $(x_1, \dots, x_r)$  mit  $\sum x_\rho^2 = 1$ , den Rang  $s$ . Daher ist nach Satz II (Nr. 5) die Bedingung  $\mathfrak{B}(r, s; n)$  erfüllt.

Ist  $r = n$ , d. h. sind die Richtungsfelder im ganzen Raum  $P_{n-1}$  erklärt und stetig, so ist demnach  $\mathfrak{B}(n, s; n)$  erfüllt; diese Bedingung ist (Nr. 2) gleichbedeutend mit  $\mathfrak{B}(s, n; n)$ ; diese letztere Bedingung ist in Nr. 3 (c) untersucht worden; auf Grund des dortigen Ergebnisses gilt, wenn wir  $s - 1 = m$ ,  $n - 1 = k$  setzen:

*Satz Vc.* *Die maximale Anzahl  $m$  von Richtungsfeldern, welche im ganzen Raum  $P_k$  stetig und in jedem Punkt voneinander linear unabhängig sind, ist  $\leq 2^\lambda - 1$ , wobei  $2^\lambda$  die größte Potenz von 2 ist, welche in  $k + 1$  aufgeht.*

Eine  $k$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist „parallelisierbar“, wenn in ihr  $k$  stetige Richtungsfelder existieren, welche in jedem Punkt voneinander linear unabhängig sind<sup>24)</sup>. Daher ist im Satz Vc enthalten:

*Satz Ve.* *Der  $k$ -dimensionale projektive Raum  $P_k$  ist höchstens dann parallelisierbar, wenn  $k + 1$  eine Potenz von 2 ist.*

Die einzigen projektiven Räume, deren Parallelisierbarkeit feststeht, sind diejenigen der Dimensionen 1, 3, 7. <sup>25)</sup>

## A N H A N G I I

### Definite Systeme symmetrischer Bilinearformen

Die in Nr. 1 betrachteten Funktionen  $f_\nu$  seien jetzt symmetrische Bilinearformen, es sei also

$$f_\nu = \sum_{\varrho, \sigma} a_{\nu\varrho\sigma} x_\varrho y_\sigma, \quad a_{\nu\varrho\sigma} = a_{\nu\sigma\varrho};$$

$$\varrho = 1, \dots, r; \quad \sigma = 1, \dots, r.$$

<sup>24)</sup> *Stiefel, a. a. O.<sup>1)</sup>.*

<sup>25)</sup> Für diese Dimensionszahlen  $k$  erhält man  $k$  stetige, durchweg linear unabhängige Richtungsfelder im  $P_k$  mit Hilfe der Matrizen  $(g_{\sigma\nu})$ , die am Schluß von Nr. 5 angegeben sind.

Die kleinste Zahl  $n$ , für welche es ein definites System von  $n$  solchen Formen gibt, heiße  $N(r)$ . Offenbar ist  $N(r) \geq n^*(r, r)$ , wobei  $n^*(r, s)$  die in Nr. 1 definierte Zahl ist; nach Satz I d ist daher

$$N(r) \geq 2^e, \quad (1)$$

wobei  $\varrho$  durch  $2^{\varrho-1} < r \leq 2^\varrho$  bestimmt ist. Es handelt sich jetzt um die Frage, ob sich diese untere Schranke von  $N(r)$  vergrößern lässt. Das einzige mir bekannte Resultat in dieser Richtung lautet:

$$N(r) \geq r + 2 \quad \text{für } r > 2; \quad (2)$$

(das System (7) in Nr. 1 zeigt, daß  $N(2) = 2$  ist).

Die Abschätzung (2) ist für die meisten  $r$  schlechter als (1); nur für  $r = 2^e - 1$  und  $r = 2^e$  ist die durch (2) gegebene Schranke um 1 bzw. um 2 besser als die durch (1) gegebene. Immerhin enthält (2) folgendes Korollar, das man nicht aus (1) entnehmen kann: In der (trivialen) Ungleichung  $N(r) \geq r$  gilt das Gleichheitszeichen nur für  $r = 2$  (und  $r = 1$ ). In der Terminologie aus Nr. 7 bedeutet dies: Eine *kommutative* Divisions-Algebra über dem Körper der reellen Zahlen hat nur zwei Einheiten — woraus leicht folgt, daß sie der Körper der komplexen Zahlen ist; für die Divisions-Algebren über dem Körper der reellen Zahlen ist also das assoziative Gesetz eine Folge des kommutativen.

Den Beweis von (2) habe ich an anderer Stelle dargestellt<sup>26)</sup>; in ihm wird die Behauptung (2) auf den folgenden topologischen Satz zurückgeführt: Für  $k > 1$  besitzt der projektive Raum  $P_k$  kein topologisches Modell im euklidischen Raum  $R_{k+1}$ .

(Eingegangen den 7. Dezember 1940.)

---

<sup>26)</sup> H. Hopf, Systeme symmetrischer Bilinearformen und euklidische Modelle der projektiven Räume, Vierteljahrsschrift der Naturforsch. Gesellschaft Zürich LXXXV (1940) (Festschrift Rudolf Fueter), 165—177.