

<b>Zeitschrift:</b>	Commentarii Mathematici Helvetici
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	13 (1940-1941)
<b>Artikel:</b>	Über Richtungsfelder in den projektiven Räumen und einen Satz aus der reellen Algebra.
<b>Autor:</b>	Stiefel, Eduard
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-13559">https://doi.org/10.5169/seals-13559</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über Richtungsfelder in den projektiven Räumen und einen Satz aus der reellen Algebra

Von EDUARD STIEFEL, Zürich

Es wird im folgenden die früher \*) für beliebige geschlossene Mannigfaltigkeiten entwickelte Theorie der Richtungsfelder auf die  $n$ -dimensionalen reellen projektiven Räume angewendet. Die vollständige Bestimmung der charakteristischen Homologieklassen (mod 2) dieser Räume (Satz D) ergibt einerseits Beiträge zur Topologie ihrer Richtungsfelder (Sätze A und B), andererseits folgen aus ihr Ergebnisse über reelle Matrizen und Bilinearformen (Nr. 9). In der nachstehenden Arbeit von *H. Hopf* werden dieselben Anwendungen als Folgerungen einer anderen topologischen Methode erscheinen \*\*).

1. Wenn  $n$  gerade ist, so gibt es bekanntlich im  $n$ -dimensionalen reellen projektiven Raum  $P^n$  — ebenso wie in der  $n$ -dimensionalen Sphäre — kein überall stetiges Richtungsfeld. Dieser klassische Satz von Brouwer lässt sich folgendermaßen verallgemeinern:

*Satz A. Es sei  $n + 1 = 2^\lambda \cdot u$ ,  $u$  ungerade. Dann ist es unmöglich,  $2^\lambda$  stetige Richtungsfelder im  $P^n$  so anzubringen, daß in jedem Punkt die dort angebrachten Richtungen linear unabhängig voneinander sind* <sup>1)</sup>.

Hierin ist unter anderem die Aussage enthalten, daß unter allen projektiven Räumen höchstens die der Dimensionszahlen  $n = 2^\lambda - 1$  parallelisierbar sein können, d. h. daß es höchstens in diesen projektiven Räumen  $n$  stetige und linear unabhängige Felder geben kann. Man weiß, daß  $P^1, P^3, P^7$  parallelisierbar sind; ob es noch weitere parallelisierbare projektive Räume gibt, weiß man nicht<sup>2)</sup>.

---

\*) *E. Stiefel, Richtungsfelder und Fernparallelismus in  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Comment. Math. Helvet. 8 (1935);* diese Arbeit wird im folgenden als „Diss.“ zitiert.

\*\*) Herr Prof. Dr. H. Hopf war so freundlich, mein ursprünglich vorliegendes Manuskript während meiner längeren Abwesenheit im Militärdienst für den Druck auszuarbeiten. Er hat bei dieser Gelegenheit einige Hilfsmittel, die ich als Spezialfälle der allgemeinen Theorie dargestellt hatte, für die projektiven Räume direkt hergeleitet. Ferner hat er einen Beweis, der bei mir noch nicht ganz präzis war, durch Benutzung eines Satzes von Ważewski in Ordnung gebracht. Ich danke ihm herzlich für seine Hilfe, ohne die das Erscheinen der Arbeit zum mindesten stark verzögert worden wäre.

<sup>1)</sup> Für  $\lambda = 1$  bereits enthalten in Diss. § 6, Satz 26.

<sup>2)</sup> Zum Problem der Parallelisierbarkeit vergleiche man Diss., besonders Einleitung, Nr. 5, 6.

Der Satz A wird weiter verallgemeinert und verschärft werden. Ein System von  $m$  stetigen und linear unabhängigen Richtungsfeldern nennen wir kurz ein „ $m$ -Feld“. Wir werden nicht nur  $m$ -Felder betrachten, die in dem ganzen Raum  $P^n$ , sondern auch solche, die nur in einer offenen Teilmenge von  $P^n$ , dem „Regularitätsbereich“ des Feldes, erklärt sind; die abgeschlossene Komplementärmenge dieses Bereiches heiße die „*Singularitätenmenge*“ des Feldes. (Über das Verhalten des Feldes auf dieser Menge  $Q$  wird nichts vorausgesetzt; es kommt oft vor, daß jedes einzelne der  $m$  Richtungsfelder im ganzen Raum regulär ist, und daß auf  $Q$  lineare Abhängigkeit zwischen den verschiedenen Feldern eintritt.) Es gilt der folgende Satz:

*Satz B. Der Regularitätsbereich eines  $m$ -Feldes im  $P^n$  enthalte eine  $k$ -dimensionale Ebene  $P^k$  des  $P^n$ . Dann sind alle Binomialkoeffizienten*

$$\binom{n+1}{\mu} \quad \text{mit} \quad n-k < \mu < m+1$$

gerade.

Wir zeigen, daß A aus B folgt: Ein im ganzen  $P^n$  reguläres  $m$ -Feld sei gegeben; dann ist die Voraussetzung von B mit  $k = n$  erfüllt; alle Zahlen  $\binom{n+1}{\mu}$  mit  $\mu = 1, 2, \dots, m$  sind daher gerade; für den Beweis der Behauptung  $m < 2^\lambda$  — das ist ja die Behauptung von A — hat man mithin nur noch zu zeigen, daß  $\binom{n+1}{2^\lambda}$  ungerade ist; dies geschieht, indem man das Polynom  $(1+x)^{n+1}$  modulo 2 nach dem binomischen Satz entwickelt:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= \sum_i \binom{n+1}{i} x^i \\ &= ((1+x)^{2^\lambda})^u \equiv (1+x^{2^\lambda})^u = \sum_j \binom{u}{j} x^{2^\lambda j} ; \end{aligned}$$

der Koeffizient von  $x^{2^\lambda}$  ist

$$\binom{n+1}{2^\lambda} \equiv \binom{u}{1} \equiv 1 \pmod{2} .$$

Der Satz B ist einerseits eine Folge des nächsten Satzes:

*Satz C. Es sei  $\binom{n+1}{m}$  ungerade und im  $P^n$  ein  $m$ -Feld mit einer Singularitätenmenge  $Q$  gegeben. Dann enthält jede Umgebung von  $Q$  einen  $(m-1)$ -dimensionalen Zyklus mod. 2, der einer Ebene  $P^{m-1}$  im  $P^n$  homolog ist.*

Um zu beweisen, daß  $B$  aus  $C$  folgt, nehmen wir ein  $m$ -Feld  $\mathfrak{F}$  und eine Ebene  $P^k$ , welche die Voraussetzungen des Satzes  $B$  erfüllen, sowie eine Zahl  $\mu$ , welche die dort genannten Ungleichungen befriedigt; infolge dieser Ungleichungen enthält  $P^k$  eine Ebene  $P^{n-\mu+1}$  und  $\mathfrak{F}$  ein  $\mu$ -Feld  $\mathfrak{F}'$ ;  $P^{n-\mu+1}$  hat mit jedem Zyklus, der einer Ebene  $P^{\mu-1}$  homolog ist, einen Schnittpunkt, ist aber fremd zu der Singularitätenmenge  $Q$  von  $\mathfrak{F}'$  und also auch zu einer gewissen Umgebung  $U$  von  $Q$ ; folglich enthält  $U$  keinen Zyklus, der homolog  $P^{\mu-1}$  ist; aus Satz  $C$ , angewandt auf  $\mathfrak{F}'$ , ergibt sich daher, daß  $\binom{n+1}{\mu}$  gerade ist.

Oft besteht die Singularitätenmenge eines Feldes aus den Punkten eines Komplexes (aus Zellen einer Zerlegung von  $P^n$ ), den wir dann den „Singularitätenkomplex“ des Feldes nennen. In diesem Fall gestattet der Satz  $C$  eine Präzisierung:

*Satz  $C'$ . Besteht, unter den Voraussetzungen des Satzes  $C$ , die Menge  $Q$  aus den Punkten eines Komplexes  $K$ , so enthält nicht nur eine Umgebung von  $Q$ , sondern der Komplex  $K$  selbst einen Teilzyklus von der im Satz  $C$  genannten Art.*

Es ist klar, daß  $C$  aus  $C'$  folgt: die Voraussetzungen von  $C$  seien erfüllt, und  $U$  sei eine vorgegebene Umgebung von  $Q$ ; man konstruiere einen in  $U$  gelegenen Komplex  $K$ , der die Menge  $Q$  enthält, und betrachte das  $m$ -Feld nur in der Komplementärmenge von  $K$ , so daß  $K$  also die Rolle des Singularitätenkomplexes spielt; durch Anwendung des Satzes  $C'$  auf das so verkleinerte  $m$ -Feld ergibt sich die Gültigkeit von  $C$ .

Die Sätze  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sind also Konsequenzen des Satzes  $C'$ , und der Beweis dieses Satzes ist daher unser Ziel. Außerdem werden wir algebraische Folgerungen aus dem Satz  $B$  ziehen (Nr. 9).

2. Der Beweis des Satzes  $C'$  beruht auf der allgemeinen Theorie der Systeme von Richtungsfeldern in geschlossenen Mannigfaltigkeiten und der „charakteristischen Homologiekasse“, die ich früher ausführlich dargestellt habe und über deren Hauptpunkte ich hier nur kurz berichten werde<sup>3)</sup>.

Wir betrachten eine differenzierbare geschlossene  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $M^n$ ; Orientierbarkeit wird nicht vorausgesetzt; als Koeffizientenbereich für die Homologien benutzen wir den Restklassenring mod. 2 (früher hatte ich, um feinere Resultate zu erhalten, für gewisse Dimensionszahlen den Ring der ganzen Zahlen, für andere den

---

<sup>3)</sup> Diss. § 4, besonders Nr. 4, 5.

Ring mod. 2 benutzt; für unsere gegenwärtigen Ziele genügt der letztere Ring; die dadurch entstehenden Änderungen sind lediglich Vereinfachungen). In  $M^n$  sei ein  $m$ -Feld mit einem Singularitätenkomplex  $K$  gegeben („ $m$ -Feld“ und „Singularitätenkomplex“ sind analog wie für den  $P^n$  erklärt);  $K$  gehöre einer hinreichend feinen Zellenzerlegung von  $M^n$  an. Wir setzen vorläufig voraus, daß  $K$  höchstens  $(m-1)$ -dimensional ist; jeder  $(m-1)$ -dimensionalen Zelle  $x_i$  von  $K$  wird durch eine Vorschrift, auf die wir noch zurückkommen werden, ein „Index“  $j(x_i)$  zugeordnet, der eine der beiden Restklassen mod. 2 ist; man bilde den algebraischen Komplex  $z = \sum j(x_i) x_i$ ; es gilt der folgende „Hauptsatz“:

*z ist ein Zyklus mod. 2; seine Homologieklassse  $F^{m-1}$  ist unabhängig von dem speziell betrachteten  $m$ -Feld.*

*z* heißt der „singuläre Zyklus“ des  $m$ -Feldes,  $F^{m-1}$  heißt die  $(m-1)$ -dimensionale „charakteristische Homologieklassse“ von  $M^n$ .

Ist  $\mathfrak{F}$  ein  $m$ -Feld mit einem Singularitätenkomplex  $K$  von größerer Dimension als  $m-1$ , so kann man immer ein  $m$ -Feld  $\mathfrak{F}'$  finden, dessen Singularitätenkomplex der aus den  $(m-1)$ -dimensionalen Zellen von  $K$  bestehende Komplex  $K^{m-1}$  ist. (Andeutung der Konstruktion von  $\mathfrak{F}'$ : in der Zellenzerlegung von  $M^n$ , die dual ist zu der Zerlegung, welcher  $K$  angehört, bilden diejenigen Zellen, deren duale Zellen nicht zu  $K$  gehören, einen Komplex  $\Gamma$ , der im Regularitätsbereich von  $\mathfrak{F}$  liegt; man behalte das Feld  $\mathfrak{F}$  nur auf  $\Gamma$  bei und tilge es in der Komplementärmenge von  $\Gamma$ ; das so reduzierte Feld läßt sich zu einem  $m$ -Feld  $\mathfrak{F}'$  mit dem Singularitätenkomplex  $K^{m-1}$  erweitern.) Der singuläre Zyklus  $z$  von  $\mathfrak{F}'$  liegt nach seiner Definition in  $K^{m-1}$ , also in  $K$ . Man sieht also:

*Ist der (beliebig-dimensionale) Komplex  $K$  Singularitätenkomplex eines  $m$ -Feldes, so enthält er einen Zyklus aus der charakteristischen Homologieklassse  $F^{m-1}$ .*

Hieraus ist ersichtlich, daß unser Satz  $C'$  in dem folgenden enthalten ist:

**Satz D.** *Die charakteristische Homologieklassse  $F^{m-1}$  des projektiven Raumes  $P^n$  ist die Nullklasse oder die Klasse, welche die Ebene  $P^{m-1}$  enthält, je nachdem  $\binom{n+1}{m}$  gerade oder ungerade ist.*

Man kann den Inhalt dieses Satzes auch folgendermaßen ausdrücken. Da im  $P^n$  die Ebenen  $P^r$   $r$ -dimensionale Homologiebasen mod. 2 bilden, ist es von vorneherein klar, daß es für  $m = 1, 2, \dots, n$  Restklassen  $\alpha_{n,m}$  mod. 2 gibt, welche durch die Homologien

$$z \sim \alpha_{n,m} P^{m-1} \tag{1}$$

bestimmt sind, wobei  $z$  singulärer Zyklus eines  $m$ -Feldes ist; dann besagt der Satz  $D$ :

Die durch (1) definierten Größen  $\alpha_{n,m}$  erfüllen die Kongruenzen

$$\alpha_{n,m} \equiv \binom{n+1}{m} \bmod. 2. \quad (2)$$

Bevor wir an den Beweis der Behauptung (2) herangehen, müssen wir noch den oben erwähnten Begriff des „Index“ besprechen, der bei der Definition der singulären Zyklen eine wesentliche Rolle spielte.

3. Der Begriff des „Index“ beruht auf dem nahe verwandten Begriff der „Charakteristik“<sup>4)</sup>. Auf einer Sphäre  $S^{n-m}$  des euklidischen Raumes  $R^n$  sei ein  $m$ -Feld des  $R^n$  gegeben, also ein solches System von  $m$  stetigen Feldern von Richtungen des  $R^n$ , daß in jedem einzelnen Punkt der  $S^{n-m}$  die dort angebrachten Richtungen linear unabhängig von einander sind; (die Richtungen sind im allgemeinen nicht tangential an  $S^{n-m}$ ). Jedem solchen Feld  $\mathfrak{F}$  ist als „Charakteristik“  $\alpha(\mathfrak{F})$  eine der beiden Restklassen mod. 2 zugeordnet; auf die Definition gehen wir hier nicht ein, sondern wir stellen nur fest, daß sich aus der Definition unmittelbar die folgenden drei Eigenschaften (a), (b), (c) ergeben:

(a) Die Charakteristik bleibt ungeändert bei stetiger Abänderung von  $\mathfrak{F}$ .

(b) Liegt  $R^n$  im  $R^{n+1}$  und fügt man zu  $\mathfrak{F}$  ein Feld konstanter (d. h. paralleler) Richtungen des  $R^{n+1}$  hinzu, die nicht im  $R^n$  liegen, so hat das dadurch auf  $S^{n-m}$  entstandene  $(m+1)$ -Feld des  $R^{n+1}$  die gleiche Charakteristik wie das gegebene  $m$ -Feld  $\mathfrak{F}$  des  $R^n$ .

(c) Für  $m = 1$  ist  $\alpha(\mathfrak{F})$  die bekannte Kroneckersche Charakteristik, also der Abbildungsgrad (mod. 2) derjenigen Abbildung der  $S^{n-1}$  auf die Richtungskugel des  $R^n$ , welche durch die Richtungen des Feldes vermittelt wird.

Von den weiteren Eigenschaften, die sich aus den vorstehenden ergeben, heben wir im Augenblick die folgende Verallgemeinerung von (c) hervor, deren Beweis wir wohl übergehen dürfen:

(d) Besteht jedes der  $m-1$  ersten Richtungsfeldern von  $\mathfrak{F}$  aus konstanten Richtungen, während die Richtungen des  $m$ -ten Feldes einer Ebene  $R^{n-m+1}$  des  $R^n$  parallel sind, so ist  $\alpha(\mathfrak{F})$  gleich dem Grade der Abbildung von  $S^{n-m}$  auf die Richtungskugel von  $R^{n-m+1}$ , welche durch die Richtungen des  $m$ -ten Feldes vermittelt wird.

In meiner früheren Darstellung war übrigens immer  $m < n$  voraus-

---

<sup>4)</sup> Diss. § 1, besonders Nr. 4, ferner § 2, § 3, Nr. 1.

gesetzt; jetzt ist es zweckmäßig, auch  $m = n$  zuzulassen; man bestätigt leicht, daß die vorstehenden Eigenschaften dann (und nur dann) gültig bleiben, wenn man festsetzt:

(e) Die Charakteristik eines  $n$ -Feldes auf einer  $S^0$  des  $R^n$ , also eines Paares von zwei  $n$ -Beinen, die in zwei Punkten des  $R^n$  angebracht sind, ist  $\equiv 0$  oder  $\equiv 1$  mod. 2, je nachdem die beiden  $n$ -Beine die gleiche Orientierung oder verschiedene Orientierungen des  $R^n$  bestimmen<sup>5)</sup>.

Wir werden später noch einige weitere Eigenschaften der Charakteristik nennen. Jetzt definieren wir den „Index“. Es sei also in der Mannigfaltigkeit  $M^n$  ein  $m$ -Feld mit einem  $(m - 1)$ -dimensionalen Singularitätenkomplex  $K$  gegeben, und  $x$  sei ein  $(m - 1)$ -dimensionales Simplex von  $K$ . Wir nehmen eine kleine Sphäre  $S^{n-m}$  in  $M^n$ , deren Mittelpunkt ein innerer Punkt von  $x$  ist, und die  $x$  umschlingt; das  $m$ -Feld ist auf ihr regulär und hat eine Charakteristik  $\alpha$ ; aus (a) folgt leicht, daß  $\alpha$  von der speziellen Wahl der Sphäre  $S^{n-m}$  nicht abhängt; diese Größe  $\alpha$  ist der Index  $j(x)$ .

4. Im Falle  $m = 1$ , in welchem  $x$  ein Punkt ist, ist demnach  $j(x)$  der in der üblichen Weise erklärte Index (mod. 2) einer isolierten Singularität eines Richtungsfeldes. Die charakteristische Homologieklasse  $F^0$  wird durch einen mit der Indexsumme  $\sum j(x_i)$  multiplizierten Punkt repräsentiert; die Indexsumme ist bekanntlich die Eulersche Charakteristik von  $M^n$ ; man sieht also:  $F^0$  ist dann und nur dann die Nullklasse, wenn die Eulersche Charakteristik von  $M^n$  gerade ist<sup>6)</sup>.

Da der projektive Raum  $P^n$  die Charakteristik 1 oder 0 hat, je nachdem  $n$  gerade oder ungerade ist, bedeutet das Vorstehende die Gültigkeit der Behauptung (2), also des Satzes  $D$ , für  $m = 1$  bei beliebigem  $n$ .

Wir wollen sogleich auch noch die Fälle  $m = n$  erledigen. Man kann im  $P^n$  — etwa indem man  $P^n$  als euklidischen  $R^n$  mit einer unendlich fernen Ebene  $P^{n-1}$  auffaßt — ein  $n$ -Feld konstruieren, dessen Singularitätenkomplex  $K$  eine Ebene  $P^{n-1}$  ist; ein  $(n - 1)$ -dimensionales Simplex  $x$  zerlegt die  $n$ -dimensionale Umgebung eines seiner inneren Punkte in zwei Gebiete, in deren jedem durch das dort reguläre  $n$ -Feld eine Orientierung bestimmt ist; aus der Definition des Index und aus Nr. 3, (e) folgt: sind diese beiden Orientierungen längs  $x$  kohärent, so ist  $j(x) \equiv 0$ , sind sie nicht kohärent, so ist  $j(x) \equiv 1$ . Daraus ist ersichtlich: der singuläre Zyklus (Nr. 2) des  $n$ -Feldes ist gleich 0 oder gleich  $P^{n-1}$ , je

---

<sup>5)</sup> Da das  $n$ -Feld auf  $S^0$  aus  $n$  Feldern von Richtungspaaren besteht, entspricht einer Reihenfolge der Richtungen in dem einen  $n$ -Bein eine bestimmte Reihenfolge in dem anderen  $n$ -Bein.

<sup>6)</sup> Diss. § 5, Nr. 2.

nachdem  $P^n$  orientierbar ist oder nicht<sup>7)</sup>). Da  $P^n$  für ungerades  $n$  orientierbar, für gerades  $n$  nicht orientierbar ist, ist damit (2) für  $m = n$  bewiesen.

5. Die somit bewiesene Gültigkeit von (2) für  $m = 1$  und  $m = n$  ermöglicht eine Umformung der Behauptung (2) für  $1 < m < n$ . Setzen wir für einen Augenblick  $\binom{n+1}{m} = \beta_{n,m}$ , so sind die  $\beta_{n,m}$  für  $1 \leq m \leq n$  durch die Pascalsche Dreiecksregel

$$\beta_{n,m} = \beta_{n-1,m-1} + \beta_{n-1,m}$$

zusammen mit den Randbedingungen

$$\beta_{n,1} = n + 1, \quad \beta_{n,n} = n + 1$$

vollständig charakterisiert. Die Behauptung (2) lautet:

$$\alpha_{n,m} \equiv \beta_{n,m} \pmod{2} \quad \text{für } 1 \leq m \leq n;$$

die Gültigkeit von

$$\alpha_{n,1} \equiv n + 1, \quad \alpha_{n,n} \equiv n + 1$$

haben wir soeben bewiesen; es bleibt also noch die Gültigkeit der Kongruenzen

$$\alpha_{n,m} \equiv \alpha_{n-1,m-1} + \alpha_{n-1,m} \quad (3)$$

für  $1 < m < n$

nachzuweisen.

Dieser Nachweis wird durch eine Konstruktion folgender Art erfolgen. Im  $P^n$  wird ein  $m$ -Feld  $\mathfrak{F}$  angegeben werden, dessen Singularitätenkomplex  $K$  aus zwei Ebenen  $P_1^{m-1}$  und  $P_2^{m-1}$  besteht, und dessen singulärer Zyklus  $z = \xi_1 P_1^{m-1} + \xi_2 P_2^{m-1}$  ist, wobei  $\xi_1$  und  $\xi_2$  gewisse Restklassen mod. 2 und  $P_1^{m-1}$ ,  $P_2^{m-1}$  als Zyklen mod. 2 aufzufassen sind; ohne daß  $\xi_1$  und  $\xi_2$  explizit bestimmt zu werden brauchen, wird dann in einem Raum  $P^{n-1}$  erstens ein  $(m-1)$ -Feld  $\mathfrak{F}'$  mit einem singulären Zyklus  $z_1 = \xi_1 P^{m-2}$  und zweitens ein  $m$ -Feld  $\mathfrak{F}''$  mit einem singulären Zyklus  $z_2 = \xi_2 P^{m-1}$  konstruiert werden, wobei  $P^{m-2}$  und  $P^{m-1}$  Ebenen des  $P^{n-1}$ , aufgefaßt als Zyklen mod. 2, sind. Damit wird der Beweis beendet sein; denn aus der Definition der  $\alpha_{\nu,\mu}$  folgt

$$\alpha_{n,m} = \xi_1 + \xi_2, \quad \alpha_{n-1,m-1} = \xi_1, \quad \alpha_{n-1,m} = \xi_2,$$

also die Gültigkeit von (3).

---

<sup>7)</sup> Dieses Kriterium für die Orientierbarkeit gilt nicht nur für  $P^n$ , sondern für alle geschlossenen Mannigfaltigkeiten  $M^n$ .

Hierzu sei noch folgendes bemerkt. Wenn das Feld  $\mathfrak{F}$  so konstruiert ist, daß  $K$  aus zwei Ebenen  $P_1^{m-1}$  und  $P_2^{m-1}$  besteht, so ist von vornherein klar, daß der singuläre Zyklus die Gestalt  $\xi_1 P_1^{m-1} + \xi_2 P_2^{m-1}$  hat; denn es gibt, wie man sich leicht überlegt, in  $K$  keine anderen  $(m-1)$ -dimensionalen Zyklen als die von der angegebenen Gestalt; ebenso folgt aus der Tatsache, daß  $\mathfrak{F}'$  und  $\mathfrak{F}''$  je eine Ebene als Singularitätenkomplex besitzen, sofort, daß die singulären Zyklen von der Gestalt  $z_1 = \xi' P^{m-2}$ ,  $z_2 = \xi'' P^{m-1}$  sind. Zu beweisen wird nur sein, daß für die speziell konstruierten Felder  $\xi' = \xi_1$ ,  $\xi'' = \xi_2$  ist; und die Index-Betrachtungen, die zum Beweis dieser Gleichheiten nötig sind, können in der Umgebung beliebiger Punkte der betreffenden Ebenen vorgenommen werden, wobei man im Falle des Feldes  $\mathfrak{F}$  nur die Punkte der Schnittebene von  $P_1^{m-1}$  und  $P_2^{m-1}$  vermeiden muß.

6. Um den Gedankengang später nicht unterbrechen zu müssen, stellen wir hier, in Fortsetzung von Nr. 3, noch einige Eigenschaften der „Charakteristik“ zusammen.

Durch stetige Abänderung des in Nr. 3, (b), genannten Feldes konstanter Richtungen ergibt sich, bei Berücksichtigung von (a), die folgende Verallgemeinerung von (b):

(b') Die Gültigkeit von (b) bleibt erhalten, wenn von den Richtungen des neu hinzugefügten Feldes nicht vorausgesetzt wird, daß sie parallel sind, sondern nur, daß sie überall aus dem  $R^n$  herauszeigten.

Dies läßt sich noch weiter verallgemeinern:

(f) Auf der Sphäre  $S^{n-m}$  des  $R^n$ , der im  $R^{n+1}$  liegt, seien  $m+1$  Richtungsfelder  $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_m$  des  $R^{n+1}$  gegeben, die ein  $(m+1)$ -Feld  $\mathfrak{B}$  bilden; die Richtungen von  $\mathfrak{B}_0$  sollen überall aus  $R^n$  herauszeigten, während über die  $\mathfrak{B}_i$  mit  $i > 0$  nichts Derartiges vorausgesetzt wird; projiziert man  $\mathfrak{B}_i$ ,  $i > 0$ , von  $\mathfrak{B}_0$  aus auf  $R^n$ , so entsteht ein Richtungsfeld  $\mathfrak{B}'_i$  des  $R^n$ ; die Felder  $\mathfrak{B}'_1, \dots, \mathfrak{B}'_m$  bilden ein  $m$ -Feld  $\mathfrak{B}'$  des  $R^n$  auf  $S^{n-m}$ . Behauptung:  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}'$  haben die gleiche Charakteristik.

Dabei ist unter „Projektion einer Richtung  $v_i$  von der Richtung  $v_0$  aus auf den  $R^n$ “ diejenige Richtung des  $R^n$  zu verstehen, die in der 2-dimensionalen Halbebene liegt, welche von der, durch  $v_0$  bestimmten (unorientierten) Geraden und der Richtung  $v_i$  aufgespannt wird; sie ist immer definiert, wenn  $v_0$  und  $v_i$  unabhängig sind und nicht beide in  $R^n$  liegen. Der Beweis von (f) erfolgt, indem man die Felder  $\mathfrak{B}_i$ ,  $i > 0$ , stetig in die Felder  $\mathfrak{B}'_i$  überführt und dann den Satz (b') anwendet; daß diese Überführung möglich ist, ohne daß jemals eine lineare Abhängigkeit eintritt, ist leicht zu sehen.

Etwas weniger naheliegend ist die nächste und letzte Eigenschaft der Charakteristik, die wir benötigen; sie kann als Verallgemeinerung der folgenden Eigenschaft ( $g_0$ ) des Abbildungsgrades angesehen werden:

( $g_0$ ) Die Sphäre  $S^r$  wurde durch ihre Äquatorsphäre  $S^{r-1}$  in die Halbkugeln  $A$  und  $B$  zerlegt; ebenso die Sphäre  $S'_1$  durch  $S'^{-1}_1$  in  $A_1$  und  $B_1$ ; wird dann  $S^r$  so in  $S'_1$  abgebildet, daß  $S^{r-1}$  in  $S'^{-1}_1$ ,  $A$  in  $A_1$ ,  $B$  in  $B_1$  abgebildet wird, so hat die Abbildung von  $S^r$  in  $S'_1$  denselben Grad wie die Abbildung von  $S^{r-1}$  in  $S'^{-1}_1$ .

Der Beweis ergibt sich aus den Grundeigenschaften des Abbildungsgrades und darf hier wohl übergegangen werden. Wir behaupten, daß die Charakteristik eines  $(m+1)$ -Feldes die folgende Eigenschaft ( $g$ ) besitzt, welche im Falle  $m=0$  offenbar mit ( $g_0$ ) äquivalent ist:

( $g$ ) Die Sphäre  $S^{n-m}$  des  $R^{n+1}$  werde durch die Äquatorsphäre  $S^{n-m-1}$  in die Hälften  $A$  und  $B$  zerlegt;  $S^{n-m-1}$  liege in der Ebene  $R^n$  (ob die ganze  $S^{n-m}$  in  $R^n$  liegt, ist gleichgültig); auf  $S^{n-m}$  sei ein Richtungsfeld  $\mathfrak{B}_m$  gegeben, dessen Richtungen auf  $S^{n-m-1}$  in  $R^n$  liegen, auf  $A$  nach der einen, auf  $B$  nach der anderen Seite von  $R^n$  weg weisen; ferner seien in der abgeschlossenen Vollkugel  $V^{n-m+1}$ , die von  $S^{n-m}$  begrenzt wird,  $m$  Felder  $\mathfrak{B}_0, \dots, \mathfrak{B}_{m-1}$  von Richtungen gegeben, die parallel zu  $R^n$  und überall linear unabhängig sind; die Felder  $\mathfrak{B}_0, \dots, \mathfrak{B}_{m-1}, \mathfrak{B}_m$  sollen auf  $S^{n-m}$  überall linear unabhängig sein; sie bilden also auf  $S^{n-m}$  ein  $(m+1)$ -Feld  $\mathfrak{B}$  des  $R^{n+1}$  und auf  $S^{n-m-1}$  ein  $(m+1)$ -Feld  $\mathfrak{B}''$  des  $R^n$ . Behauptung: Die Charakteristik von  $\mathfrak{B}$  auf  $S^{n-m}$  ist gleich der Charakteristik von  $\mathfrak{B}''$  auf  $S^{n-m-1}$ .

Der Beweis wird folgendermaßen erbracht werden: durch eine stetige Abänderung, bei welcher sich nach ( $a$ ) die beiden zu untersuchenden Charakteristiken nicht ändern, werden die gegebenen Felder in eine solche Lage gebracht, daß man die Charakteristiken nach ( $d$ ) als Abbildungsgrade deuten kann, und diese Grade werden auf Grund von ( $g_0$ ) einander gleich sein.

Durchführung des Beweises: Wir benutzen den folgenden Satz von *T. Wazewski*: „In der Vollkugel  $V$  (beliebiger Dimension) seien stetige Funktionen

$$v_{\mu\nu}, \quad [\mu = 1, \dots, m; \quad \nu = 1, \dots, n; \quad m < n]$$

so gegeben, daß die Matrix  $(v_{\mu\nu})$  durchweg den Rang  $m$  hat; dann kann man diese Matrix durch Hinzufügung von  $n-m$  weiteren Zeilen, deren Elemente ebenfalls stetige Funktionen in  $V$  sind, zu einer quadratischen  $n$ -reihigen Matrix ergänzen, deren Determinante nirgends verschwindet<sup>8)</sup>.

<sup>8)</sup> *T. Wazewski*, Sur les matrices dont les éléments sont des fonctions continues. Compos. Math. 2 (1935), 63—68.

Auf Grund dieses Satzes lassen sich in unserer Vollkugel  $V^{n-m+1}$  Felder  $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_{n-m}$  von Richtungen, die parallel zu  $R^n$  sind, so anbringen, daß  $\mathfrak{B}_0, \dots, \mathfrak{B}_{m-1}, \mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_{n-m}$  in jedem Punkt von  $V^{n-m+1}$  linear unabhängig sind.

Wir führen nun in  $V^{n-m+1}$  „Polarkoordinaten“  $(\varphi, r)$  ein: mit  $\varphi$  bezeichnen wir den variablen Punkt auf  $S^{n-m}$ , mit  $r$  den Abstand vom Mittelpunkt  $q$  von  $V^{n-m+1}$ . Dem Punkt, der auf dem Strahl  $\overrightarrow{q\varphi}$  im Abstand  $r$  von  $q$  liegt, ordnen wir die Koordinaten  $(\varphi, r)$  zu; den Radius von  $V^{n-m+1}$  nehmen wir gleich 1 an; der Punkt  $\varphi$  hat also die Koordinaten  $(\varphi, 1)$  und der Punkt  $q$  die Koordinaten  $(\varphi, 0)$  mit unbestimmtem  $\varphi$ . Die Richtungen der Felder  $\mathfrak{B}_i$  und  $\mathfrak{B}_j$  denken wir uns durch Vektoren  $\mathfrak{v}_i(\varphi, r)$ ,  $\mathfrak{w}_j(\varphi, r)$ , bzw., wenn  $r = 1$  ist, durch  $\mathfrak{v}_i(\varphi)$ ,  $\mathfrak{w}_j(\varphi)$  gegeben. Mit  $\mathbf{e}$  bezeichnen wir einen festen Vektor, der senkrecht auf  $R^n$  steht. Dann lassen sich die Vektoren  $\mathfrak{v}_m$  auf  $S^{n-m}$  in der Gestalt

$$\mathfrak{v}_m(\varphi) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i(\varphi) \mathfrak{v}_i(\varphi) + \sum_{j=1}^{n-m} b_j(\varphi) \mathfrak{w}_j(\varphi) + c(\varphi) \mathbf{e}$$

darstellen. Der Koeffizient  $c(\varphi)$  ist auf der einen der Halbkugeln  $A, B$  positiv, auf der anderen negativ und auf  $S^{n-m-1}$  gleich 0; da  $\mathfrak{v}_0, \dots, \mathfrak{v}_{m-1}, \mathfrak{v}_m$  überall linear unabhängig sind, ist für jeden Punkt  $\varphi$  von  $S^{n-m-1}$  wenigstens einer der Koeffizienten  $b_j(\varphi)$  von 0 verschieden.

Wir definieren nun  $\mathfrak{v}_m(\varphi, r)$  für  $0 \leq r \leq 1$  durch

$$\mathfrak{v}_m(\varphi, r) = r \sum a_i(\varphi) \mathfrak{v}_i(\varphi) + \sum b_j(\varphi) \mathfrak{w}_j(\varphi, r) + c(\varphi) \mathbf{e}$$

und betrachten die Vektoren

$$\mathfrak{v}_0(\varphi, r), \dots, \mathfrak{v}_{m-1}(\varphi, r), \mathfrak{v}_m(\varphi, r)$$

auf  $S^{n-m}$  in Abhängigkeit von dem Parameter  $r$ , der von 1 bis 0 läuft. Wir behaupten: diese  $m + 1$  Vektoren sind stets linear unabhängig; in der Tat: die  $\mathfrak{v}_i$  mit  $i = 0, \dots, m - 1$  sind nach Voraussetzung unabhängig, und daß  $\mathfrak{v}_m(\varphi, r)$  nie von  $\mathfrak{v}_0(\varphi, r), \dots, \mathfrak{v}_{m-1}(\varphi, r)$  abhängig ist, folgt, wenn  $\varphi$  auf  $S^{n-m-1}$  liegt, daraus, daß dann wenigstens ein  $b_j \neq 0$  ist, und wenn  $\varphi$  nicht auf  $S^{n-m-1}$  liegt, aus  $c \neq 0$ . Die Vektoren  $\mathfrak{v}_0, \dots, \mathfrak{v}_m$  bilden also für jeden Wert von  $r$  mit  $1 \geq r \geq 0$  auf  $S^{n-m}$  ein  $(m + 1)$ -Feld  $\mathfrak{B}(r)$  des  $R^{n+1}$ ; sie bilden aber auch für alle diese  $r$  auf  $S^{n-m-1}$  ein  $(m + 1)$ -Feld  $\mathfrak{B}''(r)$  des  $R^n$ , da  $\mathfrak{v}_m$ , wenn  $\varphi$  auf  $S^{n-m-1}$  liegt, infolge  $c(\varphi) = 0$  immer ein Vektor des  $R^n$  ist. Auf Grund der Eigenschaft (a) aus Nr. 3 ändern sich die Charakteristiken der Felder  $\mathfrak{B}(r)$  und  $\mathfrak{B}''(r)$  nicht, während  $r$  von 1 bis 0 läuft. Für  $r = 1$  handelt es sich um die vorgelegten Felder  $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}''$ ; für  $r = 0$  haben wir die Vektoren

$$v_i(\varphi, 0) = v_i(q), \quad i = 0, \dots, m-1,$$

$$v_m(\varphi, 0) = \sum b_j(\varphi) w_j(q) + c(\varphi) e,$$

wobei  $q$  wieder den Mittelpunkt von  $V^{n-m+1}$  bezeichnet. Für jedes  $i < m$  bilden die  $v_i(\varphi, 0)$  ein konstantes Richtungsfeld; die Vektoren  $v_m(\varphi, 0)$  sind der Ebene  $R^{n-m+1}$  parallel, welche von  $w_1(q), \dots, w_{n-m}(q), e$  aufgespannt wird; liegt  $\varphi$  auf  $S^{n-m-1}$ , so sind die  $v_m(\varphi, 0)$  der, in  $R^{n-m+1}$  gelegenen, Ebene  $R^{n-m}$  parallel, die von den  $w_j(q)$  aufgespannt wird. Aus Nr. 3, (d), folgt daher: die Charakteristiken  $\alpha$  und  $\alpha''$  von  $\mathfrak{B}(0)$  und  $\mathfrak{B}''(0)$  sind gleich den Graden derjenigen Abbildungen von  $S^{n-m}$  bzw.  $S^{n-m-1}$  auf die Richtungskugeln  $S_1^{n-m}$  bzw.  $S_1^{n-m-1}$  der Räume  $R^{n-m+1}$  bzw.  $R^{n-m}$ , welche durch die Vektoren  $v_m(\varphi, 0)$  vermittelt werden. Diese beiden Abbildungen erfüllen aber, infolge des Verhaltens des Vorzeichens von  $c(\varphi)$ , die Voraussetzungen des Satzes (g<sub>0</sub>); folglich ist  $\alpha = \alpha''$ , was zu beweisen war.

7. Wie in Nr. 5 angedeutet wurde, werden wir im projektiven Raum  $P^n$  spezielle Richtungsfelder zu konstruieren haben. Für die Durchführung dieser Konstruktionen ist es bequem, im euklidischen Raum  $R^{n+1}$  statt im  $P^n$  zu arbeiten. Die Beziehung zwischen  $R^{n+1}$  und  $P^n$  besteht ja darin, daß man die Geraden durch den Nullpunkt  $o$  des  $R^{n+1}$  als die Punkte des  $P^n$  deuten kann. Daraus ergibt sich: Ist  $x$  ein von  $o$  verschiedener Punkt des  $R^{n+1}$  und sind in ihm  $m$  Vektoren  $v_1, \dots, v_m$  angebracht, welche zusammen mit dem Ortsvektor  $v_0 = \overrightarrow{o x}$  ein linear unabhängiges System von  $m+1$  Vektoren bilden, so entsprechen den  $v_1, \dots, v_m$  im  $P^n$   $m$  linear unabhängige Richtungen  $r_1, \dots, r_m$ , die in dem Punkt  $x'$  angebracht sind, welcher  $x$  entspricht; sind dagegen  $v_0, v_1, \dots, v_m$  linear abhängig, so sind auch  $r_1, \dots, r_m$  linear abhängig, oder diese Richtungen sind gar nicht definiert; ferner ist klar: dem Vektor  $v$ , der im Punkt  $x$  mit den Koordinaten  $x_0, x_1, \dots, x_n$  angebracht ist, entspricht im  $P^n$  dieselbe Richtung wie, bei beliebigem  $\lambda \geq 0$ , dem Vektor  $\lambda v$ , der im Punkt mit den Koordinaten  $\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n$  angebracht ist. Solche Überlegungen legen es nahe, den folgenden Begriff einzuführen: Ein „projektives  $(m+1)$ -Feld von Vektoren des  $R^{n+1}$ “ ist ein System von  $m+1$  Feldern von Vektoren  $v_0, v_1, \dots, v_m$  des  $R^{n+1}$ , wobei  $v_0$  immer den Ortsvektor  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  bezeichnet und die übrigen  $v_i$  im ganzen  $R^{n+1}$  stetige und homogene Funktionen ersten Grades der Koordinaten  $x_0, x_1, \dots, x_n$  sind — (also für jedes  $\lambda$  die Gleichungen  $v_i(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda v_i(x_0, x_1, \dots, x_n)$  erfüllen). Dann ist aus dem Vorstehenden ersichtlich: Jedem projektiven  $(m+1)$ -Feld  $\mathfrak{B}$  von Vektoren des  $R^{n+1}$

entspricht ein  $m$ -Feld  $\mathfrak{F}$  von Richtungen im  $P^n$ ; der Singularitätenmenge von  $\mathfrak{B}$ , d. h. der Menge der (von  $o$  verschiedenen) Punkte des  $R^{n+1}$ , in welchen die Vektoren von  $\mathfrak{B}$  linear abhängig sind, entspricht die Singularitätenmenge von  $\mathfrak{F}$ .

Nehmen wir jetzt an, daß das Feld  $\mathfrak{F}$  einen Singularitätenkomplex besitzt, der eine Ebene  $P^{m-1}$  enthält, zu welcher ein bestimmter Index  $\xi$  gehört — wie es bei der in Nr. 5 geschilderten Situation der Fall ist.  $P^{m-1}$  ist das Bild einer Ebene  $R^m$  des  $R^{n+1}$ , die in dem Singularitätenkomplex von  $\mathfrak{B}$  enthalten ist, und zu der der Index  $\alpha$  gehören möge. Wir behaupten, daß  $\xi = \alpha$  ist.

Um dies zu beweisen, nehmen wir einen vom Nullpunkt verschiedenen Punkt  $x = (x_0, \dots, x_n)$  von  $R^m$ ; wir dürfen annehmen, daß  $x_n \neq 0$  ist; die Ebene  $x_n = \text{const.}$ , in welcher  $x$  liegt, heiße  $R^n$ ; die cartesischen Koordinaten  $x_0, \dots, x_{n-1}$  in der Ebene  $R^n$  können wir gleichzeitig als lokale cartesische Koordinaten in der Umgebung des Punktes  $x'$  von  $P^n$  auffassen, welcher dem Punkt  $x$  entspricht. Dann wird das  $m$ -Feld  $\mathfrak{F}$  in der Umgebung von  $x'$  im  $R^n$  dargestellt durch diejenigen Vektoren  $\mathfrak{v}'_1, \dots, \mathfrak{v}'_m$ , welche entstehen, wenn man die  $\mathfrak{v}_1, \dots, \mathfrak{v}_m$ , „von  $\mathfrak{v}_0$  aus auf  $R^n$  projiziert“ (man vergleiche zu dieser Ausdrucksweise Nr. 6, (f)). Es sei nun  $S^{n-m}$  eine kleine Sphäre im  $R^n$  mit dem Mittelpunkt  $x$ ; dann ist der Index  $\xi$  gemäß seiner Definition die Charakteristik des aus den Vektoren  $\mathfrak{v}'_1, \dots, \mathfrak{v}'_m$  bestehenden  $m$ -Feldes des  $R^n$  auf  $S^{n-m}$ . Andererseits ist der Index  $\alpha$  gemäß seiner Definition die Charakteristik des aus  $\mathfrak{v}_0, \mathfrak{v}_1, \dots, \mathfrak{v}_m$  bestehenden  $(m+1)$ -Feldes des  $R^{n+1}$  auf  $S^{n-m}$ . Die behauptete Gleichheit  $\alpha = \xi$  besteht daher auf Grund von Nr. 6, (f).

Damit ist nicht nur die Konstruktion von  $m$ -Feldern, sondern es sind auch die notwendigen Index-Betrachtungen vom  $P^n$  in den  $R^{n+1}$  verlegt, und das in Nr. 5 formulierte Programm läßt sich jetzt folgendermaßen aussprechen:

Es sei  $1 < m < n$  bei beliebigem  $n > 2$ . Es wird ein spezielles projektives  $(m+1)$ -Feld  $\mathfrak{B}$  von Vektoren des  $R^{n+1}$  angegeben werden, dessen Singularitätenmenge aus zwei Ebenen  $R_1^m$  und  $R_2^m$  besteht, zu welchen die Indizes  $\xi_1$  bzw.  $\xi_2$  gehören mögen; ferner wird im  $R^n$  erstens ein projektives  $m$ -Feld  $\mathfrak{B}'$  angegeben werden, das auf einer Ebene  $R^{m-1}$  singulär wird, und zweitens ein projektives  $(m+1)$ -Feld  $\mathfrak{B}''$ , das auf einer Ebene  $R^m$  singulär wird; die zu  $R^{m-1}$  und  $R^m$  gehörigen Indizes seien  $\xi'$  bzw.  $\xi''$ ; dann wird gezeigt werden, daß  $\xi' = \xi_1$  und  $\xi'' = \xi_2$  ist.

**8.** Dieses Programm führen wir jetzt durch und bedienen uns der soeben benutzten Bezeichnungen; wir bezeichnen auch wie bisher die

Koordinaten im  $R^{n+1}$  mit  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ; die Grundvektoren dieses Koordinatensystems mögen  $e_0, e_1, \dots, e_n$  heißen.

Wir definieren das  $(m+1)$ -Feld  $\mathfrak{V} = \{\mathfrak{v}_0, \mathfrak{v}_1, \dots, \mathfrak{v}_m\}$  folgendermaßen:

$$\mathbf{v}_0 = \sum_{\nu=0}^n x_\nu \mathbf{e}_\nu \quad ; \quad \mathbf{v}_i = \sum_{\nu=0}^{n-m} x_\nu \mathbf{e}_{\nu+i} \quad , \quad i = 1, \dots, m-1 \quad ;$$

$$v_m = \sum_{\nu=0}^{n-m-1} x_\nu e_{\nu+m} + x_{n-1} e_n .$$

Es ist also:

Wir bestimmen die singulären Punkte  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  von  $\mathfrak{B}$ , also diejenigen Punkte, in denen die  $m+1$  Vektoren linear abhängig sind; sie sind dadurch charakterisiert, daß alle  $(m+1)$ -reihigen Unterdeterminanten der obigen Komponenten-Matrix der  $v_i$  verschwinden. Die Determinante aus den  $m+1$  ersten Spalten hat den Wert  $x_0^{m+1}$ ; folglich ist  $x_0 = 0$ ; die Determinante aus der 2., 3.,  $\dots$ ,  $(m+2)$ -ten Spalte hat, auf Grund von  $x_0 = 0$ , den Wert  $x_1^{m+1}$ ; folglich ist  $x_1 = 0$ ; so schließt man weiter bis zur Determinante aus der  $(n-m)$ -ten,  $\dots$ ,  $n$ -ten Spalte, deren Verschwinden die Gleichung  $x_{n-m-1} = 0$  liefert; dann hat die Determinante aus der  $(n-m+1)$ -ten,  $\dots$ ,  $(n+1)$ -ten Spalte den Wert  $x_{n-m}^m \cdot x_{n-1}$ , und da sie verschwindet, ist entweder  $x_{n-m} = 0$  oder  $x_{n-1} = 0$ . Somit liegt der singuläre Punkt auf einer der folgenden beiden Ebenen  $R_1^m$ ,  $R_2^m$ :

$$R_1^m : \quad x_0 = x_1 = \cdots = x_{n-m-1} = 0, \quad x_{n-m} = 0;$$

$$R_2^m : \quad x_0 = x_1 = \cdots = x_{n-m-1} = 0, \quad x_{n-1} = 0.$$

Jeder Punkt dieser Ebenen ist aber auch wirklich singulär, denn auf  $R_1^m$  verschwindet  $v_{m-1}$ , auf  $R_2^m$  verschwindet  $v_m$ .

Der Raum  $R^n$  sei die durch  $x_n = 0$  gegebene Ebene des  $R^{n+1}$ . Die Vektoren  $v_0, v_1, \dots, v_{m-1}$  des Feldes  $\mathfrak{B}$ , welche in Punkten von  $R^n$  angebracht sind, liegen in  $R^n$ ; das System dieser  $m$  Vektoren sei  $\mathfrak{B}'$ . Aus derselben Determinanten-Betrachtung wie soeben erkennt man, daß das projektive  $m$ -Feld  $\mathfrak{B}'$  nur auf der folgenden Ebene des  $R^n$  singulär wird:

$$R^{m-1} : x_0 = x_1 = \cdots = x_{n-m} = 0 ,$$

(also auf dem Schnitt von  $R^n$  und  $R_1^m$ ).

Für jeden Punkt  $x$  von  $R^n$  verstehen wir unter  $\bar{v}_m$  die Projektion des in  $x$  angebrachten Vektors  $v_m$  auf  $R^n$ , also

$$\bar{v}_m = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{n-m-1} \ 0) .$$

$\mathfrak{V}''$  sei nun das Feld der in den Punkten von  $R^n$  angebrachten Vektoren  $v_0, v_1, \dots, v_{m-1}, \bar{v}_m$ . Wieder dieselbe Determinanten-Betrachtung wie oben zeigt:  $\mathfrak{V}''$  wird singulär nur auf der Ebene

$$R^m : x_0 = x_1 = \cdots = x_{n-m-1} = 0 .$$

Für die Untersuchung der Indizes  $\xi_1$  und  $\xi'$  fassen wir die Umgebung des folgenden Punktes  $o_1$  ins Auge:

$$o_1 : x_{n-1} = 1 , \quad x_j = 0 \quad \text{für } j \neq n-1 ;$$

er liegt auf  $R_1^m$ , aber nicht auf  $R_2^m$ ; die in ihm auf  $R_1^m$  senkrecht stehende  $(n+1-m)$ -dimensionale Ebene, also die Ebene

$$E_1^{n+1-m} : x_{n-1} = 1 , \quad x_j = 0 \quad \text{für } n-m < j < n-1 \quad \text{und für } j = n ,$$

ist fremd zu  $R_2^m$  und hat mit  $R_1^m$  nur den Punkt  $o_1$  gemeinsam; die Charakteristik des Feldes  $\mathfrak{V}$  auf einer in  $E_1^{n+1-m}$  gelegenen Sphäre mit dem Mittelpunkt  $o_1$ ,

$$S_1^{n-m} : x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_{n-m}^2 = r^2 , \quad r > 0 ,$$

ist daher gleich dem Index  $\xi_1$ .

Die Ebene  $E_1^{n+1-m}$  liegt in  $R^n$ ; sie steht senkrecht auf  $R^{m-1}$  und hat daher mit  $R^{m-1}$  nur den Punkt  $o_1$  gemeinsam; daher ist die Charakteristik des Feldes  $\mathfrak{V}'$  auf der Sphäre  $S_1^{n-m}$  gleich dem Index  $\xi'$ .

Den Feldern  $\mathfrak{V}$  und  $\mathfrak{V}'$  sind auf  $S_1^{n-m}$  die Vektoren  $v_0, v_1, \dots, v_{m-1}$  gemeinsam, und diese liegen in dem Raum  $R^n$ ; das Feld  $\mathfrak{V}$  entsteht aus  $\mathfrak{V}'$  durch Hinzufügung des Vektors  $v_m$ , der infolge der Bedingung  $x_{n-1} = 1$  überall aus dem Raum  $R^n$  herauszeigt; aus Nr. 6, (b'), folgt daher die Gleichheit der Charakteristiken von  $\mathfrak{V}$  und  $\mathfrak{V}'$  auf  $S_1^{n-m}$ . Damit ist  $\xi_1 = \xi'$  bewiesen.

Um  $\xi_2$  und  $\xi''$  zu untersuchen, betrachten wir die Umgebung des Punktes

$$o_2 : x_{n-m} = 1 , \quad x_j = 0 \quad \text{für } j \neq n-m ;$$

er liegt auf  $R_2^m$ , aber nicht auf  $R_1^m$ ; die in ihm auf  $R_2^m$  senkrecht stehende  $(n+1-m)$ -dimensionale Ebene, also die Ebene

$$E_2^{n+1-m} : x_{n-m} = 1, \quad x_j = 0 \text{ für } n-m < j < n-1 \text{ und für } j = n,$$

ist fremd zu  $R_1^m$  und hat mit  $R_2^m$  nur den Punkt  $o_2$  gemeinsam; die Charakteristik des Feldes  $\mathfrak{B}$  auf einer in  $E_2^{n+1-m}$  gelegenen Sphäre mit dem Mittelpunkt  $o_2$ ,

$$S_2^{n-m} : x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_{n-m-1}^2 + x_{n-1}^2 = r^2, \quad r > 0,$$

ist daher gleich dem Index  $\xi_2$ .

Fügen wir zu den Gleichungen der Ebene  $E_2^{n+1-m}$  noch die Gleichung  $x_{n-1} = 0$  hinzu, so erhalten wir die in  $E_2^{n+1-m}$  gelegene Ebene

$$E^{n-m} : x_{n-m} = 1, \quad x_j = 0 \quad \text{für } j > n-m;$$

das ist die im Punkte  $o_2$  auf  $R^m$  senkrecht stehende  $(n-m)$ -dimensionale Teilebene des  $R^n$ . Der Index  $\xi''$  ist daher gleich der Charakteristik des Feldes  $\mathfrak{B}''$  auf einer Sphäre  $S^{n-m-1}$ , die in  $E^{n-m}$  liegt und  $o_2$  zum Mittelpunkt hat; als diese Sphäre wählen wir die Äquatorsphäre von  $S_2^{n-m}$ , die durch  $x_{n-1} = 0$  bestimmt ist.

Auf  $S^{n-m-1}$  sind  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{B}''$  miteinander identisch. Wir behaupten, daß sich der Satz (g) aus Nr. 6 anwenden läßt; in der Tat:  $S^{n-m-1}$  liegt in  $R^n$  (sogar  $S_2^{n-m}$  liegt in  $R^n$ ); da die  $n$  ersten Grundvektoren  $e_0, e_1, \dots, e_{n-1}$  des  $R^{n+1}$  parallel zu  $R^n$  sind, da ferner die  $(n+1)$ -te Komponente des Vektors  $v_m$  gleich  $x_{n-1}$  ist, und da die beiden Halbkugeln  $A$  und  $B$ , in die  $S_2^{n-m}$  durch  $S^{n-m-1}$  zerlegt wird, durch die Ungleichungen  $x_{n-1} \geq 0$  und  $x_{n-1} \leq 0$  charakterisiert sind, weisen die Vektoren  $v_m$  auf  $A$  nach der einen, auf  $B$  nach der anderen Seite von  $R^n$  weg, während sie auf  $S^{n-m-1}$  selbst in  $R^n$  liegen; die Vektoren  $v_0, v_1, \dots, v_{m-1}$  liegen auf  $E_2^{n+1-m}$  immer in  $R^n$ ; sie sind linear abhängig nur auf der Ebene  $R^{m-1}$ , und da diese fremd zu  $E_2^{n+1-m}$  ist, sind sie in der von  $S_2^{n-m}$  begrenzten, in  $E_2^{n+1-m}$  gelegenen Vollkugel linear unabhängig; somit sind alle Voraussetzungen des Satzes (g) erfüllt, und folglich ist  $\xi_2 = \xi''$ .

Damit ist alles bewiesen.

9. Wir ziehen jetzt eine algebraische Folgerung aus dem Satz B (Nr. 1). Es seien  $A_1, \dots, A_s$  reelle Matrizen mit je  $n$  Zeilen und  $r$  Spalten; sie spannen eine lineare Schar von Matrizen

$$A(y_1, \dots, y_s) = y_1 A_1 + \cdots + y_s A_s$$

auf; die Matrix  $A(0, \dots, 0)$  ist die Nullmatrix; wir sagen, die Schar habe durchweg den Rang  $r$ , wenn alle Matrizen  $A(y_1, \dots, y_s)$  mit  $(y_1, \dots, y_s) \neq (0, \dots, 0)$  den Rang  $r$  haben.

*Satz E.* Für die Existenz einer linearen Schar, welche von  $s$  reellen Matrizen mit  $n$  Zeilen und  $r$  Spalten aufgespannt wird und durchweg den Rang  $r$  hat, ist die folgende Bedingung notwendig: alle Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{\mu}$  mit  $n - r < \mu < s$  sind gerade.

*Beweis.* Wir setzen voraus, daß die Matrizen  $A_1, \dots, A_s$  eine Schar der genannten Art aufspannen; wir werden zeigen, daß dann im projektiven Raum  $P^{n-1}$  ein  $(s - 1)$ -Feld existiert, in dessen Regularitätsbereich eine Ebene  $P^{r-1}$  liegt; dann wird auf Grund des Satzes *B* der Satz *E* bewiesen sein.

Ist  $Q$  irgend eine quadratische  $n$ -reihige nicht-singuläre Matrix, so erfüllen auch die Matrizen  $QA_1, \dots, QA_s$  die Voraussetzung; da  $A_1 = A(1, 0, \dots, 0)$  den Rang  $r$  hat, kann man  $Q$  offenbar so wählen, daß  $QA_1 = (\delta_{\nu\varrho})$  wird, wobei  $\delta_{\varrho\varrho} = 1$  und  $\delta_{\nu\varrho} = 0$  für  $\nu \neq \varrho$  ist; indem wir statt  $QA_\sigma$  wieder  $A_\sigma$  schreiben, dürfen wir von vornherein annehmen, daß  $A_1 = (\delta_{\nu\varrho})$  ist. Es sei

$$A_\sigma = (a_{\nu\varrho\sigma}) ;$$

dann ist also  $a_{\nu\varrho 1} = \delta_{\nu\varrho}$  für  $\nu = 1, \dots, n$  und  $\varrho = 1, \dots, r$ . Daraus, daß unsere Matrizen den Rang  $r$  haben, folgt übrigens  $r < n$ .

Wir setzen

$$\sum_{\varrho=1}^r a_{\nu\varrho\sigma} x_\varrho = v_{\sigma\nu}(x_1, \dots, x_r)$$

und betrachten die, von den Parametern  $x_1, \dots, x_r$  abhängigen Vektoren

$$v_\sigma = (v_{\sigma 1}, \dots, v_{\sigma n}) , \quad \sigma = 1, \dots, s ,$$

im Raume  $R^n$ ; dann ist speziell  $v_1 = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$ . Wir behaupten, daß die Vektoren  $v_1, v_2, \dots, v_s$  nur für  $(x_1, \dots, x_r) = (0, \dots, 0)$  linear abhängig sind; in der Tat: es sei  $(y_1, \dots, y_s) \neq (0, \dots, 0)$  und  $\sum y_\sigma v_\sigma = 0$ ; diese Relation ist gleichbedeutend mit den Gleichungen

$$\sum_{\varrho, \sigma} a_{\nu\varrho\sigma} x_\varrho y_\sigma = 0 , \quad \nu = 1, \dots, n ,$$

$$[\varrho = 1, \dots, r ; \quad \sigma = 1, \dots, s] ,$$

die wir auch so schreiben können:

$$\sum_\varrho x_\varrho \left( \sum_\sigma y_\sigma a_{\nu\varrho\sigma} \right) = 0 , \quad \nu = 1, \dots, n ;$$

da aber die Kolonnen der Matrix  $A(y_1, \dots, y_s)$  linear unabhängig sind, folgt hieraus  $(x_1, \dots, x_r) = (0, \dots, 0)$ .

Jetzt seien  $x_1, \dots, x_r, \dots, x_n$  Koordinaten im  $R^n$ . Der Ortsvektor  $v_0 = (x_1, \dots, x_n)$  zusammen mit den Vektoren  $v_1, \dots, v_s$  — ohne den Vektor  $v_1$  — bilden ein projektives  $s$ -Feld  $\mathfrak{B}$  im  $R^n$ ; (dabei hängen  $v_2, \dots, v_s$  nur von den ersten  $r$  Koordinaten ab). Die soeben festgestellte Unabhängigkeitseigenschaft der Vektoren  $v_1, v_2, \dots, v_s$  bedeutet: auf der Ebene  $R^r$ , die durch  $x_{r+1} = \dots = x_n = 0$  gegeben ist, besitzt das Feld  $\mathfrak{B}$  keine andere Singularität als den Nullpunkt  $o$ . Das  $(s-1)$ -Feld  $\mathfrak{F}$  im  $P^{r-1}$ , das dem Feld  $\mathfrak{B}$  entspricht, besitzt daher keine Singularität auf der Ebene  $P^{r-1}$ , welche  $R^r$  entspricht;  $P^{r-1}$  gehört also zum Regularitätsbereich von  $\mathfrak{F}$ . Damit ist die Behauptung bewiesen.

Besonderes Interesse verdient der Fall quadratischer Matrizen, also der Fall  $r = n$ ; dann lautet die Behauptung des Satzes  $E$ : alle  $\binom{n}{\mu}$  mit  $\mu = 1, 2, \dots, s-1$  sind gerade; auf Grund der Überlegung, die in Nr. 1 vom Satz  $B$  zum Satz  $A$  führte, können wir daher den folgenden Satz aussprechen<sup>9)</sup>:

*Es sei  $n = 2^\lambda \cdot u$ ,  $u$  ungerade, und es existiere eine lineare Schar von reellen quadratischen  $n$ -reihigen Matrizen*

$$A(y_1, \dots, y_s) = y_1 A_1 + \dots + y_s A_s,$$

*welche, abgesehen von  $A(0, \dots, 0)$ , sämtlich nicht-singulär sind; dann ist  $s \leq 2^\lambda$ .*

Insbesondere kann die Maximalzahl  $s = n$  höchstens dann erreicht werden, wenn  $n$  eine Potenz von 2 ist; derartige Scharen sind für  $n = 1, 2, 4, 8$ , aber nicht für größere  $n$  bekannt.

Schließlich sei noch eine andere Formulierung des Satzes  $E$  angegeben:

*Es existiere ein solches System von  $n$  reellen Bilinearformen*

$$f_\nu(x; y) = \sum_{\varrho, \sigma} a_{\nu \varrho \sigma} x_\varrho y_\sigma, \quad \nu = 1, \dots, n,$$

*in den Variablenreihen*

$$x = (x_1, \dots, x_r), \quad y = (y_1, \dots, y_s),$$

*daß das Gleichungssystem*

$$f_\nu(x; y) = 0, \quad \nu = 1, \dots, n,$$

---

<sup>9)</sup> Der Satz ist für  $\lambda = 0$  elementar, für  $\lambda = 1$  bewiesen in Diss., Satz 27, und für  $\lambda < 4$  angekündigt in meiner Note in den Verh. d. Schweiz. Naturforschenden Gesellschaft 1935, S. 277—278.

keine anderen Lösungen  $(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s)$  besitzt als die trivialen mit  $x = (0, \dots, 0)$  oder  $y = (0, \dots, 0)$ . Dann sind alle Binomialkoeffizienten  $\binom{n}{\mu}$  mit  $n - r < \mu < s$  gerade.

In der Tat ist, wie wir schon im Beweis des Satzes E feststellten, das soeben formulierte Verhalten der Formen  $f_\nu(x; y)$  gleichbedeutend damit, daß die Spalten jeder Matrix  $A(y_1, \dots, y_s)$  mit  $(y_1, \dots, y_s) \neq (0, \dots, 0)$  linear unabhängig sind, daß diese Matrizen also sämtlich den Rang  $r$  haben<sup>10)</sup>.

(Eingegangen den 7. Dezember 1940.)

---

<sup>10)</sup> Die Sätze aus Nr. 9 (sowie die Verallgemeinerungen, die entstehen, wenn man in der zweiten Formulierung des Satzes E die Linearformen durch ungerade stetige Funktionen ersetzt) sind auf einem anderen, aber ebenfalls topologischen Wege bewiesen und samt weiteren Anwendungen und Spezialisierungen ausführlich dargestellt in der nachstehenden Arbeit von *H. Hopf*, Ein topologischer Beitrag zur reellen Algebra. Herrn *F. Behrend*, dem Herr Hopf und ich diese Sätze mitgeteilt hatten, ist es gelungen, Beweise zu finden, die in präzisem Sinne „algebraisch“ sind: *F. Behrend*, Über Systeme reeller algebraischer Gleichungen. Compos. Math. 7 (1939), 1—19. — In der Arbeit von *H. Hopf* (Anhang I) findet man übrigens auch neue Beweise unserer Sätze A und B.