

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 13 (1940-1941)

Artikel: Über den Rang geschlossener Liescher Gruppen.
Autor: Hopf, Heinz
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-13555>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über den Rang geschlossener Liescher Gruppen

Von HEINZ HOPF, Zürich

*L. E. J. Brouwer
zum 60. Geburtstag*

1. Der „Rang“ λ einer geschlossenen Lieschen Gruppe G soll im folgenden so definiert sein: G enthält λ -dimensionale, aber nicht höher-dimensionale Abelsche Untergruppen. Diese Definition weicht zwar von der üblichen etwas ab, sie ist aber am Platze, wenn man will, daß der nachstehende Satz von E. Cartan für beliebige geschlossene Gruppen, nicht nur für halb-einfache, Gültigkeit habe:¹⁾

Die Summe der Bettischen Zahlen einer geschlossenen Gruppe vom Range λ ist gleich 2^λ .

Da der Rang bereits durch die Eigenschaften der Gruppe in der Umgebung des Eins-Elementes bestimmt ist, vermittelt der Satz eine der interessanten Beziehungen, die zwischen der lokalen und der globalen Struktur von G bestehen. Er ist von Cartan im Rahmen seiner Theorie der invarianten Integrale durch eine Rechnung bewiesen worden.

Wir werden im folgenden für den Rang eine Deutung innerhalb der Homologie-Theorie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten angeben, welche die Gültigkeit des Satzes in Evidenz setzt. Als Koeffizientenbereich für die Homologien soll der Körper der rationalen Zahlen — oder auch der Körper der reellen Zahlen — dienen; dann ist, wie ich gezeigt habe, der Homologie-Ring $\mathfrak{R}(G)$ einer geschlossenen Gruppe G dimensionstreu isomorph dem Homologie-Ring eines topologischen Produktes

$$S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_l, \quad l \geq 1,$$

wobei die S_i Sphären von ungeraden Dimensionen sind.²⁾ Es ist klar, daß die Summe der Bettischen Zahlen dieses Produktes, also auch die Summe der Bettischen Zahlen von G , gleich 2^l ist; daher ist der Cartansche Satz mit dem folgenden äquivalent:

Der Rang λ von G ist gleich der Anzahl l der Faktoren in dem Sphärenprodukt, dessen Ring dem Ring von G isomorph ist.

Dieser Satz enthält die Deutung des Ranges als Homologiegröße; er

¹⁾ (2), Nr. 56; (4), § VII, p. 24.—Die fetten Nummern in Klammern beziehen sich auf das Literatur-Verzeichnis am Ende der Arbeit.

²⁾ H. Hopf, Über die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und ihrer Verallgemeinerungen [Annals of Math. 42 (1941)].

wird im folgenden neu bewiesen werden, und zwar mit prinzipiell anderen Hilfsmitteln als denen, auf welchen der frühere Beweis des Cartanschen Satzes beruht.³⁾

2. Die zu beweisende Gleichheit zwischen der „lokal“ definierbaren Zahl λ und der „global“ definierten Zahl l wird mit Hilfe des Brouwerschen Abbildungsgrades zu Tage treten. Wir betrachten für eine ganze Zahl k die Abbildung

$$p_k(x) = x^k,$$

welche jedem Element von G seine k -te Potenz zuordnet; ihr Grad sei γ_k . Die Gleichheit $\lambda = l$ ist gesichert, sobald für eine Zahl $k > 1$ die beiden folgenden Sätze bewiesen sind:

*Satz I. Der Homologie-Ring der geschlossenen Gruppe G sei dem Ring des topologischen Produktes von l Sphären ungerader Dimensionen dimensions-
treu isomorph; dann ist $\gamma_k = k^l$.*

Satz II. Die geschlossene Gruppe G enthalte eine λ -dimensionale Abelsche Untergruppe, und es gebe keine höher-dimensionale Abelsche Untergruppe von G ; dann ist $\gamma_k = k^\lambda$.

Beide Sätze gelten für beliebige ganze Zahlen k .

3. Die Beweise der beiden Sätze werden ganz unabhängig voneinander sein; der Abbildungsgrad zeigt sich in ihnen von zwei verschiedenen Seiten: das eine Mal tritt er als eine der Größen auf, die zu dem Homologietypus einer Abbildung gehören, das andere Mal als Bedeckungszahl der Umgebungen einzelner Punkte. Mit diesen Andeutungen ist folgendes gemeint:⁴⁾

Eine Abbildung f einer Mannigfaltigkeit M in sich bewirkt eine Abbildung des Homologie-Ringes $\mathfrak{R}(M)$ in sich, die wir ebenfalls f nennen; sie ist ein additiver Homomorphismus. Die algebraischen Eigenschaften dieser Ring-Abbildung charakterisieren den Homologietypus der Abbildung f von M . Das Eins-Element des Ringes $\mathfrak{R}(M)$, das durch den orientierten Grundzyklus von M repräsentiert wird, bezeichnen wir selbst mit M ; dann ist der Grad γ von f durch die Gleichung

$$f(M) = \gamma M$$

gegeben. Dies ist die algebraische und globale Definition des Grades, die wir beim Beweise des Satzes I benutzen.

³⁾ Dadurch wird die in Fußnote 30 meiner Arbeit²⁾ gestellte Aufgabe gelöst.

⁴⁾ Alle im folgenden benutzten Eigenschaften des Abbildungsgrades findet man im Kap. XII der „Topologie I“ von *Alexandroff-Hopf* [Berlin 1935].

Dem Beweise des Satzes II dagegen liegt die anschauliche und lokale Bedeutung des Grades zugrunde. Die Abbildung f heiße im Punkte q „glatt“, wenn jeder Punkt p , der auf q abgebildet wird, eine Umgebung besitzt, in welcher f eineindeutig ist; ist f in q glatt, so besteht das Urbild $f^{-1}(q)$ nur aus endlich vielen Punkten, da in der Umgebung eines Häufungspunktes von Urbildpunkten von q die geforderte Eineindeutigkeit nicht bestehen könnte; eine Umgebung von q erleidet also eine endliche Anzahl schlichter Bedeckungen durch die Bildmenge; die Bedeckungszahl, d. h. die Anzahl der positiven Bedeckungen vermindert um die Anzahl der negativen Bedeckungen, ist der Grad von f . Er hängt nicht von dem Punkt q ab, es gilt also der folgende „Hauptsatz“ über den Abbildungsgrad: Ist die Abbildung f in zwei verschiedenen Punkten q_1 und q_2 glatt, so sind die Bedeckungszahlen in den beiden Punkten einander gleich; ist insbesondere die Bedeckungszahl in einem Punkt q_1 von 0 verschieden, so kann sie in keinem Punkt gleich 0 sein, es gibt also zu jedem Punkt q wenigstens einen Punkt p mit $f(p) = q$.

Die Glattheit in einem Punkte q ist speziell dann gesichert, wenn f stetig differenzierbar ist und die Funktionaldeterminante in keinem Urbildpunkt von q verschwindet; das Vorzeichen einer Bedeckung von q ist dasselbe wie das Vorzeichen der Funktionaldeterminante in dem betreffenden Urbildpunkt.

4. Der Satz I wird im § 1 bewiesen (für beliebige k). Die Untersuchung des Homologietypus der Abbildungen p_k geschieht mit Hilfe des Begriffes der „minimalen“ Elemente eines Homologieringes (Nr. 5) und unter Benutzung der Theorie des „Umkehrungs-Homomorphismus“ (Nr. 9).

Der § 2, der den Beweis des Satzes II enthält (für $k > 0$), kann ohne Kenntnis des § 1 gelesen werden; aus der Homologietheorie kommt in ihm nichts vor. Die Grundlage des Beweises ist die Tatsache, daß die Funktionaldeterminante einer Abbildung p_k bei positivem k nirgends negativ ist (Nr. 15). Zur Vermeidung von Komplikationen nehmen wir die geschlossene Gruppe G als analytisch an, was bekanntlich keine Einschränkung bedeutet. Aus der Theorie der kontinuierlichen Gruppen werden die folgenden beiden Sätze ohne Beweis benutzt: 1. Die Existenz eines kanonischen Koordinatensystems in der Umgebung des Eins-Elementes (Nr. 17). — 2. Die Tatsache, daß jede kompakte zusammenhängende Abelsche Untergruppe von G ein „Toroid“ ist, d. h. das direkte Produkt von endlich vielen Kreisdrehungsgruppen (Nr. 18). — Zwei weitere Sätze über geschlossene Liesche Gruppen, die auf dem Wege zum Satz II auftreten, werden wir nicht als bekannt voraussetzen, sondern

mit Hilfe des Abbildungsgrades neu beweisen: a) Jede geschlossene Gruppe wird von ihren infinitesimalen Transformationen erzeugt, d. h. sie wird von ihren einparametrischen Untergruppen vollständig überdeckt (Nr. 17). — b) Diejenigen Toroide in G , welche nicht in höherdimensionalen Toroiden enthalten sind, haben sämtlich die gleiche Dimension λ (Nr. 21).

Im § 3 werden, im Anschluß an den § 2, noch einige weitere Bemerkungen über die Abbildungen p_k gemacht; dabei treten die bekannten „singulären“ Gruppenelemente auf, und unser Rang $\lambda = l$ wird mittels der charakteristischen Polynome der zu G adjungierten linearen Gruppe ausgedrückt, wie es bei halb-einfachen Gruppen üblich ist (Nr. 26).

Ich möchte noch feststellen, daß Gespräche mit Herrn H. Samelson dazu beigetragen haben, die in dieser Arbeit behandelten Fragen zu klären.

§ 1.

5. Der Koeffizientenbereich für die Homologien soll immer der rationale Körper sein. Die Homologieklassen einer geschlossenen orientierbaren Mannigfaltigkeit M werden in der üblichen Weise durch Bettische Addition und Schnitt-Multiplikation zu dem Ring $\mathfrak{R}(M)$ vereinigt.

Ein homogen-dimensionales Element V von $\mathfrak{R}(M)$ heißt „minimal“, wenn es keine anderen Vielfachen in $\mathfrak{R}(M)$ besitzt als die durch Multiplikation mit rationalen Zahlen α entstehenden Vielfachen αV — welche die gleiche Dimension wie V haben — und als die 0-dimensionalen Elemente — welche infolge des Poincaré-Veblenschen Dualitätssatzes Vielfache jedes von 0 verschiedenen Elementes sind; die 0-dimensionalen Elemente selbst rechnen wir nicht zu den minimalen.⁵⁾

Es gilt der Invarianzsatz: Bei jeder stetigen Abbildung von M in eine Mannigfaltigkeit M' ist das Bild eines minimalen Elementes von $\mathfrak{R}(M)$ wieder ein minimales Element von $\mathfrak{R}(M')$.⁵⁾

6. In der Mannigfaltigkeit Γ sei eine stetige Multiplikation erklärt, d. h. jedem geordneten Punktpaar (p, q) von Γ sei ein Punkt $p \cdot q$ von Γ zugeordnet, der stetig von dem Paar (p, q) abhängt. Setzen wir

$$p \cdot q = L_p(q) = R_q(p) ,$$

so ist L_p eine stetige Abbildung von Γ in sich; da L_p stetig von p abhängt, ist die durch L_p bewirkte Abbildung des Ringes $\mathfrak{R}(\Gamma)$ in sich unabhängig von p ; wir nennen diese Ringabbildung L ; analog ist die Ringabbildung R erklärt.

⁵⁾ A. a. O.³⁾, Nr. 32—34.

Ist M irgend eine Mannigfaltigkeit⁶⁾, und sind f, g zwei Abbildungen von M in Γ , so wird durch

$$P_{f,g}(a) = f(a) \cdot g(a) ,$$

wobei a einen variablen Punkt von M bezeichnet und das Produkt auf der rechten Seite im Sinne der stetigen Multiplikation in Γ zu bilden ist, eine neue Abbildung von M in Γ erklärt; die durch $f, g, P_{f,g}$ bewirkten Ringabbildungen nennen wir ebenfalls $f, g, P_{f,g}$

Hilfssatz 1. Für jedes minimale Element V von $\mathfrak{R}(M)$ gilt

$$P_{f,g}(V) = Rf(V) + Lg(V) .$$

Beweis. Die stetige Multiplikation in Γ kann als Abbildung F des topologischen Produktes $\Gamma \times \Gamma$ in Γ aufgefaßt werden:

$$F(p \times q) = p \cdot q$$

für jedes Punktpaar (p, q) von Γ . Ist Z irgend ein Element von $\mathfrak{R}(\Gamma)$ und E das durch einen einfachen Punkt repräsentierte Element, so ist⁷⁾

$$F(E \times Z) = L(Z) , \quad F(Z \times E) = R(Z) . \quad (1)$$

Sind Π_1, Π_2 die Projektionen von $\Gamma \times \Gamma$ auf Γ , die durch

$$\Pi_1(p \times q) = p , \quad \Pi_2(p \times q) = q$$

gegeben sind, so ist⁷⁾

$$\Pi_1(Z \times E) = \Pi_2(E \times Z) = Z , \quad (2a)$$

$$\Pi_1(E \times Z) = \Pi_2(Z \times E) = 0 , \quad (2b)$$

wobei für (2b) vorausgesetzt ist, daß Z positive Dimension hat.

Die Abbildungen f und g von M in Γ bewirken eine Abbildung Q von M in $\Gamma \times \Gamma$:

$$Q(a) = f(a) \times g(a)$$

für jeden Punkt a von M ; es ist

$$P_{f,g} = FQ , \quad (3)$$

$$\Pi_1 Q = f , \quad \Pi_2 Q = g . \quad (4)$$

⁶⁾ Alle Mannigfaltigkeiten sollen geschlossen und orientierbar sein.

⁷⁾ Analog wie oben bezeichnen wir die durch die stetigen Abbildungen F, Π, \dots bewirkten Ring-Abbildungen selbst mit F, Π, \dots

Es sei nun V ein minimales Element von $\mathfrak{R}(M)$; nach dem Invarianz-
satz (Nr. 5) ist $Q(V)$ minimales Element von $\mathfrak{R}(\Gamma \times \Gamma)$; die minimalen
Elemente dieses Ringes sind aber, wie man aus den bekannten Homologie-
und Schnitt-Eigenschaften in Produkt-Mannigfaltigkeiten leicht be-
stätigt⁸⁾, die Elemente

$$(V' \times E) + (E \times V'') ,$$

wobei V', V'' minimale Elemente von $\mathfrak{R}(\Gamma)$ sind, die auch 0 sein können.
Es gibt also zwei solche Elemente V', V'' in $\mathfrak{R}(\Gamma)$, daß

$$Q(V) = (V' \times E) + (E \times V'') \quad (5)$$

ist. Aus (5), (4), (2a), (2b) folgt

$$V' = f(V) , \quad V'' = g(V) ,$$

also

$$Q(V) = (f(V) \times E) + (E \times g(V)) . \quad (6)$$

Aus (6), (3), (1) folgt

$$P_{f,g}(V) = Rf(V) + Lg(V) , \quad (7)$$

was zu beweisen war.

7. Wir nehmen jetzt an, daß die stetige Multiplikation in Γ ein Eins-
Element besitzt; es gebe also einen Punkt e , so daß für jeden Punkt p

$$e \cdot p = p \cdot e = p$$

ist. Dann ist L_e die identische Abbildung von Γ auf sich, und L die
identische Abbildung von $\mathfrak{R}(\Gamma)$ auf sich; das Gleiche gilt für R_e und R .
Die Gleichung (7) lautet daher

$$P_{f,g}(V) = f(V) + g(V) . \quad (8)$$

Wir betrachten in Γ die Potenzabbildungen

$$p_k(x) = x^k ;$$

für sie gilt

$$p_0(x) = e , \quad p_k(x) = x \cdot p_{k-1}(x) ; \quad (9)$$

falls in Γ die Gruppenaxiome erfüllt sind, sind diese Abbildungen von
vornherein für alle positiven und negativen k definiert; andernfalls sind
sie durch (9) wenigstens für alle positiven k definiert.

⁸⁾ Man vgl. Kap. V der „Topology“ von Lefschetz [New York 1930].

Hilfssatz 2. In Γ sei eine stetige Multiplikation mit Eins-Element erklärt; die Potenzabbildungen p_k seien in dem soeben besprochenen Sinne definiert. Dann ist für jedes minimale Element V von $\mathfrak{R}(\Gamma)$

$$p_k(V) = kV . \quad (10)$$

Beweis. Für $k = 0$ und $k = 1$ ist (10) offenbar richtig. Setzen wir $M = \Gamma, f = p_1, g = p_{k-1}$, so ist nach (9) $p_k = P_{f,g}$, und folglich nach (8)

$$p_k(V) = V + p_{k-1}(V) .$$

Hieraus folgt (10) für positive k durch Schluß von $k - 1$ auf k , für negative k durch Schluß von k auf $k - 1$.⁸⁾

8. Als weitere Vorbereitung für den Beweis des Satzes I stellen wir hier Eigenschaften des Ringes der Produkt-Mannigfaltigkeit

$$P = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_t$$

zusammen, wobei die S_i Sphären von ungeraden Dimensionen sind; die Beweise übergehen wir.⁸⁾

Die durch die Grundzyklen repräsentierten Elemente der Ringe $\mathfrak{R}(S_i)$ und $\mathfrak{R}(P)$, also die Eins-Elemente dieser Ringe, seien selbst mit S_i bzw. P , die durch einfache Punkte repräsentierten Elemente dieser Ringe seien mit E_i bzw. E bezeichnet.

In $\mathfrak{R}(P)$ besteht eine volle Homologiebasis, d. h. die Vereinigung von Homologiebasen aller Dimensionen, aus den 2^t Elementen

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_t , \quad (11)$$

wobei X_i entweder S_i oder E_i ist.

V_i sei dasjenige Element (11), in welchem $X_i = S_i$, $X_j = E$, für $j \neq i$ ist. V_1, \dots, V_t sind minimale Elemente, und zwar bilden sie eine Basis aller minimalen Elemente von $\mathfrak{R}(P)$: sie sind linear unabhängig, und jedes minimale Element ist eine lineare Verbindung von ihnen.

⁸⁾ Herr B. Eckmann hat mir gezeigt, daß der Hilfssatz 1 seine Gültigkeit behält, wenn man die in ihm behauptete Gleichung als Gleichung in einer Hurewiczschen Homotopiegruppe deutet und unter V eine Sphäre beliebiger Dimension versteht; sowie, daß der Hilfssatz 2 gültig bleibt, wenn man (10) als Gleichung in einer Hurewiczschen Gruppe deutet und unter V irgend ein Element dieser Gruppe versteht.

Z_j sei dasjenige Element (11), in welchem $X_i = \pm E_i$, $X_j = S_j$ für $j \neq i$ ist, wobei das Vorzeichen von E_i so gewählt ist, daß $Z_i \cdot V_i = + E$ ist. Das System aller Produkte

$$Z_{i_1} \cdot Z_{i_2} \cdots Z_{i_r}, \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_r, \quad (12)$$

zusammen mit dem Eins-Element P ist bis auf Vorzeichen identisch mit dem System der Elemente (11); es bildet also eine Basis in $\mathfrak{R}(P)$; bezeichnen wir die Produkte (12), in welchen $r > 1$ ist, mit Y_1, Y_2, \dots , so haben wir also eine Basis

$$P, Z_1, \dots, Z_l, Y_1, Y_2, \dots; \quad (13)$$

sie ist dual zu der Basis

$$E, V_1, \dots, V_l, W_1, W_2, \dots; \quad (14)$$

(auf den Bau der Elemente W_j kommt es im Augenblick nicht an); daß die Basis (13) zur Basis (14) dual ist, bedeutet: es ist

$$P \cdot E = Z_i \cdot V_i = Y_j \cdot W_j = E,$$

während für jedes andere Paar aus (13) und (14), in welchem die Dimensionszahlen der beiden Elemente sich zur Dimensionszahl von P ergänzen, das Produkt gleich 0 ist.

Folgende Produktregeln sind wichtig:

$$Z_1 \cdot Z_2 \cdot \dots \cdot Z_l = \pm E, \quad (15)$$

wobei es uns auf das Vorzeichen nicht ankommt; ferner

$$\cdot Z_i \cdot Z_i = 0, \quad (16)$$

$$Z_i \cdot Z_j = - Z_j \cdot Z_i \quad \text{für } i \neq j; \quad (17)$$

(die Voraussetzung, daß die Dimensionen der S_i ungerade sind, ist im vorstehenden nur für (17) gebraucht worden).

9. Wir erinnern jetzt an den „Umkehrungs-Homomorphismus“ der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten.¹⁰⁾ Es seien M, M' zwei Mannigfaltigkeiten; $\{U_i\}$ bzw. $\{U'_j\}$ seien volle Homologiebasen in ihren Ringen, und $\{X_i\}$ bzw. $\{X'_j\}$ seien die zu diesen Basen dualen Basen. Eine Abbildung f von M in M' bewirkt eine Abbildung von $\mathfrak{R}(M)$ in $\mathfrak{R}(M')$, die durch

$$f(U_i) = \sum \alpha_{ij} U'_j \quad (18)$$

¹⁰⁾ H. Hopf, Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten [Crelle's Journ. 168 (1930), 171—188], Satz I und Satz Ia.

gegeben sei; dann gilt der Satz: Die Abbildung φ von $\mathfrak{R}(M')$ in $\mathfrak{R}(M)$, die durch

$$\varphi(X'_j) = \sum \alpha_{ij} X_i \quad (19)$$

gegeben ist, ist nicht nur ein additiver, sondern auch ein multiplikativer Homomorphismus.

Wir nehmen jetzt an, daß M und M' gleiche Dimension haben; dann ist der Abbildungsgrad γ von f erklärt. In den obigen Basen seien $U_1 = M$, $U'_1 = M'$ die Eins-Elemente, $X_1 = E$, $X'_1 = E'$ die durch einfache Punkte repräsentierten Elemente der beiden Ringe. Die Gleichung (18) für $i = 1$ lautet

$$f(U_1) = \gamma U'_1 ,$$

es ist also $\alpha_{11} = \gamma$; da die U_i für $i > 1$ kleinere Dimension haben als $U'_1 = M'$, ist $\alpha_{i1} = 0$ für $i > 1$. Folglich lautet (19) für $j = 1$:

$$\varphi(E') = \gamma E ; \quad (20)$$

auch durch diese Formel ist der Grad γ charakterisiert.

10. Es sei jetzt G eine Mannigfaltigkeit, deren Ring dem Ring der Produkt-Mannigfaltigkeit P aus Nr. 8 dimensionstreu isomorph sei. Diejenigen Elemente aus $\mathfrak{R}(G)$, die bei diesem Isomorphismus den Elementen V_i, Z_i, Y_j, W_j, E aus $\mathfrak{R}(P)$ entsprechen, bezeichnen wir mit denselben Buchstaben; nur statt P schreiben wir G .

Eine Abbildung f von G in sich sei gegeben; die Bilder $f(V_h)$ der minimalen Elemente V_h sind nach dem Invarianzsatz (Nr. 5) selbst wieder minimale Elemente; infolge der Basis-Eigenschaft der V_i (Nr. 8) bestehen daher Gleichungen

$$f(V_h) = \sum \gamma_{hi} V_i . \quad (21)$$

Hilfssatz 3. Der Grad von f ist die Determinante der γ_{hi} .

Beweis. Der Umkehrungs-Homomorphismus φ von f bewirkt unter anderem die folgenden Substitutionen:

$$\varphi(Z_i) = \sum \gamma_{hi} Z_h + \sum \beta_{ji} Y_j , \quad (22)$$

wobei die γ_{hi} dieselben sind wie in (21). Wir multiplizieren die l Gleichungen (22) für $i = 1, 2, \dots, l$ miteinander; dabei entsteht auf der rechten Seite eine lineare Verbindung von Produkten Π_λ , von denen jedes l Faktoren, teils Z_h und teils Y_j , enthält; nun ist aber jedes Y_j gemäß

seiner Definition selbst Produkt von mindestens zwei Z_h ; diejenigen Π_λ , welche wenigstens einen Faktor Y_j enthalten, lassen sich daher als Produkte von mehr als l Faktoren Z_h schreiben, und folglich verschwinden sie auf Grund von (17) und (16). Es ergibt sich also zunächst

$$\Pi\varphi(Z_i) = \Pi(\sum \gamma_{hi} Z_h) ,$$

wobei die Produkte auf beiden Seiten über $i = 1, 2, \dots, l$ zu erstrecken sind. Auf der linken Seite benutze man jetzt die multiplikativ-homomorphe Eigenschaft von φ und die Formel (15), und auf der rechten Seite wende man (17), (16), (15) an; dann erhält man

$$\varphi(E) = \text{Det.}(\gamma_{hi}) \cdot E .$$

Nach (20) ist daher $\text{Det.}(\gamma_{hi})$ der Grad von f .

11. Der Satz I (Nr. 2) ist eine unmittelbare Folge aus dem soeben bewiesenen Hilfssatz 3 und dem Hilfssatz 2 (Nr. 7); denn für die Potenzabbildung p_k einer Gruppen-Mannigfaltigkeit G lautet auf Grund des Hilfssatzes 2 die Substitution (21)

$$p_k(V_i) = kV_i , \quad i = 1, 2, \dots, l ;$$

ihre Determinante ist k^l ; nach dem Hilfssatz 3 ist dies der Grad von p_k .

Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes der stetigen Multiplikation in G nicht benutzt worden ist; nur muß ein Eins-Element e existieren, und die Potenzen p_k müssen so definiert sein, daß die Formeln (9) gelten.

§ 2.

12. G sei eine n -dimensionale Liesche Gruppe; vorläufig setzen wir nicht voraus, daß sie geschlossen sei; ihr Eins-Element heiße e . Es seien Abbildungen h_1, h_2, \dots, h_r gegeben, welche eine Umgebung von e so in eine Umgebung von e abbilden, daß

$$h_\varrho(e) = e , \quad \varrho = 1, 2, \dots, r , \quad (1)$$

ist. Dann ist auch das Produkt

$$h(x) = h_1(x) \cdot h_2(x) \cdot \dots \cdot h_r(x)$$

eine Abbildung mit $h(e) = e$.

Wir benutzen in der Umgebung von e ein festes Koordinatensystem; die Nummern der Koordinaten deuten wir durch obere Indizes an. Die

$h_e^i(x)$ seien stetig differenzierbare Funktionen der x^k ; dann sind die Funktionalmatrizen H, H_1, H_2, \dots, H_r der Abbildungen h, h_1, h_2, \dots, h_r im Punkte e definiert.

Wir behaupten:

$$H = H_1 + H_2 + \dots + H_r. \quad (2)$$

Es genügt, dies für $r = 2$ zu beweisen, da sich dann der allgemeine Fall durch wiederholte Anwendung ergibt.

Die Multiplikation in G sei durch

$$y \cdot z = f(y; z)$$

gegeben, in Koordinaten:

$$(y \cdot z)^i = f^i(y^1, \dots, y^n; z^1, \dots, z^n).$$

Aus

$$f(y; e) = y, \quad f(e; z) = z$$

folgt

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial y^j} \right)_{z=e} = \left(\frac{\partial f^i}{\partial z^j} \right)_{y=e} = \delta_{ij}, \quad (3)$$

wobei (δ_{ij}) die Einheitsmatrix ist. Differentiation von

$$h^i(x) = f^i(h_1(x); h_2(x))$$

ergibt

$$\frac{\partial h^i}{\partial x^k} = \sum_j \frac{\partial f^i}{\partial y^j} \cdot \frac{\partial h_1^j}{\partial x^k} + \sum_j \frac{\partial f^i}{\partial z^j} \cdot \frac{\partial h_2^j}{\partial x^k},$$

also nach (1) und (3)

$$\left(\frac{\partial h^i}{\partial x^k} \right)_{x=e} = \left(\frac{\partial h_1^i}{\partial x^k} \right)_{x=e} + \left(\frac{\partial h_2^i}{\partial x^k} \right)_{x=e}.$$

Das ist die Behauptung (2) für $r = 2$.

13. Wir wollen die Funktionalmatrix der Potenzabbildung¹¹⁾

$$p_k(x) = x^k$$

von G in sich an einer Stelle $x = a$ untersuchen; die Matrix selbst hängt zwar von den Koordinatensystemen in den Umgebungen der Punkte a und $p_k(a) = a^k$ ab, aber wesentlich sind nur solche Eigenschaften, die von der Koordinatenwahl unabhängig sind; wir werden die Koordinatensysteme möglichst bequem wählen. Da wir uns besonders für das Vorzeichen der

¹¹⁾ Obere Indizes sind im folgenden immer Exponenten (nicht Koordinaten-Nummern).

Funktionaldeterminante interessieren, haben wir dabei auf Orientierungsfragen zu achten.

Die Mannigfaltigkeit G ist analytisch und orientierbar; es sind also lokale analytische Koordinatensysteme ausgezeichnet, die dort, wo sie übereinandergreifen, durch reguläre Transformationen mit positiver Funktionaldeterminante auseinander hervorgehen, und es sind beliebige reguläre Koordinatentransformationen mit positiven Determinanten zugelassen. Durch solche Koordinatentransformationen werden wir jetzt in den Umgebungen der Punkte a und a^k spezielle Koordinatensysteme einführen, und in bezug auf diese Systeme werden wir die Funktionalmatrix P_k der Abbildung p_k berechnen. Das Verschwinden oder Nicht-Verschwinden (Nr. 14) sowie das Vorzeichen (Nr. 15) der Funktionaldeterminante von p_k wird durch die spezielle Wahl der Koordinatensysteme nicht beeinflußt.

In der Umgebung des Punktes e nehmen wir ein festes Koordinatensystem; die Abbildung $x \rightarrow xa$ einer Umgebung von e auf eine Umgebung von a hat, da sie sich durch eine Deformation von G erzeugen läßt, positive Funktionaldeterminante; infolgedessen kann man durch eine zugelassene Koordinatentransformation in der Umgebung von a erreichen, daß die Funktionalmatrix dieser Abbildung die Einheitsmatrix E wird. Ebenso kann man durch eine zugelassene Koordinatentransformation in der Umgebung des Punktes a^k erreichen, daß die Funktionalmatrix der Abbildung $x \rightarrow a^{k-1}xa$ einer Umgebung von e auf eine Umgebung von a^k die Einheitsmatrix E wird. Damit sind in den Umgebungen von e , a , a^k Koordinatensysteme eingeführt, an denen wir festhalten wollen.

Es sei $k > 0$. Setzen wir

$$a^{-e} x a^e = h_e(x)$$

und

$$h(x) = h_{k-1}(x) \cdot h_{k-2}(x) \cdot \dots \cdot h_1(x) \cdot h_0(x) ,$$

so verifiziert man leicht die Identität

$$x^k = a^{k-1} \cdot h(xa^{-1}) \cdot a .$$

Man kann also die Abbildung $p_k(x)$, welche x in x^k überführt, in drei Schritten ausführen:

$$x \rightarrow xa^{-1} = x_1 \rightarrow h(x_1) = x_2 \rightarrow a^{k-1}x_2a = x^k .$$

Die Funktionalmatrizen des ersten und des dritten Schrittes sind, dank der von uns gewählten Koordinatensysteme, die Einheitsmatrizen; die

Funktionalmatrix P_k von p_k an der Stelle $x=a$ ist daher gleich der Funktionalmatrix von h an der Stelle $x_1 = e$; diese Matrix ist nach Nr. 12

$$H = H_{k-1} + H_{k-2} + \cdots + H_1 + H_0 ,$$

wenn H_ϱ die Funktionalmatrix von h^ϱ an der Stelle e bezeichnet.

Nun ist h_ϱ die ϱ -te Iteration der Abbildung h_1 , und es ist $h_1(e) = e$; folglich ist H_ϱ die ϱ -te Potenz der Matrix H_1 . Schreiben wir A statt H_1 , so haben wir damit das folgende Resultat:

Bei geeigneter Wahl von zugelassenen Koordinatensystemen in den Umgebungen der Punkte a und a^k ist die Funktionalmatrix der Abbildung $p_k(x) = x^k$, $k > 0$, an der Stelle $x = a$

$$P_k = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1} ; \quad (4)$$

dabei bezeichnet A die Funktionalmatrix der Abbildung $x \rightarrow a^{-1}xa$ an der Stelle $x = e$, also die Matrix derjenigen adjungierten linearen Transformation, welche zum Element a gehört.

14. Wir fassen die Matrix A und ihre Potenzen als lineare Transformationen des Vektorbündels im Punkte e auf. Ein „Fixvektor“ von A ist ein Vektor \mathfrak{x} mit $A\mathfrak{x} = \mathfrak{x}$, also ein Eigenvektor mit dem Eigenwert $+1$. Wir behaupten:

Dann und nur dann ist die Determinante $|P_k| = 0$, wenn es einen Vektor gibt, der Fixvektor von A^k , aber nicht Fixvektor von A ist.

Beweis. Aus (4) folgt

$$P_k \cdot (E - A) = E - A^k , \quad (5a)$$

$$(E - A) \cdot P_k = E - A^k . \quad (5b)$$

Es gebe nun erstens einen Vektor \mathfrak{x} der in der Behauptung genannten Art; dann ist (wenn \mathfrak{o} den Nullvektor bezeichnet)

$$(E - A^k)\mathfrak{x} = \mathfrak{o} , \quad (E - A)\mathfrak{x} = \mathfrak{x}' \neq \mathfrak{o} ,$$

und nach (5a) $P_k\mathfrak{x}' = \mathfrak{o}$, also $|P_k| = 0$.

Es sei zweitens $|P_k| = 0$; dann gibt es einen Vektor $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$ mit $P_k\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$; nach (5b) ist \mathfrak{x} Fixvektor von A^k ; wäre er auch Fixvektor von A , so wäre $A^\varrho\mathfrak{x} = \mathfrak{x}$ für jedes ϱ , also nach (4) $P_k\mathfrak{x} = k\mathfrak{x}$; dies ist nicht verträglich mit $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$, $P_k\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$; folglich ist \mathfrak{x} nicht Fixvektor von A .

15. Von jetzt an sei die Gruppe G geschlossen. Wir behaupten:
Für jedes $k > 0$ und an jeder Stelle a von G ist die Determinante

$$|P_k| \geq 0 . \quad (6)$$

Beweis. Für ein beliebiges Element b von G sei B die zugehörige adjungierte Matrix, d. h. die Funktionalmatrix der Transformation $x \rightarrow b^{-1}xb$ an der Stelle $x = e$, und $C_b(\zeta)$ das charakteristische Polynom von B , also

$$C_b(\zeta) = |\zeta E - B| .$$

Bekanntlich gilt für geschlossene Gruppen der Satz, daß die Wurzeln dieser Polynome den Betrag 1 haben. Ich erinnere an den Beweis¹²⁾: die Koeffizienten der Polynome C_b sind stetige Funktionen von b , also, da b auf der geschlossenen Mannigfaltigkeit G variiert, beschränkt; folglich sind auch die Wurzeln beschränkt; da aber, wenn ζ Wurzel von C_b ist, die Potenz ζ^m Wurzel von C_{b^m} ist, sind auch alle Potenzen der Wurzeln mit positiven und mit negativen Exponenten beschränkt; das ist nur möglich, wenn die Wurzeln den Betrag 1 haben.

Insbesondere hat C_b keine reelle Wurzel $\zeta > 1$, und da $C_b(\zeta)$ für große positive ζ positiv ist, ist daher

$$C_b(\zeta) > 0 \quad \text{für} \quad \zeta > 1 . \quad (7)$$

Wir betrachten nun die von dem Parameter ζ abhängige Matrizenschar

$$P_k(\zeta) = \zeta^{k-1}E + \zeta^{k-2}A + \cdots + \zeta A^{k-2} + A^{k-1} ,$$

so daß also nach Nr. 13

$$P_k(1) = P_k$$

ist. Dann ist

$$(\zeta E - A) \cdot P_k(\zeta) = \zeta^k E - A^k ,$$

also, wenn man zu den Determinanten übergeht und beachtet, daß A^k die zu dem Element a^k gehörige adjungierte Matrix ist,

$$C_a(\zeta) \cdot |P_k(\zeta)| = C_{a^k}(\zeta^k) .$$

Hieraus und aus (7) folgt

$$|P_k(\zeta)| > 0 \quad \text{für} \quad \zeta > 1 ,$$

also

$$|P_k(1)| \geq 0 .$$

Das ist die Behauptung (6).

¹²⁾ (8), Nr. 39.

Es sei noch bemerkt, daß der hiermit für geschlossene Gruppen bewiesene Satz für offene Gruppen im allgemeinen nicht gilt: bei der 6-dimensionalen Gruppe der eigentlichen affinen Transformationen der (x, y) -Ebene,

$$\left. \begin{array}{l} x' = ax + by + s \\ y' = cx + dy + t \end{array} \right\}, \quad ad - bc > 0,$$

hat, wenn man a, b, c, d, s, t als Koordinaten benutzt, die Funktionaldeterminante der Abbildung p_2 den Wert

$$4(ad - bc)(a + d)^2((a + 1)(d + 1) - bc),$$

und dieser kann negativ werden — z. B. für $a = -2, d = -\frac{1}{2}, b = c = 0$.

16. Für jedes Element q der geschlossenen Gruppe G und für jedes $k > 0$ hat die Gleichung

$$x^k = q$$

wenigstens eine Lösung x in G .¹³⁾

Beweis. Gemäß dem „Hauptsatz“ über den Abbildungsgrad (Nr. 3) genügt es, einen Punkt q_1 zu finden, in welchem die Abbildung p_k glatt und die Bedeckungszahl nicht 0 ist. Da G analytisch und p_k eine analytische Abbildung ist, verschwindet die Funktionaldeterminante auf einer abgeschlossenen und höchstens $(n - 1)$ -dimensionalen Menge N , und das Bild $N' = p_k(N)$ ist ebenfalls abgeschlossen und höchstens $(n - 1)$ -dimensional; (n ist die Dimension von G). Im Punkte e ist, wie man z. B. aus (4) abliest, die Funktionaldeterminante nicht 0; daher gibt es eine Umgebung U von e , welche schlicht auf ein Gebiet U' abgebildet wird. In U' gibt es Punkte, die nicht zu N' gehören; jeder solche Punkt q_1 hat die gewünschten Eigenschaften: da er nicht zu N' gehört, ist p_k in ihm glatt; da die Funktionaldeterminante nach Nr. 15 nirgends negativ ist, ist seine Bedeckungszahl nicht negativ, und zwar ist sie gleich der Anzahl der Urbilder von q_1 ; diese Anzahl ist nicht 0, da q_1 zu U' gehört.

Den hiermit bewiesenen Satz kann man offenbar auch so formulieren:
Für $k > 0$ ist

$$p_k(G) = G.$$

¹³⁾ Der Satz ist bekannt, denn er ist eine unmittelbare Folge des bekannten Satzes in Nr. 17 — man vgl. Fußnote 15; überdies ist er ein Korollar unseres Satzes I, den wir aber aus Gründen der Methode hier nicht benutzen wollen.

Auch dieser Satz verliert seine Gültigkeit für offene Gruppen: in der multiplikativen Gruppe der reellen Matrizen

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad ad - bc = 1$$

ist

$$p_2(X) = X^2 = (a + d)X - E ;$$

die Spur dieser Matrix ist $(a + d)^2 - 2$; zu einer Matrix Q , deren Spur < -2 ist, gibt es daher keine Lösung X der Gleichung $X^2 = Q$; Beispiel: $Q = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

17. *Jedes Element q der geschlossenen Gruppe G gehört einer einparametrischen Untergruppe von G an¹⁴⁾; dieselbe Behauptung drückt man oft so aus: die Gruppe G wird von ihren infinitesimalen Transformationen erzeugt¹⁵⁾.*

Beweis. U sei eine offene Umgebung des Punktes e , in welcher ein kanonisches Koordinatensystem existiert¹⁶⁾; hieraus folgen zwei Tatsachen: 1. jeder Punkt von U gehört einer einparametrischen Untergruppe von G an, 2. für jeden Punkt q von U und jedes $k > 0$ gibt es in U einen Punkt x mit $x^k = q$; diese zweite Tatsache kann man auch so formulieren:

$$U \subset p_k(U) . \quad (8)$$

Es sei x irgend ein Punkt von G . Infolge der Geschlossenheit von G enthält die Folge seiner positiven Potenzen x^m eine konvergente Teilfolge, es gibt also eine solche Zahlenfolge $m_1 < m_2 < \dots$, daß $\lim x^{m_i}$ existiert; dann ist $\lim x^{m_i - m_{i-1}} = e$; somit liegt jedenfalls eine Potenz x^k in U , und da U offen ist, gibt es eine Umgebung $V(x)$ von x mit $p_k(V(x)) \subset U$.

Jedem Punkt x ist eine solche Umgebung $V(x)$ zugeordnet; da G geschlossen ist, kann man aus dem unendlichen System dieser $V(x)$ endlich viele, etwa V_1, V_2, \dots, V_m , so auswählen, daß $\sum V_i = G$ ist; es gibt Zahlen k_i mit

$$p_{k_i}(V_i) \subset U , \quad i = 1, \dots, m . \quad (9)$$

¹⁴⁾ Unter einer einparametrischen Gruppe soll immer eine zusammenhängende eindimensionale Gruppe verstanden werden, wie in (5), p. 86 und p. 184 ff.

¹⁵⁾ Dieser Satz ist bekannt: er ergibt sich erstens leicht aus (3), Nr. 47, und er folgt zweitens auch aus der Deutung der einparametrischen Untergruppen als geodätische Linien — man vergleiche (1), chap. II — und der Tatsache, daß in einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit zwischen je zwei Punkten eine kürzeste Verbindung existiert.

¹⁶⁾ (5), § 39.

Setzen wir $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_m = k^*$ und erklären wir k'_i durch $k_i \cdot k'_i = k^*$, so ergibt sich aus (9) durch Ausübung von $p_{k'_i}$

$$p_{k^*}(V_i) \subset p_{k'_i}(U); \quad (10)$$

nach (8) ist $U \subset p_{k_i}(U)$, und hieraus folgt durch Ausübung von $p_{k'_i}$

$$p_{k'_i}(U) \subset p_{k^*}(U);$$

hieraus und aus (10) ergibt sich

$$p_{k^*}(V_i) \subset p_{k^*}(U).$$

Dies gilt für $i = 1, \dots, m$, und es ist $\sum V_i = G$; folglich ist auch $p_{k^*}(G) \subset p_{k^*}(U)$. Nach Nr. 16 ist aber $p_{k^*}(G) = G$; es ist also $G \subset p_{k^*}(U)$, und somit

$$p_{k^*}(U) = G.$$

Dies bedeutet: zu jedem Punkt q von G gibt es einen solchen Punkt x in U , daß $x^{k^*} = q$ ist; da x einer einparametrischen Gruppe G_1 angehört, gehört seine Potenz q derselben Gruppe G_1 an.

Es ist bekannt, daß auch der hiermit bewiesene Satz nicht für alle offenen Gruppen gilt; diese Tatsache ist, da ein Element q , für welches die Gleichung $x^2 = q$ keine Lösung besitzt, keiner einparametrischen Gruppe angehören kann, in der Bemerkung am Schluß von Nr. 16 enthalten.¹⁷⁾

18. Nach dem Satz aus Nr. 17 liegt jeder Punkt von G auf einer einparametrischen, also Abelschen, zusammenhängenden Untergruppe G_1 von G ; die abgeschlossene Hülle von G_1 ist eine abgeschlossene Untergruppe von G , also eine Liesche Gruppe¹⁸⁾; sie ist kompakt, Abelsch und zusammenhängend; folglich ist sie nach bekannten Sätzen das direkte Produkt von endlich vielen geschlossenen einparametrischen Gruppen, also von Kreisdrehungsgruppen¹⁹⁾. Eine solche Gruppe wollen wir ein „Toroid“ nennen. Wir haben also gezeigt:

Jeder Punkt von G liegt auf einem Toroid, welches Untergruppe von G ist.

19. Es sei hier an einige Eigenschaften der Toroide erinnert. Ein λ -dimensionales Toroid T_λ wird durch Koordinaten x_1, \dots, x_λ beschrieben, wobei die x_i die Restklassen der reellen Zahlen modulo 1 durchlaufen; die Zuordnung zwischen den Punkten von T_λ und den Systemen

¹⁷⁾ Man vergleiche (3), Nr. 24.

¹⁸⁾ (3), Nr. 26; (5), Th. 50.

¹⁹⁾ (3), Nr. 43; sowie, ohne Benutzung von Differenzierbarkeitseigenschaften: (5), Th. 42.

(x_1, \dots, x_λ) ist eineindeutig. Das Produkt zweier Elemente $x = (x_1, \dots, x_\lambda)$ und $y = (y_1, \dots, y_\lambda)$ ist durch

$$x \cdot y = (x_1 + y_1, \dots, x_\lambda + y_\lambda)$$

gegeben.

Wir werden die folgenden beiden Tatsachen benutzen.

(a) *Auf jedem Toroid T gibt es Punkte c , deren Potenzen c^m überall dicht auf T liegen.*

Das ist in dem klassischen Approximationssatz von Kronecker enthalten, der überdies besagt, daß diejenigen $c = (c_1, \dots, c_\lambda)$ die genannte Eigenschaft haben, für welche die einzige Relation

$$m_1 c_1 + \dots + m_\lambda c_\lambda = m$$

mit ganzen m_1, \dots, m_λ, m die triviale mit $m_1 = \dots = m_\lambda = 0$ ist.²⁰⁾

Da für ein c , dessen Potenzen auf T überall dicht sind, T die kleinste abgeschlossene Gruppe ist, welche c enthält, soll ein solches c ein erzeugendes Element von T heißen.

(b) *Für jedes Element q des λ -dimensionalen Toroids T_λ und jede ganze Zahl $k > 0$ hat die Gleichung $x^k = q$ genau k^λ Lösungen x auf T_λ .*

Diese Lösungen sind nämlich, wie man leicht bestätigt, wenn $q = (q_1, \dots, q_\lambda)$ ist, die Elemente $x = (x_1, \dots, x_\lambda)$ mit

$$x_i = \frac{q_i + m_i}{k} ,$$

wobei m_1, \dots, m_λ ganze Zahlen sind, welche unabhängig voneinander die Werte $0, 1, \dots, k - 1$ durchlaufen.

20. In G gibt es nach Nr. 18 ein Toroid; es gibt daher auch ein maximales Toroid, d. h. ein solches, das nicht in einem höher-dimensionalen Toroid enthalten ist; es gebe in G ein maximales Toroid T_λ von der Dimension λ . Dann gilt der Satz:

Für jedes $k > 0$ hat die Abbildung p_k von G den Grad k^λ .

Beweis. Es sei c ein erzeugendes Element von T_λ , gemäß Nr. 19 (a), und es sei x ein Element von G , das die Gleichung $x^k = c$ erfüllt. Nach

²⁰⁾ Eine Zusammenstellung verschiedener Beweise findet man bei J. F. Koksma, Diophantische Approximationen [Berlin 1936], p. 83; einige von ihnen bewegen sich im Rahmen der Theorie der stetigen Moduln, also der kontinuierlichen Abelschen Gruppen; hierher gehört auch ein neuer Beweis von Pontrjagin: (5), p. 150, Ex. 51.

Nr. 18 liegt x auf einem Toroid T' ; dann liegt auch jede Potenz von x , also auch jede Potenz von c , also, da c das Toroid T_λ erzeugt, auch T_λ auf T' ; da T_λ maximal ist, ist $T' = T_\lambda$. Folglich liegt x auf T_λ , und wir sehen: alle Lösungen x der Gleichung $x^k = c$ liegen auf T_λ .

Wir behaupten, daß in jedem dieser Punkte x die Funktionaldeterminante der Abbildung p_k von 0 verschieden ist; nach Nr. 14 ist dies bewiesen, sobald gezeigt ist: ist x Fixvektor der zu c gehörigen adjungierten Transformation C , so ist x auch Fixvektor der zu x gehörigen adjungierten Transformation X . Nun ist aber ein Fixvektor x von C auch Fixvektor der adjungierten Transformationen C^m , die zu den Potenzen c^m gehören, und aus Stetigkeitsgründen auch Fixvektor jeder Transformation C' , die zu einem Häufungspunkt c' der c^m gehört; alle Punkte von T_λ , also auch unsere x , sind solche c' . Damit ist die Behauptung bewiesen.

Da die Funktionaldeterminante von p_k in keinem Urbildpunkt von c verschwindet, ist p_k im Punkte c glatt (Nr. 3), und die Bedeckungszahl in c ist definiert; da die Funktionaldeterminante nirgends negativ ist (Nr. 15), ist die Bedeckungszahl gleich der Anzahl der Urbildpunkte; wir sahen schon, daß es keine anderen Urbilder von c gibt als diejenigen auf T_λ ; deren Anzahl ist nach Nr. 19 (b) gleich k^λ . Diese Zahl ist also die Bedeckungszahl des Punktes c , und somit der Grad der Abbildung p_k .

21. Da der Grad von p_k nicht von dem speziell gewählten maximalen Toroid abhängt, ist ein Korollar des soeben bewiesenen Satzes:

*Alle maximalen Toroide haben die gleiche Dimension λ .*²¹⁾

Da ferner in jeder abgeschlossenen q -dimensionalen Abelschen Untergruppe von G die Komponente, welche das Eins-Element enthält, ein q -dimensionales Toroid ist, sieht man: *Die Zahl λ ist die höchste Dimension, welche eine Abelsche Untergruppe von G haben kann.*

Durch den Satz aus Nr. 20 zusammen mit den soeben gemachten Bemerkungen ist der Satz II (Nr. 2) für alle positiven Zahlen k bewiesen.

22. Damit ist unser Ziel, das in Nr. 1 gesteckt worden ist, nämlich der Beweis der Gleichheit $\lambda = l$, erreicht; hierfür hätte ja der Beweis der Sätze I und II für ein einziges $k > 1$ genügt. Da wir den Satz I für alle k , auch für die negativen, bewiesen haben, ist damit auch die Gültigkeit des Satzes II für die negativen k gesichert. Man wird aber wünschen, den Satz II auch für diese k ohne den algebraisch-topologischen Apparat

²¹⁾ Dieser Satz folgt leicht aus (6), Teil II, p. 354—366, oder auch aus (1), chap. I.

des § 1 zu beweisen; ein solcher Beweis wird sich später ergeben; im Augenblick bemerke ich als Vorbereitung dazu nur folgendes:

Da schon bewiesen ist, daß p_k für $k > 0$ den Grad k^λ hat, genügt es für den Beweis der Behauptung, daß p_{-k} den Grad $(-k)^\lambda$ habe, zu zeigen: die Abbildung p_{-1} , also die Inversion, welche x mit x^{-1} vertauscht, hat den Grad $(-1)^\lambda$. Sind x_1, \dots, x_n kanonische Koordinaten in der Umgebung des Punktes e , so befördert p_{-1} den Punkt mit den Koordinaten x_i in den Punkt mit den Koordinaten $-x_i$; daraus ist ersichtlich: der Grad von p_{-1} ist $(-1)^n$. Unsere Behauptung, dieser Grad sei $(-1)^\lambda$, ist daher gleichbedeutend mit der folgenden:

$$\lambda \equiv n \pmod{2}. \quad (11)$$

Diese Tatsache aber wird sich in Nr. 27 aus einem allgemeinen Satze ablesen lassen.²²⁾

§ 3.

Es sollen hier noch einige Zusätze zu dem Inhalt des § 2 gemacht werden, um einerseits den Zusammenhang mit bekannten Begriffen aus der Theorie der kontinuierlichen Gruppen herzustellen²³⁾, und um andererseits die Frage nach der Anzahl der Lösungen der Gleichung $x^k = q$ noch etwas weiter zu verfolgen. Wie bisher ist G eine geschlossene n -dimensionale Gruppe und λ ihr Rang, d. h. die Dimension ihrer maximalen Toroide.

23. Hilfssatz: Es sei T ein Toroid (beliebiger Dimension) in G und a ein Element von G , das mit allen Elementen von T vertauschbar ist; dann gibt es ein Toroid, welches sowohl T als auch a enthält.

Beweis: A sei die von T und a erzeugte abgeschlossene Gruppe und A^1 diejenige Komponente von A , die das Eins-Element e enthält. Dann ist eine Potenz a^m von a in A^1 enthalten; denn für jede hinreichend kleine Umgebung U von e bildet der Durchschnitt von A und U einen Teil einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit¹⁸⁾, also einen Teil von A^1 , und in jedem U gibt es Potenzen von a (man vgl. Nr. 17). Aus der Voraussetzung über T und a folgt, daß A Abelsch, also A^1 ein Toroid ist. Es sei c ein erzeugendes Element von A^1 (Nr. 19); da $c \cdot a^{-m} \in A^1$ ist, kann man ein Element b von A^1 so bestimmen, daß $b^m = c \cdot a^{-m}$ ist; es gibt (Nr. 18) ein Toroid T' , welches das Element $a \cdot b$ enthält. Jedes Element von T' ist mit $a \cdot b$, also auch mit $(a \cdot b)^m = c$, also auch mit jedem Element von

²²⁾ Da wir schon wissen, daß $\lambda = l$ ist, kann (11) auch als Korollar des in Nr. 1 angeführten Satzes gelten, welcher besagt, daß die n -dimensionale Gruppe G den gleichen Homologie-Ring hat wie ein topologisches Produkt aus l Sphären ungerader Dimensionen.

²³⁾ Man vergleiche z. B. (1), Nr. 1—6, und (6), Teil III, p. 379.

A^1 vertauschbar; folglich ist die von A^1 und T' erzeugte abgeschlossene Gruppe T'' Abelsch; da sie zusammenhängend ist, ist sie ein Toroid; sie enthält A^1 , also auch T ; sie enthält T' , also $a \cdot b$, also, da $b \in A^1$ ist, auch a ; sie hat also alle gewünschten Eigenschaften.

Aus dem Hilfssatz folgt unmittelbar: *Ein Element a , das mit allen Elementen eines λ -dimensionalen Toroides T_λ vertauschbar ist, liegt selbst auf diesem T_λ* ; sowie, da die Eins-Komponente (d. h. die Komponente, die e enthält) jeder Abelschen Gruppe ein Toroid ist:

Jede λ -dimensionale Abelsche Untergruppe von G ist zusammenhängend, also ein Toroid.

24. Unter dem Normalisator N_a eines Elementes a verstehen wir wie üblich die Gruppe der mit a vertauschbaren Elemente; die Eins-Komponente von N_a bezeichnen wir mit N_a^1 ; sie ist eine abgeschlossene zusammenhängende Liesche Gruppe, und sie hat selbst den Rang λ , da ein maximales Toroid, welches a enthält, zu ihr gehört. Wir behaupten: *Die Gruppe N_a^1 ist die Vereinigung derjenigen λ -dimensionalen Toroide, welche a enthalten.*

Beweis: Daß alle die genannten Toroide zu N_a^1 gehören, ist klar; zu zeigen ist: jedes Element b von N_a^1 liegt auf einem λ -dimensionalen Toroid, welches a enthält. Es sei also b ein Element von N_a^1 ; nach Nr. 18, angewandt auf die Gruppe N_a^1 , gibt es in N_a^1 ein Toroid, welches b enthält, und ein höchstdimensionales unter diesen Toroiden hat nach Nr. 21 die Dimension λ , da λ der Rang von N_a^1 ist; T_λ sei ein solches Toroid. Da es zu N_a gehört, ist a mit jedem Element von T_λ vertauschbar; nach Nr. 23 liegt daher a auf T_λ .

25. Im folgenden werden λ -dimensionale Toroide immer mit T_λ bezeichnet. Nach Nr. 18 und Nr. 21 liegt jedes Element a von G auf wenigstens einem T_λ .

Definition: Das Element a heißt „*regulär*“, wenn es auf nur einem T_λ liegt, und „*singulär*“, wenn es auf mindestens zwei T_λ liegt.

Ist a regulär und $a \in T_\lambda$, so folgt aus Nr. 24, daß $N_a^1 = T_\lambda$ ist; ist a singulär und $a \in T_\lambda$, so ist T_λ echte Untergruppe von N_a^1 , also hat N_a höhere Dimension als T_λ ; mithin läßt sich die Regularität oder Singulärität auch so charakterisieren: *das Element a ist regulär oder singulär, jenachdem sein Normalisator die Dimension λ oder höhere Dimension hat.*

Hieraus und aus Nr. 24 folgt weiter, daß jedes singuläre Element unendlich vielen T_λ angehört.

Ein erzeugendes Element eines T_λ (Nr. 19) ist, wie man leicht sieht, immer regulär.

26. Die Normalisatoren hängen eng mit den Fixvektoren zusammen, die wir in Nr. 14 betrachtet haben. Jeder von \mathfrak{o} verschiedene Vektor \mathfrak{x} im Punkte e ist tangential an eine wohlbestimmte einparametrische Untergruppe; (diese wird durch die infinitesimale Transformation, die \mathfrak{x} darstellt, erzeugt)¹⁶⁾. Diese Untergruppe ist offenbar dann und nur dann in dem Normalisator N_a des Elementes a enthalten, wenn \mathfrak{x} Fixvektor der zu a gehörigen adjungierten Transformation A ist, also derjenigen linearen Transformation des Vektorbündels in e , welche durch die Abbildung $x \rightarrow a^{-1}xa$ bewirkt wird. Die Fixvektoren von A erfüllen ein lineares Vektorgebilde, das „Fixgebilde“ von A ; nach dem eben Gesagten ist klar: *Das Fixgebilde von A ist identisch mit dem Gebilde der Tangentialvektoren des Normalisators N_a im Punkte e .*

Insbesondere ist die Dimension von N_a gleich der Dimension dieses Fixgebildes, also gleich der Maximalzahl linear unabhängiger Fixvektoren von A . Für die Untersuchung dieser Dimensionszahl ist nun wichtig der Satz von Weyl, welcher besagt, daß jede geschlossene Gruppe reeller linearer Transformationen einer orthogonalen Gruppe ähnlich ist.²⁴⁾ Nach diesem Satz kann man im Punkte e ein solches Koordinatensystem einführen, daß alle Matrizen A orthogonal werden. Für eine orthogonale Matrix aber ist die Maximalzahl linear unabhängiger Fixvektoren, also Eigenvektoren mit Eigenwerten $+1$, gleich der Vielfachheit der Zahl $+1$ als Wurzel des charakteristischen Polynoms von A ; diese Vielfachheit gibt also die Dimension des Normalisators N_a an. Damit haben wir auf Grund der Ergebnisse von Nr. 25 den folgenden Sachverhalt:

Ist das Element a regulär, so besitzt die zugehörige adjungierte Matrix A die Zahl $+1$ als λ -fache charakteristische Wurzel; ist a singulär, so ist $+1$ charakteristische Wurzel von A mit einer größeren Vielfachheit als λ .

Das charakteristische Polynom $C_a(\zeta) = |\zeta E - A|$ ist somit für jedes Element a durch $(\zeta - 1)^\lambda$ teilbar, aber nur für die singulären Elemente a durch eine höhere Potenz von $(\zeta - 1)$; dabei beachte man, daß nicht alle Elemente singulär sind, denn z. B. die erzeugenden Elemente eines T_λ sind regulär (Nr. 19); es gilt also folgender Satz, durch welchen der Rang charakterisiert wird:

Die charakteristischen Polynome der den Elementen a von G adjungierten linearen Transformationen A sind von der Form

$$C_a(\zeta) = (\zeta - 1)^\lambda \cdot F_a(\zeta),$$

wobei F_a ein Polynom ist, für welches $F_a(1) \neq 0$ ist; dann und nur dann ist $F_a(1) = 0$, wenn das Element a singulär ist.

²⁴⁾ (6), Teil I, p. 288—289; (3), Nr. 38.

Da die Koeffizienten des Polynoms F_a analytisch von a abhängen, geht hieraus zugleich hervor, daß die singulären Elemente eine abgeschlossene und nirgends dichte Punktmenge in G bilden.²⁵⁾

27. Die orthogonalen Transformationen A lassen sich stetig in die Identität überführen und haben daher die Determinante $+1$; die Vielfachheit der Zahl $+1$ als charakteristische Wurzel einer orthogonalen Matrix mit der Determinante $+1$ ist immer der Variablen-Anzahl n kongruent modulo 2; daher folgt aus Nr. 26 zunächst die Kongruenz

$$\lambda \equiv n \pmod{2}, \quad (11)$$

wodurch die in Nr. 22 besprochene Lücke ausgefüllt ist, und weiter der folgende allgemeinere Satz:

Die Dimension eines Normalisators N_a ist mit der Dimension n sowie mit dem Rang λ von G kongruent modulo 2; für ein singuläres Element a ist die Dimension von N_a daher mindestens $\lambda + 2$.

Für jedes Element a von G bilden die konjugierten Elemente $a' = t^{-1}at$, $t \in G$, eine Mannigfaltigkeit, die bekanntlich mit dem Raum der Restklassen, in welche G nach dem Normalisator N_a zerfällt, homöomorph ist; aus dem letzten Satz folgt daher:

Für jedes Element a bildet die Klasse seiner konjugierten Elemente $t^{-1}at$ eine Mannigfaltigkeit gerader Dimension; wenn a nicht dem Zentrum von G angehört, ist diese Dimension positiv, also mindestens 2.

28. Wir kehren zu unseren Abbildungen $p_k(x) = x^k$ mit beliebigen positiven Exponenten k zurück und untersuchen die Gleichung

$$x^k = q \quad (12)$$

bei gegebenem Element q .

Jedes T_λ , welches eine Lösung x von (12) enthält, enthält auch q ; folglich liegen alle Lösungen x in N_q^1 .

Ist q regulär, so liegen alle x in dem einzigen T_λ , das q enthält; ihre Anzahl ist also k^λ (Nr. 19).

q sei singulär und T_λ^0 eines der T_λ , die q enthalten; wir unterscheiden zwei Fälle, jenachdem es außer den Lösungen, die in T_λ^0 liegen, noch andere Lösungen von (12) gibt oder nicht.

²⁵⁾ Tatsächlich ist diese Menge nur $(n - 3)$ -dimensional: (6), Teil III, p. 379 und (1), Nr. 6.

Im ersten Fall sei x eine Lösung, die nicht in T_λ^0 liegt; nach Nr. 23 ist x nicht mit allen Elementen von T_λ^0 vertauschbar, x gehört also gewiß nicht zum Zentrum von N_q^1 ; die Klasse seiner in N_q^1 konjugierten Elemente, also die Menge der Elemente

$$x' = t^{-1}xt, \quad t \in N_q^1,$$

ist daher nach Nr. 27 eine mindestens 2-dimensionale Mannigfaltigkeit; aber alle Elemente x' erfüllen die Gleichung (12). Folglich enthält die Menge der Lösungen von (12) eine mindestens 2-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Zweiter Fall: q ist singulär, und alle Lösungen x von (12) liegen in demselben T_λ^0 . Dann ist ihre Anzahl k^λ . Wir behaupten, daß dies ein Ausnahmefall ist, d. h. daß er höchstens für endlich viele k eintreten kann; genauer: das Zentrum Z von N_q^1 bestehe aus m Komponenten; dann kann der Ausnahmefall höchstens dann eintreten, wenn $k \leq m$ ist.

Beweis: Da es auf jedem T_λ , das q enthält, k^λ Lösungen gibt, liegen alle k^λ Lösungen von (12) auf jedem T_λ , welches q enthält; sie sind daher Elemente von Z ; wir haben also nur die durch p_k bewirkte Abbildung von Z in sich zu betrachten. Die Eins-Komponente Z^1 von Z ist ein Toroid T_ϱ , und jede Komponente von Z ist mit Z^1 homöomorph; aus den Eigenschaften der Toroide ist leicht ersichtlich (man vergleiche Nr. 19, b): in jeder Komponente, welche überhaupt eine Lösung x enthält, gibt es genau k^ϱ Lösungen x ; da es im ganzen k^λ Lösungen gibt, ist daher $k^\lambda \leq m \cdot k^\varrho$. Hierbei ist ϱ die Dimension von Z ; sie ist kleiner als λ , da aus $\varrho = \lambda$ und aus Nr. 23 folgen würde, daß $N_q^1 = T_\varrho = T_\lambda$ ist, entgegen der Tatsache, daß N_q infolge der Singularität von q größere Dimension hat als λ . Aus $k^\lambda \leq m \cdot k^\varrho$ und $\varrho < \lambda$ folgt $k \leq m$.

Fassen wir zusammen:

Ist q regulär, so hat die Gleichung (12) genau k^λ Lösungen x . Es sei q singulär; dann kann derselbe einfache Sachverhalt — also die Existenz von genau k^λ Lösungen — für endlich viele Ausnahmewerte von k vorliegen; für alle anderen k gibt es unendlich viele Lösungen von (12), und zwar enthält die Menge der Lösungen eine mindestens 2-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Das Eins-Element e ist in jeder Gruppe, die nicht Abelsch ist, singulär; daher besitzt die Gleichung

$$x^k = e \tag{13}$$

in jeder geschlossenen, nicht-Abelschen Gruppe wenigstens ∞^2 Lösungen, vorausgesetzt, daß k nicht ein Ausnahmewert ist; die Ausnahmewerte

können im Falle der Gleichung (13) nicht größer sein als die Anzahl m der Komponenten des Zentrums Z von G .

Ein trivialer Ausnahmewert für jedes singuläre Element q ist $k=1$. Auch $k=2$ tritt als Ausnahmewert auf: in der Gruppe $G=A_1$ der Quaternionen vom Betrage 1 — also einer Gruppe mit $n=3$, $\lambda=1$ — hat die Gleichung $x^2=e$ nur zwei Lösungen.²⁶⁾

L I T E R A T U R

- (1) *E. Cartan*, La géométrie des groupes simples [Annali di Mat. 4 (1927), 209—256].
- (2) *E. Cartan*, Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces [Ann. Soc. Pol. Math. 8 (1929), 181—225; sowie: Selecta, Jubilé scientifique (Paris 1939), 203—233].
- (3) *E. Cartan*, La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs [Paris 1930, Mémorial Sc. Math. XLII].
- (4) *E. Cartan*, La topologie des groupes de Lie [Paris 1936, Actualités scient. et industr. 358; sowie: L'enseignement math. 35 (1936), 177—200; sowie: Selecta (wie oben), 235—258].
- (5) *L. Pontrjagin*, Topological groups [Princeton 1939].
- (6) *H. Weyl*, Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen [Math. Zeitschrift 28, 24 (1925, 1926), 271—309 bzw. 328—395].
- (7) *A. Weil*, Démonstration topologique d'un théorème fondamental de Cartan [C. R. 200 (1935), 518—520]. — In dieser Note, auf die ich erst nachträglich aufmerksam wurde, findet man für die Sätze aus Nr. 17, Nr. 21 und die Formel (11) aus Nr. 22 Beweise, die von den früher zitierten und von unseren Beweisen verschieden sind.

(Eingegangen den 18. September 1940.)

²⁶⁾ Dieses Beispiel — $G = A_1$, $k = 2$ — ist, wenn man sich auf einfache geschlossene Gruppen beschränkt, die den vier großen Killing-Cartanschen Klassen angehören, das einzige, in welchem es zu dem Element e einen Ausnahmewert $k > 1$ gibt, in welchem also die Gleichung (13) für ein $k > 1$ nur endlich viele Lösungen hat; man bestätigt dies leicht mit Hilfe derjenigen Eigenschaften der vier großen Klassen, die in (4), § IV, p. 14, angegeben sind.