

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 13 (1940-1941)

Artikel: Une propriété des variétés du second ordre.
Autor: Kollros, Louis
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-13554>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Une propriété des variétés du second ordre

Par LOUIS KOLLROS, Zurich

Steiner a énoncé sans démonstration une propriété des coniques qu'on peut généraliser dans l'espace à n dimensions.

On sait que le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une conique est un cercle; on le désigne sous le nom de *cercle orthoptique* de la conique; le carré de son rayon r est égal à la somme des carrés des demi-axes de la conique.

Pour une ellipse $r^2 = a^2 + b^2$. Si h et \bar{h} sont deux hyperboles conjuguées, celle, h , qui est située dans l'angle aigu des asymptotes a un cercle orthoptique réel c pour lequel $r^2 = a^2 - b^2$; le cercle orthoptique \bar{c} de \bar{h} est imaginaire. Pour l'hyperbole équilatère $r = 0$. Pour la parabole $r = \infty$; la droite orthoptique de la parabole est la directrice.

Les rayons de courbure d'une conique ont avec son cercle orthoptique la relation suivante:

*Théorème de Steiner*¹⁾: „Si, en un point P d'une conique, on porte sur la normale extérieure n une longueur égale au rayon de courbure de la conique en P , le cercle c' décrit sur cette longueur comme diamètre coupe orthogonalement le cercle orthoptique.“ Et inversement: *Si l'on trace un cercle c' tangent à une conique en l'un de ses points P et orthogonal à son cercle orthoptique c , le diamètre de c' est égal au rayon de courbure de la conique en P .* Si donc p est la polaire de P par rapport au cercle orthoptique c , le point P' où p coupe la normale n est le symétrique, par rapport à P , du centre de courbure de la conique en P .

Ce théorème s'applique aussi à l'hyperbole \bar{h} située dans l'angle obtus des asymptotes; le cercle c' orthogonal au cercle imaginaire \bar{c} de rayon ir coupe diamétralement le cercle concentrique réel de rayon r ; la polaire de P par rapport à \bar{c} est l'antipolaire de P par rapport au cercle réel. Pour l'hyperbole équilatère, la polaire de P par rapport au cercle O de rayon nul est le diamètre perpendiculaire à OP . Pour la parabole, le centre du cercle c' est sur la directrice; on a donc le résultat connu: le rayon de courbure en un point P d'une parabole est le double du segment de la normale compris entre P et la directrice.

Au § 1 je démontre le théorème de Steiner et je prouve qu'il est une propriété caractéristique des coniques, c'est-à-dire que, parmi les courbes planes, les coniques seules jouissent de cette propriété.

¹⁾ Crelle 30, p. 271; Oeuvres complètes, tome II, p. 341.

Dans le § 2 j'indique la généralisation du théorème de Steiner dans l'espace à trois dimensions: „Le diamètre de la sphère tangente à une quadrique Q en un de ses points P et orthogonale à sa sphère orthoptique est égal à la somme des rayons de courbure principaux de la quadrique en P “, donc aussi égal à la somme des rayons de courbure des sections normales de Q menées par deux diamètres conjugués quelconques de l'indicatrice de P .

Au § 3 je trouve l'équation aux dérivées partielles de toutes les quadriques admettant une sphère donnée comme sphère orthoptique.

Le § 4 montre que le théorème de Steiner est le cas particulier pour $n = 2$ d'un théorème de l'espace euclidien à n dimensions relatif aux variétés du second ordre (ou hyperquadriques).

§ 1. Démonstration du théorème de Steiner

Une conique c' est harmoniquement circonscrite à une conique k quand il existe un triangle inscrit à c' et polaire à k ; il en existe alors une infinité; il y aura donc aussi une infinité de triangles polaires de c' et circonscrits à k puisqu'on peut transformer les coniques c' et k l'une en l'autre par polaires réciproques. Si les c' sont des cercles, ils sont orthogonaux au cercle orthoptique; ce théorème a été publié par *Faure*²⁾; il se trouve déjà, sous sa forme projective générale, dans deux manuscrits de Steiner intitulés: „Der neueste Satz“; l'un est de 1845 et l'autre du 15 juillet 1858; il se généralise dans l'espace à n dimensions: „Les hypersphères harmoniquement circonscrites à une hyperquadrique en coupent orthogonalement l'hypersphère orthoptique.“

Dans le plan, les points d'intersection des cercles c' et de la conique k peuvent être réels ou imaginaires; dans le cas limite où le cercle c' est tangent à k , on a le théorème énoncé dans l'introduction.

En négligeant des infiniment petits du troisième ordre, on peut remplacer la conique k en un de ses points P par son cercle de courbure k' en P ; soit ρ son rayon; le cercle orthoptique de k' a le rayon $\rho\sqrt{2}$; tout cercle tangent à k' et orthogonal à son cercle orthoptique a un diamètre égal à ρ .

Plus généralement, si ρ est le rayon de courbure d'une courbe plane quelconque en un de ses points P et si l'on considère deux tangentes t' et t'' voisines de la tangente t à cette courbe en P , le cercle conjugué au triangle $t t' t''$ rend vers un cercle de diamètre ρ quand t' et t'' se rapprochent indéfiniment de t .

²⁾ Nouv. Ann. de Math., t. 19, p. 234 (1860).

La vérification analytique du théorème de Steiner est très simple

Soit

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 1 = 0$$

l'équation d'une conique;

$$x^2 + y^2 = A + B$$

celle de son cercle orthoptique c ; $P(\bar{x}, \bar{y})$ un point quelconque de la conique;

$$\bar{x}x + \bar{y}y = A + B$$

l'équation de la polaire p de P par rapport au cercle c .

Les équations de la normale à la conique en P sont:

$$x = \bar{x} + \frac{\bar{x}\lambda}{A} \quad \text{et} \quad y = \bar{y} + \frac{\bar{y}\lambda}{B};$$

cette normale coupe la polaire p au point P' pour lequel le paramètre λ a la valeur: $\lambda = A + B - \bar{x}^2 - \bar{y}^2$.

Le diamètre $d = PP'$ du cercle c' sera donc:

$$d = (A + B - \bar{x}^2 - \bar{y}^2) \sqrt{\frac{\bar{x}^2}{A^2} + \frac{\bar{y}^2}{B^2}}.$$

On trouve la même expression si l'on calcule le rayon de courbure à la conique en P .

Le théorème de Steiner est une propriété caractéristique des coniques.

Etant donné le cercle fixe $c: x^2 + y^2 = r^2$, cherchons toutes les courbes planes telles que — P étant un point quelconque de la courbe, M le centre de courbure en P et P' le symétrique de M par rapport à P — le cercle c' de diamètre $d = PP'$ soit orthogonal au cercle donné c .

Pour trouver l'équation différentielle la plus simple de cette famille de courbes, il faut choisir le système de coordonnées dans lequel le rayon de courbure s'exprime le plus simplement. Considérons la courbe comme enveloppe de la droite:

$$x \cos u + y \sin u = p;$$

p et u sont les coordonnées polaires du pied N de la perpendiculaire abaissée de l'origine O sur la droite. Lorsque P se déplace sur la courbe le segment $ON = p$ est une fonction de l'angle u . Il est facile de voir que la

dérivée $p'(u)$ de la fonction $p(u)$ est représentée par la distance du point N au point de contact P de la droite avec son enveloppe et que le rayon de courbure de cette enveloppe en P est égal à la somme de la fonction $p(u)$ et de sa seconde dérivée $p''(u)$.

Ainsi les deux conditions du problème sont :

$$d = p + p''$$

et

$$\left(p + \frac{d}{2}\right)^2 + p'^2 = r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 ,$$

condition d'orthogonalité de c et c' . On en déduit l'équation différentielle des courbes cherchées :

$$pp'' + p'^2 + 2p^2 = r^2 .$$

La substitution $p^2 = t$ la transforme en :

$$t'' + 4t = 2r^2$$

dont l'intégrale est :

$$t = p^2 = C \cos 2u + D \sin 2u + \frac{r^2}{2} .$$

C'est l'équation tangentielle de toutes les coniques admettant le cercle donné comme cercle orthoptique.

Les directions des axes sont données par $p' = 0$ ou $\operatorname{tg} 2u = \frac{D}{C}$ et leurs longueurs $2a$ et $2b$ par :

$$a^2 = A = \frac{r^2}{2} + \sqrt{C^2 + D^2} ; \quad A + B = r^2 .$$

$$b^2 = B = \frac{r^2}{2} - \sqrt{C^2 + D^2}$$

Pour $C = D = 0$, on a le cercle de rayon $\frac{r}{\sqrt{2}}$; si $D = 0$ et $C \neq 0$, on a les coniques rapportées à leurs axes : ellipses ou hyperboles suivant que B est positif ou négatif ; leur équation peut s'écrire :

$$p^2 = A \cos^2 u + B \sin^2 u ;$$

si $C = 0$ et $D \neq 0$, on a les coniques précédentes tournées de 45° autour de leur centre.

§ 2. Généralisation dans l'espace à trois dimensions

Soit $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ l'équation d'une surface dans l'espace à trois dimensions.

Posons:
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = f_{ik} = f_{ki} ,$$

on aura (en supprimant le signe somme):

$$f_i dx_i = 0$$

et les 3 égalités: $df_i = f_{ik} dx_k$, i et $k = 1, 2, 3$, la sommation devant être faite sur l'indice qui se répète. Soit n la normale en un point quelconque $P(x_i)$ de la surface; ses cosinus directeurs sont:

$$c_i = \frac{f_i}{F} \quad \text{où} \quad F^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 ;$$

donc

$$\frac{dc_i}{c_i} = \frac{df_i}{f_i} - \frac{dF}{F} .$$

Mais

$$dc_i = \frac{dx_i}{\rho}$$

pour un déplacement de P sur une de ses lignes de courbure, ρ étant le rayon de courbure correspondant. On a donc en remplaçant c_i et df_i par leurs valeurs:

$$\frac{F dx_i}{\rho} = f_{ik} dx_k - f_i \frac{dF}{F} .$$

Si, aux trois équations ainsi obtenues :

$$\left(f_{11} - \frac{F}{\rho} \right) dx_1 + f_{12} dx_2 + f_{13} dx_3 - f_1 \frac{dF}{F} = 0$$

$$f_{12} dx_1 + \left(f_{22} - \frac{F}{\rho} \right) dx_2 + f_{23} dx_3 - f_2 \frac{dF}{F} = 0$$

$$f_{13} dx_1 + f_{23} dx_2 + \left(f_{33} - \frac{F}{\rho} \right) dx_3 - f_3 \frac{dF}{F} = 0$$

on ajoute:

$$f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 = 0 ,$$

on aura 4 équations homogènes en dx_1, dx_2, dx_3 et $-\frac{dF}{F}$; il faut donc que l'on ait, quand P se déplace sur une ligne de courbure:

$$\begin{vmatrix} f_{11} - \frac{F}{\varrho} & f_{12} & f_{13} & f_1 \\ f_{12} & f_{22} - \frac{F}{\varrho} & f_{23} & f_2 \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} - \frac{F}{\varrho} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

C'est l'équation du second degré en ϱ dont les deux racines sont les rayons de courbure principaux ϱ_1 et ϱ_2 de la surface en P .

Dans le cas particulier des quadriques:

$$2f \equiv \frac{x_1^2}{A_1} + \frac{x_2^2}{A_2} + \frac{x_3^2}{A_3} - 1 = 0 ,$$

$$f_i = \frac{x_i}{A_i} ; f_{ii} = \frac{1}{A_i} \quad \text{et} \quad f_{ik} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq k ;$$

l'équation en ϱ devient :

$$\begin{aligned} & \frac{x_1^2}{A_1^2} \left(\frac{1}{A_2} - \frac{F}{\varrho} \right) \left(\frac{1}{A_3} - \frac{F}{\varrho} \right) + \frac{x_2^2}{A_2^2} \left(\frac{1}{A_3} - \frac{F}{\varrho} \right) \left(\frac{1}{A_1} - \frac{F}{\varrho} \right) + \\ & + \frac{x_3^2}{A_3^2} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{F}{\varrho} \right) \left(\frac{1}{A_2} - \frac{F}{\varrho} \right) = 0 \end{aligned}$$

ou

$$\varrho^2 - \left[(A_2 + A_3) \frac{x_1^2}{A_1} + (A_3 + A_1) \frac{x_2^2}{A_2} + (A_1 + A_2) \frac{x_3^2}{A_3} \right] F \varrho + A_1 A_2 A_3 F^4 = 0 ,$$

où

$$F^2 = \sum \frac{x_i^2}{A_i^2} .$$

Le coefficient de $-\varrho$, somme des deux rayons de courbure principaux, peut aussi s'écrire:

$$(A_1 + A_2 + A_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) F = \varrho_1 + \varrho_2 .$$

Mais on trouve la même expression en calculant le diamètre d de la sphère tangente à la quadrique en P et orthogonale à sa sphère orthoptique:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = A_1 + A_2 + A_3 .$$

Les 3 équations de la normale n à la quadrique en $P(x_i)$ sont :

$$X_i = x_i + f_i \lambda ;$$

le plan polaire :

$$x_i X_i = A_1 + A_2 + A_3$$

de P par rapport à la sphère orthoptique coupe n au point P' pour lequel

$$\lambda = \sum (A_i - x_i^2)$$

puisque $x_i f_i = 1$; alors PP' ou

$$d = \sum (A_i - x_i^2) F = \varrho_1 + \varrho_2 .$$

On a donc le

Théorème : Le diamètre de la sphère tangente à une quadrique Q en l'un quelconque de ses points P et orthogonale à la sphère orthoptique de Q est égal à la somme des rayons de courbure principaux de la quadrique en P , donc aussi égal à la somme des rayons de courbure des sections normales de Q menées par deux diamètres conjugués quelconques de l'indicatrice de P .

§ 3. Equation aux dérivées partielles des quadriques admettant une sphère donnée comme sphère orthoptique

Pour trouver cette équation nous utiliserons dans l'espace à trois dimensions le système de coordonnées tangentielles analogue à celui que nous avons employé dans le plan au § 1.

Nous considérons la surface comme enveloppe du plan :

$$p = x_1 \cos u \cos v + x_2 \sin u \cos v + x_3 \sin v ;$$

la distance $p = ON$, la longitude u et la latitude v sont les trois coordonnées polaires du pied N de la perpendiculaire abaissée de l'origine O sur le plan; x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées rectangulaires du point de contact P du plan avec la surface. Quand P varie sur la surface, p est une fonction de u et v . Si l'on calcule les dérivées partielles p'_u et p'_v , on voit que le déterminant des coefficients de x_1, x_2 et x_3 dans les expressions de $p, \frac{p'_u}{\cos v}$ et p'_v est égal à un; on a donc :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = p^2 + \left(\frac{p'_u}{\cos v} \right)^2 + p'^2_v$$

ou

$$\overline{PN}^2 = \left(\frac{p'_u}{\cos v} \right)^2 + p'^2_v .$$

Les rayons de courbure principaux ρ_1 et ρ_2 de la surface en P s'expriment à l'aide des dérivées partielles secondes p''_{uu} , p''_{uv} , p''_{vv} . Si l'on désigne par R , S et T les expressions suivantes :

$$R = p + p''_{vv} ; S = \frac{p''_{uv}}{\cos v} + \frac{\sin v}{\cos^2 v} p'_u ; T = \frac{p''_{uu}}{\cos^2 v} - \frac{\sin v}{\cos v} p'_v + p ,$$

on a :

$$R + T = \rho_1 + \rho_2 \quad \text{et} \quad RT - S^2 = \rho_1 \rho_2 .$$

Si donc on reporte sur la normale extérieure n à la surface en P la longueur $PP' = d = \rho_1 + \rho_2$, la sphère de diamètre d sera orthogonale à la sphère fixe : $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$ si l'on a :

$$\left(p + \frac{d}{2}\right)^2 + \overline{PN}^2 = r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

ou

$$p^2 + pd + \left(\frac{p'_u}{\cos v}\right)^2 + p'^2_v = r^2$$

et enfin en remplaçant d par sa valeur $R + T$:

$$p p''_{vv} + p'^2_v + \sec^2 v (p p''_{uu} + p'^2_u) - \operatorname{tg} v \cdot p p'_v + 3p^2 = r^2 .$$

C'est l'équation aux dérivées partielles cherchée.

En posant $p^2 = t$, elle prend la forme simple :

$$t''_{vv} + \sec^2 v \cdot t''_{uu} - \operatorname{tg} v \cdot t'_v + 6t = 2r^2 .$$

En particulier, si $r^2 = A_1 + A_2 + A_3$, les intégrales de cette équation représentées par les quadriques rapportées à leurs axes sont :

$$t = p^2 = (A_1 \cos^2 u + A_2 \sin^2 u) \cos^2 v + A_3 \sin^2 v .$$

Suivant que le nombre des A_i positifs est trois, deux ou un, ces surfaces sont des ellipsoïdes, des hyperboloïdes à une nappe ou des hyperboloïdes à deux nappes.

Les autres intégrales sont les équations tangentielles de ces mêmes quadriques après une rotation quelconque autour de l'origine.

§ 4. Propriété des variétés du second ordre

Nous démontrons maintenant le théorème général relatif à une hyperquadrique située dans un espace à n dimensions.

Théorème : Le diamètre de l'hypersphère tangente à une hyperquadrique Q en l'un de ses points P et orthogonal à l'hypersphère orthoptique de Q est égal à la somme des $(n - 1)$ rayons de courbure principaux de l'hyperquadrique en P .

Dans sa „Theorie der vielfachen Kontinuität“, *Schläfli* avait déjà montré (p. 154) qu'une hyperquadrique Q :

$$\frac{x_1^2}{A_1} + \frac{x_2^2}{A_2} + \dots + \frac{x_n^2}{A_n} = 1$$

a une hypersphère orthoptique.

Si l'on pose :

$$\frac{1}{p^2} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{A_i^2}$$

les cosinus directeurs c_i de la normale à l'hyperquadrique en un de ses points $P(x_i)$ sont :

$$c_i = \frac{p x_i}{A_i}$$

et la distance du centre O au plan tangent en P est :

$$c_i x_i = p ,$$

en supprimant le signe somme ($i = 1, 2, \dots, n$). On a donc aussi pour cette distance p , l'expression :

$$p^2 = A_i c_i^2 .$$

Si l'on mène par l'origine O n directions (1), (2), ..., (n) formant un système orthogonal et si l'on désigne leurs cosinus directeurs respectivement par :

c_{i_1} pour la direction (1), c_{i_2} pour la direction (2), ..., c_{i_n} pour la direction (n), i variant de 1 à n , les hyperplans tangents à Q perpendiculaires à ces n directions formeront aussi un système orthogonal et leurs distances p_k à l'origine seront données par les n équations :

$$p_k^2 = A_i c_{i_k}^2 \quad k = 1, 2, \dots, n .$$

En les additionnant et en remarquant que les c_{ik} satisfont aux conditions d'orthogonalité :

$$\sum_{i=1}^n c_{ik}^2 = 1 ,$$

on a :

$$p_1^2 + \dots + p_n^2 = A_1 + \dots + A_n .$$

Si le point d'intersection I des n hyperplans tangents orthogonaux a les coordonnées X_i , la distance OI sera donnée par :

$$\overline{OI}^2 = X_1^2 + \dots + X_n^2 = p_1^2 + \dots + p_n^2$$

et le lieu géométrique de tous les points analogues à I est l'hypersphère orthoptique :

$$X_1^2 + \dots + X_n^2 = A_1 + \dots + A_n .$$

L'hyperplan polaire π d'un point $P(x_i)$ de l'hyperquadrique Q par rapport à l'hypersphère orthoptique a l'équation :

$$x_i X_i = A_1 + \dots + A_n .$$

La normale n à Q en P est donnée par les n équations :

$$X_i = x_i + \frac{x_i}{A_i} \lambda ;$$

elle coupe π au point P' pour lequel $\lambda = \sum (A_i - x_i^2)$ et le diamètre $PP' = d$ de l'hypersphère tangente à Q en P et orthogonale à l'hypersphère orthoptique de Q est donnée par :

$$d = \frac{1}{p} \sum (A_i - x_i^2) \quad \text{puisque} \quad \sum \frac{x_i^2}{A_i^2} = \frac{1}{p^2} .$$

Il est facile de voir par une méthode analogue à celle du § 2 que d est aussi égal à la somme des rayons de courbure principaux $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}$ de l'hyperquadrique Q en P .

Ces ϱ_i sont, en effet, les racines de l'équation du degré $(n - 1)$ en ϱ :

$$\left| \begin{array}{cccccc} \frac{1}{A_1} - \frac{1}{p\varrho} & 0 & \dots & 0 & \frac{x_1}{A_1} \\ 0 & \frac{1}{A_2} - \frac{1}{p\varrho} & \dots & 0 & \frac{x_2}{A_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{A_n} - \frac{1}{p\varrho} & \frac{x_n}{A_n} \\ \frac{x_1}{A_1} & \frac{x_2}{A_2} & \dots & \frac{x_n}{A_n} & 0 \end{array} \right| = 0$$

ou:

$$\frac{x_1^2}{A_1^2} \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{p\varrho} \right) \dots \left(\frac{1}{A_n} - \frac{1}{p\varrho} \right) + \dots + \frac{x_n^2}{A_n^2} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{p\varrho} \right) \dots \left(\frac{1}{A_{n-1}} - \frac{1}{p\varrho} \right) = 0 .$$

En multipliant par $A_1 A_2 \dots A_n \varrho^{n-1}$ et en tenant compte de l'équation de Q : $\sum \frac{x_i^2}{A_i} = 1$, on voit que le coefficient de $-\varrho^{n-2}$, donc la somme des rayons de courbure principaux de Q en P , est identique à l'expression trouvée pour d :

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_{n-1} = \frac{1}{p} \sum (A_i - x_i^2) = d .$$

Le produit de la distance p par la somme des ϱ_i est égal à la puissance du point P par rapport à l'hypersphère orthoptique de Q .

(Reçu le 31 août 1940.)