

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 13 (1940-1941)

**Artikel:** Über ausgezeichnete Vektorsterne und reguläre Polytope.  
**Autor:** Hadwiger, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-13553>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über ausgezeichnete Vektorsterne und reguläre Polytope

Von H. HADWIGER, Bern

Ein System von  $n$ , alle in einem festen Punkt  $O$  angreifenden Vektoren

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \dots, \mathfrak{a}_n$$

eines  $s$ -dimensionalen Vektorraumes  $R_s$ , nennen wir *Vektorstern*, und bezeichnen einen solchen mit  $\mathfrak{S}_n$ , und schreiben gelegentlich

$$\mathfrak{S}_n \equiv \{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n\}. \quad (1)$$

Wir setzen voraus, daß der Rang von  $\mathfrak{S}_n$  stets gleich  $s$  ist, das heißt, die von den Vektoren des  $\mathfrak{S}_n$  aufgespannte Vektormannigfaltigkeit ist mit dem Vektorraum  $R_s$  identisch. In diese Voraussetzung ist die Bedingung  $n \geq s$  mit eingeschlossen.

Ziel dieser Arbeit ist es, einige durch besondere Eigenschaften ausgezeichnete Typen von Vektorsternen in gegenseitige Beziehung zu bringen. So lassen sich einfache Zusammenhänge nachweisen, die zwischen den Sternen vom *Pohlke'schen* Typus, den *Koordinatensternen* und den regelmäßigen Sternen, insbesondere den den regulären Polytopen zugeordneten *regulären* Sternen bestehen.

Wir entwickeln zunächst die Begriffe, die wir zur Charakterisierung der ausgezeichneten Sterne, die wir studieren werden, verwenden.

Ist  $K$  eine, den Ursprung  $O$  festlassende kongruente Abbildung des Vektorraumes  $R_s$  auf sich, so bezeichnen wir mit  $K[\mathfrak{x}]$  den Bildvektor von  $\mathfrak{x}$ , und in sinngemäßer Übertragung auf alle Vektoren eines Sternes, mit  $K[\mathfrak{S}_n]$  den Bildstern von  $\mathfrak{S}_n$ .

Die Gruppe aller  $K$ , die einen gegebenen Stern  $\mathfrak{S}_n$  invariant lassen, so daß also

$$K[\mathfrak{S}_n] = \mathfrak{S}_n$$

gilt, nennen wir die zum  $\mathfrak{S}_n$  gehörende *Gruppe*. Sie kann auch als Permutationsgruppe der zu  $\mathfrak{S}_n$  gehörenden Vektoren  $\mathfrak{a}_\nu$  aufgefaßt werden, oder als Gruppe von kogredienten Permutationen von Zeilen und Spalten der zu  $\mathfrak{S}_n$  gehörenden *Gram'schen* Matrix

$$A = || (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_k) ||, \quad (2)$$

welche diese in sich überführen.

Auf Grund der Eigenschaften dieser Gruppe lassen sich gewisse wichtige Sterntypen charakterisieren. Ein Stern heißt *transitiv*, wenn seine Gruppe transitiv ist, das heißt, wenn durch Operationen der Gruppe jeder Vektor in jeden anderen übergeführt werden kann. Anschaulich gesehen ist für transitive Sterne charakteristisch, daß hinsichtlich der gestaltlichen Beziehungen, die ein Vektor mit dem gesamten Stern eingeht, alle Vektoren des Sternes äquivalent sind.

Ein Vektor  $\mathfrak{s}$  heißt *Symmetrievektor* eines Sternes  $\mathfrak{S}_n$ , wenn seine Gruppe eine Untergruppe von nur die Vektoren  $\lambda\mathfrak{s}$  invariant lassenden Abbildungen aufweist. Der Vektor  $\mathfrak{s}$  kann zu  $\mathfrak{S}_n$  gehören oder nicht.

Einen Stern nennen wir *symmetrisch*, wenn alle seine Vektoren Symmetrievektoren sind. Einen transitiven und symmetrischen Stern wollen wir *regelmäßig* nennen. Die vom Mittelpunkt eines regulären (konvexen) Polytops nach den Ecken führenden Vektoren bilden einen *regulären Stern*. Die regulären Vielecke des  $R_2$  sollen als reguläre Polytope mitzählen. Im  $R_1$  sei  $\mathfrak{S}_2 \equiv \{\mathfrak{x}, -\mathfrak{x}\}$  der einzige reguläre Stern.

Besonders wichtig ist der aus  $s$  orthogonalen Einheitsvektoren bestehende *Einheitsstern*

$$\mathfrak{E}_s \equiv \{\mathfrak{e}_1, \dots, \mathfrak{e}_s\}. \quad (3)$$

Er ist offenbar transitiv aber nicht symmetrisch. Der *Diederstern* im  $R_3$  ist für  $n > 6$  symmetrisch aber nicht transitiv. Der *Simplexstern*, der zum Simplex gehörende reguläre Stern, ist transitiv und symmetrisch.

Einen weiteren Gesichtspunkt, nach welchem Sterne ausgezeichnet werden können, gewinnt man, wenn man die Eigenwerte der *Gram'schen* Matrix (2), das heißt die  $n$  Wurzeln

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \quad (4)$$

der charakteristischen Gleichung

$$|A - \lambda E| = 0 \quad (5)$$

studiert. So hat *E. Stiefel*<sup>1)</sup> eine Kennzeichnung der *Pohlke'schen* Sterne für den Fall  $n = s + 1$  auf Grund der Eigenwerte (4) gegeben. Unter einem *Pohlke'schen* Stern versteht man einen  $\mathfrak{S}_n$ , der durch schiefe oder orthogonale Parallelprojektion eines  $\mathfrak{E}_n$  im  $R_n$  auf den  $R_s$ ,  $s = n - 1$ , entsteht.

---

<sup>1)</sup> *E. Stiefel*, Zum Satz von Pohlke. Comment. Math. Helv. 10 (1937/38), S. 208 bis 225. Vgl. bes. Satz 4 auf S. 213 und die in Satz 5 auf S. 214 enthaltene Umkehrung.

Für die Entwicklung der in diesem Aufsatz zur Sprache kommenden Zusammenhänge interessieren uns solche Sterne  $\mathfrak{S}_n$ , die durch Orthogonalprojektion eines  $\mathfrak{E}_n$  im  $R_n$  auf einen  $R_s$ ,  $n \geq s$ , entstehen. Wir nennen sie *Pohlke'sche Normalsterne*.

Dem Gedankengang von *Stiefel* folgend, wäre es nicht schwierig, die analogen Bedingungen im Falle eines solchen Sternes für beliebige  $n \geq s$  zu finden. Wir werden aber den bezüglichen Satz später aus anderen leichter folgern. (Es handelt sich um Satz III.)

Allgemein läßt sich über die Eigenwerte (4) aussagen, daß genau  $n - s$  davon verschwinden müssen, da  $s$  der Rang von  $A$  ist. Da weiter  $A$  symmetrisch und nicht negativ definit ist, sind die  $s$  nicht verschwindenden Eigenwerte reell und positiv.

Noch eine letzte für uns wesentliche Definition:

Ein  $\mathfrak{S}_n \equiv \{a_1, \dots, a_n\}$  heißt *Koordinatenstern*, wenn für alle Vektoren  $x$  aus  $R_s$  die Identität gilt

$$\sum_{\nu=1}^n (a_\nu, x) a_\nu = x. \quad (6)$$

Offensichtlich ist ein Einheitsstern  $\mathfrak{E}_s$  ein Koordinatenstern, da ja die Darstellung

$$\sum_{\nu=1}^s (e_\nu, x) e_\nu = x \quad (7)$$

als geläufige Komponentenzerlegung nach den Richtungen der  $s$  Koordinatenvektoren interpretiert wird. Die Bildung von (6) kann als direkte Verallgemeinerung der Darstellung (7) angesehen werden. Da, wie sich später ergeben wird, der  $\mathfrak{E}_s$  der einzige  $\mathfrak{S}_s$  ist, der einen Koordinatenstern darstellt, sind nur die Fälle  $n > s$  interessant.

1. Auf einen ersten Zusammenhang, der zwischen ausgezeichneten Sternen besteht, eintretend, beweisen wir den folgenden Satz:

**Satz I.** *Ein  $\mathfrak{S}_n$  ist dann und nur dann ein Koordinatenstern, wenn er ein Pohlke'scher Normalstern ist.*

Wir überlegen uns, daß im Falle  $n > s$   $\mathfrak{S}_n \equiv \{a_1, \dots, a_n\}$  im  $R_s$  dann und nur dann ein *Pohlke'scher Normalstern* ist, wenn es in einem zu  $R_s$  orthogonalen  $R_{n-s}$  ein  $\bar{\mathfrak{S}}_n \equiv \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$  so gibt, daß die

$$e_\nu = a_\nu + \bar{a}_\nu \quad (8)$$

im  $R_n$ , in den man die Räume  $R_s$  und  $R_{n-s}$  eingelagert hat, einen  $\mathfrak{E}_n$  bilden. Im Falle  $n = s$  gilt offenbar das letzte bereits für die

$$\mathbf{e}_\nu = \mathbf{a}_\nu . \quad (9)$$

Diese Aussagen stellen eine Interpretation der Definition der *Pohlke'schen* Normalsterne dar.

a) Es sei  $\mathfrak{S}_n$ ,  $n > s$ , ein *Pohlke'scher* Normalstern. Es gilt dann

$$\mathbf{e}_\nu = \mathbf{a}_\nu + \bar{\mathbf{a}}_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) , \quad (10)$$

$$(\mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_\mu) = \begin{cases} 1 & (\nu = \mu) \\ 0 & (\nu \neq \mu) . \end{cases}$$

Für alle Vektoren  $\mathbf{x}$  aus  $R_s$  ist

$$(\bar{\mathbf{a}}_\nu, \mathbf{x}) = 0 , \quad (11)$$

insbesondere auch

$$(\bar{\mathbf{a}}_\nu, \mathbf{a}_\mu) = 0 . \quad (12)$$

Da  $\mathfrak{E}_n \equiv \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  im  $R_n$  ein Koordinatenstern ist, gilt für alle Vektoren aus  $R_n$ , insbesondere auch für jeden Vektor  $\mathbf{x}$  aus  $R_s$  ,

$$\sum_{\nu=1}^n (\mathbf{e}_\nu, \mathbf{x}) \mathbf{e}_\nu = \mathbf{x} , \quad (13)$$

oder mit Rücksicht auf (11)

$$\sum_{\nu=1}^n (\mathbf{a}_\nu, \mathbf{x}) (\mathbf{a}_\nu + \bar{\mathbf{a}}_\nu) = \sum_{\nu=1}^n (\mathbf{a}_\nu, \mathbf{x}) \mathbf{a}_\nu + \sum_{\nu=1}^n (\mathbf{a}_\nu, \mathbf{x}) \bar{\mathbf{a}}_\nu = \mathbf{x} . \quad (14)$$

Da der Vektor

$$\sum_{\nu=1}^n (\mathbf{a}_\nu, \mathbf{x}) \bar{\mathbf{a}}_\nu$$

zum Raum  $R_s$ , in dem die beiden anderen in der Relation (14) auftretenden Vektoren liegen, orthogonal ist, muß er verschwinden. Es resultiert

$$\sum_{\nu=1}^n (\mathbf{a}_\nu, \mathbf{x}) \mathbf{a}_\nu = \mathbf{x} , \quad (15)$$

also ist  $\mathfrak{S}_n$  ein Koordinatenstern.

b) Es sei  $\mathfrak{S}_n$ ,  $n > s$ , ein Koordinatenstern. Wir wählen ein System von  $n$  orthogonalen Einheitsvektoren

$$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n ,$$

so daß die ersten  $s$  Vektoren

$$\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_s$$

zu  $R_s$  gehören. Die übrigen Vektoren

$$\mathbf{p}_{s+1}, \dots, \mathbf{p}_n$$

gehören dann zu einem zu  $R_s$  orthogonalen  $R_{n-s}$ . Im  $R_n$  bilden wir nun die  $s$  Vektoren

$$q_i = \sum_{\nu=1}^n (a_\nu, p_i) p_\nu \quad (i = 1, 2, \dots, s); \quad (16)$$

dann ist mit Rücksicht auf die Orthogonalität der  $p_\nu$

$$(q_i, q_k) = \sum_{\nu=1}^n (a_\nu, p_i) (a_\nu, p_k)$$

oder

$$(q_i, q_k) = (p_k, \sum_{\nu=1}^n (a_\nu, p_i) a_\nu),$$

und da  $\mathfrak{S}_n$  ein Koordinatenstern ist, wird

$$\sum_{\nu=1}^n (a_\nu, p_i) a_\nu = p_i$$

so daß

$$(q_i, q_k) = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases} \quad (17)$$

resultiert.

Mit (16) werden somit  $s$  orthogonale Einheitsvektoren definiert. Es lassen sich weitere  $n - s$  Vektoren

$$q_{s+1}, \dots, q_n$$

so hinzufügen, daß ein System von  $n$  orthogonalen Einheitsvektoren

$$q_1, \dots, q_n$$

entsteht. Endlich bilden wir die  $n$  Vektoren

$$e_i = \sum_{\nu=1}^n (q_\nu, p_i) p_\nu \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (18)$$

Aus (16) folgt nun, daß

$$(q_\nu, p_i) = (a_i, p_\nu)$$

ist, so daß wegen

$$\sum_{\nu=1}^s (a_i, p_\nu) p_\nu = a_i$$

folgt

$$e_i = a_i + \bar{a}_i, \quad (19)$$

wenn man

$$\sum_{\nu=s+1}^n (q_\nu, p_i) p_\nu = \bar{a}_i \quad (20)$$

setzt. Die  $\bar{a}_i$  gehören dann zu dem von den Vektoren  $p_\nu$ ,  $\nu \geq s + 1$  auf-

gespannten, zu  $R_s$  orthogonalen  $R_{n-s}$ . Nun ist mit Berücksichtigung von (18)

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \sum_{\nu=1}^n (\mathbf{q}_\nu, \mathbf{p}_i) (\mathbf{q}_\nu, \mathbf{p}_k)$$

oder

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = (\mathbf{p}_k, \sum_{\nu=1}^n (\mathbf{q}_\nu, \mathbf{p}_i) \mathbf{q}_\nu) = (\mathbf{p}_k, \mathbf{p}_i),$$

also

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}. \quad (21)$$

Die Vektoren (19) bilden somit einen  $\mathfrak{E}_n$ , also ist  $\mathfrak{S}_n$  ein *Pohlke'scher* Normalstern.

Man überlegt sich leicht, daß der Beweis für  $n = s$  mit einigen Abänderungen der Ausdrucksweise gleich verläuft. Satz I sagt in diesem Falle aus, daß der  $\mathfrak{E}_s$  der einzige Koordinatenstern  $\mathfrak{S}_s$  im  $R_s$  ist.

2. Durch die Definition des Koordinatensternes wird das Studium der einem beliebigen Stern

$$\mathfrak{S}_n \equiv \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$$

zugeordneten linearen *Vektortransformation*

$$\mathbf{x}' = T(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=1}^n (\mathbf{a}_\nu, \mathbf{x}) \mathbf{a}_\nu \quad (22)$$

nahegelegt. Diese hat folgende Eigenschaften:

$$T(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}) = T(\mathbf{x}) + T(\boldsymbol{\eta}); \quad (23)$$

$$T(\alpha \mathbf{x}) = \alpha T(\mathbf{x}); \quad (24)$$

$$(T(\mathbf{x}), \boldsymbol{\eta}) = (T(\boldsymbol{\eta}), \mathbf{x}). \quad (25)$$

Wir nennen  $\mathbf{x}$  *Eigenvektor* von  $T$ , falls

$$T(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x} \quad \text{ist.} \quad (26)$$

Der zugehörige *Eigenwert*  $\lambda$  ist wegen

$$(T(\mathbf{x}), \mathbf{x}) > 0 \quad (27)$$

positiv. Zwei verschiedenen Eigenwerten zugehörige Eigenvektoren sind orthogonal, denn nach (25) gilt

$$0 = (T(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_2) - (T(\mathbf{x}_2), \mathbf{x}_1) = (\lambda_1 - \lambda_2) (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2).$$

Die Eigenwerte von  $T$  sind nun mit den  $s$  nicht verschwindenden Eigenwerten der *Gram'schen Matrix*

$$A = || (a_i, a_k) || \quad (2)$$

identisch. Ist nämlich  $\lambda$  eine  $r$  fache Wurzel der charakteristischen Gleichung

$$|A - \lambda E| = 0, \quad (5)$$

so besitzt das homogene Gleichungssystem

$$\sum_{\nu=1}^n (a_\nu, a_\mu) x_\nu = \lambda x_\mu \quad (\mu = 1, 2, \dots, n) \quad (28)$$

$r$  linear unabhängige Lösungen. Diese ergeben  $r$  linear unabhängige Eigenvektoren von  $T$ , die zum Eigenwert  $\lambda$  gehören, denn aus (28) folgt

$$\sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n (a_\nu, a_\mu) x_\nu a_\mu = \lambda \sum_{\mu=1}^n x_\mu a_\mu,$$

oder wenn man

$$\sum_{\mu=1}^n x_\mu a_\mu = \mathfrak{x}$$

setzt,

$$T(\mathfrak{x}) = \lambda \mathfrak{x}. \quad (29)$$

Berücksichtigt man noch, daß die zu verschiedenen Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren orthogonal sein müssen, so ergibt sich, daß die  $s$  nicht verschwindenden Eigenwerte von  $A$  Eigenwerte von  $T$  sind, denen  $s$  linear unabhängige Eigenvektoren

$$\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots, \mathfrak{x}_s$$

zugehören. Man darf nach geläufigen Überlegungen annehmen, daß

$$(\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_k) = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

ist. Ist umgekehrt  $\lambda$  ein Eigenwert von  $T$ , so kann er nicht von allen Eigenwerten von  $A$  verschieden sein, da sonst der zugehörige Eigenvektor zu allen  $\mathfrak{x}_i$  orthogonal sein müßte, was aber für keinen nicht verschwindenden Vektor des  $R_s$  möglich ist. Damit ist die oben stehende Behauptung betreffend die Eigenwerte von  $T$  bewiesen. Es ergeben sich folgende Sätze:

**Satz II.** *Ein  $\mathfrak{S}_n$  ist dann und nur dann ein Koordinatenstern, wenn die  $s$  nicht verschwindenden Eigenwerte der Gram'schen Matrix von  $\mathfrak{S}_n$  alle 1 sind.*

Ist nämlich  $\mathfrak{S}_n$  ein Koordinatenstern, so ist  $\lambda = 1$  ein  $s$ -facher Eigenwert, da für alle Vektoren des  $R_s$  die Identität

$$T(\mathfrak{x}) = \mathfrak{x}$$

gilt und umgekehrt. In Verbindung mit Satz I gewinnen wir:

**Satz III.** *Ein  $\mathfrak{S}_n$  ist dann und nur dann ein Pohlke'scher Normalstern, wenn die  $s$  nicht verschwindenden Eigenwerte der Gram'schen Matrix von  $\mathfrak{S}_n$  alle 1 sind.*

3. Es zeigt sich nun, daß viele durch Eigenschaften ihrer Gruppe ausgezeichnete Sterne Koordinatensterne und somit auch Pohlke'sche Normalsterne sind.

Wir zeigen zunächst, daß ein Symmetrievektor eines Sternes Eigenvektor der zugeordneten Vektortransformation  $T$  ist.

Es sei  $\mathfrak{s}$  ein Symmetrievektor von  $\mathfrak{S}_n$ . Nach Definition gibt es dann in der Gruppe von  $\mathfrak{S}_n$  eine Untergruppe kongruenter Abbildungen mit dem invarianten Vektor  $\mathfrak{s}$ , die  $\mathfrak{S}_n$  in sich überführen. Für einen beliebigen Vektor folgt aus

$$\sum_{\nu=1}^n (\mathfrak{a}_\nu, \mathfrak{x}) \mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{x}' \quad (30)$$

$$\sum_{\nu=1}^n (K(\mathfrak{a}_\nu), K(\mathfrak{x})) K(\mathfrak{a}_\nu) = K(\mathfrak{x}'), \quad (31)$$

wo  $K$  eine Operation der Untergruppe ist. Wegen der Invarianz

$$K(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{S}_n$$

erfahren die  $\mathfrak{a}_\nu$  durch  $K$  nur eine Permutation, so daß sich (31) schreiben läßt

$$\sum_{\nu=1}^n (\mathfrak{a}_\nu, K(\mathfrak{x})) \mathfrak{a}_\nu = K(\mathfrak{x}'), \quad (32)$$

oder

$$T(K(\mathfrak{x})) = K(T(\mathfrak{x})). \quad (33)$$

Wählen wir für  $\mathfrak{x}$  nun den invarianten Vektor  $\mathfrak{s}$ , so folgt aus (33) wegen

$$\begin{aligned} K(\mathfrak{s}) &= \mathfrak{s} \\ T(\mathfrak{s}) &= K(T(\mathfrak{s})). \end{aligned} \quad (34)$$

Also ist auch  $T(\mathfrak{s})$  invariant für alle  $K$  der Untergruppe. Hieraus schließen wir

$$T(\mathfrak{s}) = \lambda \mathfrak{s} ,$$

was zu beweisen war.

Man kann nun nach diesen Vorbereitungen den für unsere Ziele wichtigen Satz beweisen:

**Satz IV.** *Jeder einer Kugel vom Radius  $\sqrt{\frac{s}{n}}$  einbeschriebene regelmäßige  $\mathfrak{S}_n$  ist ein Koordinatenstern, also auch ein Pohlke'scher Normalstern.*

Ferner gilt:

**Satz V.** *Jeder einer Kugel vom Radius  $\sqrt{\frac{s}{n}}$  einbeschriebene reguläre  $\mathfrak{S}_n$  ist ein Koordinatenstern, also auch ein Pohlke'scher Normalstern.*

Da für  $s < 4$  unmittelbar eingesehen werden kann, daß die regulären Sterne regelmäßig sind, folgt die Richtigkeit von Satz V für die Vielecks- und Polyedersterne direkt aus Satz IV. Wir folgern später den Satz V aus einem allgemeineren für alle regulären Polytope gültigen Theorem.

Nach Definition ist ein regelmäßiger  $\mathfrak{S}_n$  symmetrisch und transitiv. Wegen der Symmetrie ist jeder Vektor  $\mathfrak{a}_\nu$  von  $\mathfrak{S}_n$  Symmetrievektor, also wie weiter oben bewiesen wurde auch Eigenvektor der zu  $\mathfrak{S}_n$  gehörenden, durch (22) definierten Transformation  $T$ . Es sei also

$$T(\mathfrak{a}_k) = \lambda_k \mathfrak{a}_k \quad (35)$$

und folglich

$$\lambda_k \mathfrak{a}_k^2 = (T(\mathfrak{a}_k), \mathfrak{a}_k) = \sum_{\nu=1}^n (\mathfrak{a}_\nu, \mathfrak{a}_k)^2 . \quad (36)$$

Wegen der Transitivität von  $\mathfrak{S}_n$  gibt es in der Gruppe von  $\mathfrak{S}_n$  eine Operation  $K$ , so daß

$$K(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{S}_n \quad \text{und} \quad K(\mathfrak{a}_k) = \mathfrak{a}_i$$

wird. Da  $K$  eine kongruente Abbildung ist, gilt zunächst nach (36)

$$\lambda_k \mathfrak{a}_k^2 = \sum_{\nu=1}^n (K(\mathfrak{a}_\nu), K(\mathfrak{a}_k))^2 = \sum_{\nu=1}^n (\mathfrak{a}_\nu, \mathfrak{a}_i)^2 = \lambda_i \mathfrak{a}_i^2 ; \quad (37)$$

denn die rechts außen stehende Summe entsteht aus der links benachbarten durch Permutation der Summanden. Da nun die Vektoren transitiver Sterne alle gleich lang sind, folgt aus (37)

$$\lambda_k = \lambda_i = \lambda ; \quad (38)$$

alle Vektoren von  $\mathfrak{S}_n$  sind Eigenvektoren, die zum gleichen Eigenwert  $\lambda$  gehören. Da der Rang von  $\mathfrak{S}_n$  nach Voraussetzung  $s$  ist, muß  $\lambda$  ein  $s$ -facher Eigenwert der zu  $\mathfrak{S}_n$  gehörenden Gram'schen Matrix sein.

Ist  $\varrho$  der Radius der Umkugel von  $\mathfrak{S}_n$ , so ist die Spur der Gram'schen Matrix  $n\varrho^2$ , und da diese eine Invariante ist, gilt

$$n\varrho^2 = s\lambda,$$

oder also

$$\lambda = \frac{n}{s} \varrho^2. \quad (39)$$

Wählen wir für  $\varrho$  den Wert  $\sqrt{\frac{s}{n}}$  so folgt, daß die  $s$  nicht verschwindenden Eigenwerte von  $\mathfrak{S}_n$  alle 1 sind. Mit Rücksicht auf die Sätze II und III ist somit Satz IV bewiesen.

4. Besteht ein  $\mathfrak{S}_n$  aus lauter Einheitsvektoren, so nennen wir ihn *normiert*. Für uns sind diejenigen normierten  $\mathfrak{S}_n$  von Interesse, für die alle nicht verschwindenden Eigenwerte gleich ausfallen. Die Spurrelation ergibt für den  $s$ -fachen Eigenwert

$$\lambda = \frac{n}{s} \quad (40)$$

durch analoge Überlegung, wie vor (39). Für alle Vektoren des Raumes gilt dann

$$T(\mathfrak{x}) = \sum_{\nu=1}^n (\mathfrak{a}_\nu, \mathfrak{x}) \mathfrak{a}_\nu = \frac{n}{s} \mathfrak{x}. \quad (41)$$

In dieser Darstellung kann

$$(\mathfrak{a}_\nu, \mathfrak{x}) \mathfrak{a}_\nu$$

als Projektion des Vektors  $\mathfrak{x}$  auf die durch den Einheitsvektor  $\mathfrak{a}_\nu$  festgelegte Gerade interpretiert werden.

Wir definieren:

Ein Büschel von  $n$  Geraden des  $R_s$  heißt *P-Büschel*, wenn die Summe der  $n$  Projektionen eines beliebigen Vektors  $\mathfrak{x}$  auf die Geraden den Vektor  $\frac{n}{s} \mathfrak{x}$  ergibt.

Nach der voranstehenden Betrachtung ist folgendes klar:

*Ein Geradenbüschel ist dann und nur dann ein P-Büschel, wenn der einer Kugel vom Radius  $\sqrt{\frac{s}{n}}$  einbeschriebene Stern der Richtungsvektoren der Geraden ein Pohlke'scher Normalstern bzw. ein Koordinatenstern ist.*

Für viele Überlegungen ist es wichtig, sich an die sich direkt aus der Definition ergebende Regel zu erinnern:

*Das Vereinigungsbüschel zweier P-Büschel ist wieder ein P-Büschel.*

Spezielle Vorkommnisse derartiger P-Büschel wurden bereits festgestellt:

So hat *E. Schönhardt*<sup>2)</sup> den folgenden Satz ausgesprochen:

„Projiziert man im  $d$ -dimensionalen Raum einen Vektor  $v$  senkrecht auf die sämtlichen  $n$  Kanten eines regulären Körpers gleicher Dimension, so ergibt die Summe der Projektionen den Vektor  $\frac{n}{d} v$ .“

Der zitierte Satz wurde für die Dimensionen  $d = 1, 2, 3$  von *Schönhardt* bewiesen und für  $d > 4$  als Vermutung ausgesprochen.

Das Verfahren, das *Th. Vahlen*<sup>3)</sup> zum Beweise dieses Projektionssatzes eingeschlagen hat, eignet sich für die Verallgemeinerung auf beliebige Dimensionen, und liefert z. B. mühelos das Gewünschte für das  $2s$ -Zell, das  $(s + 1)$ -Zell und das  $2^s$ -Zell.

Nach den Sätzen von *Schönhardt* und *Vahlen* bilden also die Kanten eines regulären Körpers ein P-Büschel.

Es gelingt, wie man leicht einsehen wird, den Satz aus Satz V abzuleiten, so daß sich also die Vermutung von *Schönhardt* im vollen Umfange bestätigt.

5. Es seien  $G_1, G_2, \dots, G_n$   $n$  Geraden eines beliebigen Geradenbüschels im  $R_s$ , und  $\theta_{ik}$  bezeichne den Zwischenwinkel von  $G_i$  und  $G_k$ .

Wir interessieren uns für die Quadratsumme

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \cos^2 \theta_{ik} . \quad (42)$$

Diese ist die sogenannte *Normalspur* der *Gram*'schen Matrix

$$A = || \cos \theta_{ik} || \quad (43)$$

der Richtungseinheitsvektoren, und mit Rücksicht auf ihre Invarianz gilt die Relation

$$\Delta = \sum_{\nu=1}^s \lambda_{\nu}^2 . \quad (44)$$

<sup>2)</sup> *E. Schönhardt*, Über die Summe der Projektionen eines Vektors. Deutsche Mathematik, Jahrg. 2, Heft 3 (1937), S. 446—451. Der zitierte Satz findet sich auf S. 451.

<sup>3)</sup> *Th. Vahlen*, Bemerkungen zu der Arbeit: *E. Schönhardt*, Über die Summe der Projektionen eines Vektors. Deutsche Mathematik, Jahrg. 2, Heft 3 (1937), S. 452—454.

Da andererseits wegen der Spurregel

$$\sum_{\nu=1}^n \lambda_{\nu} = n$$

sein muß, folgert man die Ungleichung

$$\Delta \geq \frac{n^2}{s} . \quad (45)$$

In (45) gilt das Gleichheitszeichen offenbar dann und nur dann, wenn alle Eigenwerte gleich sind. Es gilt somit der folgende Satz:

**Satz VI.** *Ein Geradenbüschel ist dann und nur dann ein P-Büschel, wenn die Quadratsumme der Kosinuswerte der Zwischenwinkel den minimalen Wert  $\frac{n^2}{s}$  annimmt.*

Es sei außerdem  $G$  eine beliebige Gerade im Raum, und  $\theta_{\nu}$  der Zwischenwinkel von  $G$  und  $G_{\nu}$ , des oben betrachteten Büschels. Ist  $\mathbf{e}$ ,  $|\mathbf{e}| = 1$ , Richtungsvektor von  $G$  und  $\mathbf{a}_{\nu}$ ,  $|\mathbf{a}_{\nu}| = 1$ , Richtungsvektor von  $G_{\nu}$ , so gilt

$$(T(\mathbf{e}), \mathbf{e}) = \sum_{\nu=1}^n (\mathbf{a}_{\nu}, \mathbf{e})^2 = \sum_{\nu=1}^n \cos^2 \theta_{\nu} . \quad (46)$$

Sind alle nicht verschwindenden Eigenwerte von  $T$  gleich, so ist

$$T(\mathbf{e}) = \frac{n}{s} \mathbf{e} ,$$

woraus wir mit Rückblick auf (46) folgern, daß stets

$$\sum_{\nu=1}^n \cos^2 \theta_{\nu} = \frac{n}{s} \quad (47)$$

ist. Im umgekehrten Sinne ist der analoge Schluß möglich.

Es ergibt sich:

**Satz VII.** *Ein Geradenbüschel ist dann und nur dann ein P-Büschel, wenn die Quadratsumme der Kosinuswerte der Zwischenwinkel der Büschelgeraden mit einer veränderlichen Geraden konstant ausfällt. Die fragliche Konstante ist  $\frac{n}{s}$ .*

6. Wir bezeichnen ein P-Büschel mit  $n$  Geraden im  $R_s$  mit  $P(n, s)$ . So bilden  $s$  orthogonale Geraden im  $R_s$  offenbar ein  $P(s, s)$ . Nach Satz V gibt es stets ein  $P(n, s)$ , wenn  $n$  die Eckpunktzahl eines regulären Polytops im  $R_s$  ist, oder sich als Summe solcher Zahlen darstellen läßt.

Eine derartige Zerlegung ist für  $s \geq 3$  aber nicht für alle  $n \geq s$  möglich<sup>4</sup>), so daß die Existenz eines  $P(n, s)$  für beliebige  $n \geq s$  zunächst fraglich ist. Wir zeigen aber:

*Existenzsatz: Für jede Zahl  $n \geq s$  existiert ein  $P(n, s)$ .*

Es gilt nämlich:

- a) Aus der Existenz eines  $P(n, s)$  und eines  $P(m, s)$  folgt die Existenz eines  $P(n + m, s)$ .
- b) Aus der Existenz eines  $P(n, s)$  folgt die Existenz eines  $P(n, n - s)$ .

Die Aussage a) ist eine direkte Folge der Definition und wurde früher bereits erwähnt; b) ergibt sich so: Wenn ein  $P(n, s)$  existiert, so gibt es einen der Kugel vom Radius  $\sqrt{\frac{s}{n}}$  einbeschriebener Koordinatenstern

$$\mathfrak{S}_n = \{\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n\}, \quad |\mathfrak{a}_v| = \sqrt{\frac{s}{n}}, \quad \text{im } R_s.$$

Nach der Charakterisierung der Koordinatensterne, die wir zu Beginn von Satz I gewählt haben, gibt es einen Stern

$$\bar{\mathfrak{S}}_n = \{\bar{\mathfrak{a}}_1, \dots, \bar{\mathfrak{a}}_n\} \quad \text{im } R_{n-s},$$

wo  $R_{n-s}$  orthogonal zu  $R_s$  ist, so daß im  $R_n$  die Vektoren

$$\mathfrak{e}_v = \mathfrak{a}_v + \bar{\mathfrak{a}}_v$$

einen  $\mathfrak{E}_n$  bilden. Wegen der Symmetrie dieser Kennzeichnung ist offenbar  $\bar{\mathfrak{S}}_n$  im  $R_{n-s}$  ein Koordinatenstern, und wegen

$$\mathfrak{e}_v^2 = 1 = \mathfrak{a}_v^2 + \bar{\mathfrak{a}}_v^2, \quad |\bar{\mathfrak{a}}_v| = \sqrt{\frac{n-s}{n}},$$

ist  $\bar{\mathfrak{S}}_n$  der Kugel vom Radius  $\sqrt{\frac{n-s}{n}}$  einbeschrieben. So ergibt sich die Existenz eines  $P(n, n - s)$ .

Mit Hilfe von a) und b) gelingt der Existenznachweis für ein beliebiges  $P(n, s)$ ,  $s \geq 2$ , leicht. Wir nehmen einmal an, der Beweis sei geleistet für alle Dimensionen, die kleiner sind als  $s$ . Es gibt also  $P(n, r)$  für alle  $n \geq r$  und  $1 \leq r < s$ ; nach b) gibt es also auch stets ein  $P(r + s, s)$ , und

---

<sup>4</sup>) Im Falle  $s = 3$  z. B. gestatten alle Zahlen eine derartige Zerlegung mit Ausnahme von  $n = 5$ . So bliebe die Existenz eines  $P(5, 3)$  ungewiß.

wegen der Existenz des  $P(s, s)$  nach a) ein  $P(ks + r, s)$ ,  $1 \leq r < s$ ,  $1 \leq k$ , sowie auch ein  $P(ks, s)$ .

Der Existenzsatz ist somit auch richtig für die Dimension  $s$ . Da er aber für  $s = 1$  (trivialerweise) richtig ist, ist er für alle  $s$  richtig, w. z. b. w.

7. Wir beweisen jetzt:

*Die vom Mittelpunkt eines regulären Polytops durch die Eckpunkte gelegten Geraden bilden ein  $P$ -Büschel<sup>5)</sup>.*

Nach Satz VI genügt es, nachzurechnen, daß die Quadratsumme der Kosinuswerte der Zwischenwinkel den kleinsten Wert  $\frac{n^2}{s}$  erreicht.

In der unten folgenden Tabelle sind die zu dieser Verifikation erforderlichen Elemente zusammengestellt<sup>6)</sup>.

Die Kolonnen der Tabelle enthalten:

1. Die Dimension  $s$  des Raumes.
2. Die Bezeichnung des regulären Polytops.
3. Die Eckpunktzahl  $n$ .
4. Die Nummer  $i$  der Sorte von Kosinuswerten. Die  $n^2$  Elemente der *Gram*'schen Matrix wurden zweckmäßig in Sorten gleicher Elemente eingeteilt.
5. Die Zahl  $m_i$  der in der  $i$ -ten Sorte enthaltenen gleichen Kosinuswerte. Offenbar gilt  $\sum m_i = n^2$ .
6. Der Kosinuswert  $\cos \theta_i$  der  $i$ -ten Sorte.
7. Die Quadratsumme

$$\Delta = \sum m_i \cos^2 \theta_i .$$

8. Der Wert  $\lambda$  der  $s$  nicht verschwindenden, zusammenfallenden Eigenwerte der *Gram*'schen Matrix des Polytops.

Es stellt sich in der Tat heraus, daß  $\Delta$  stets den Wert  $\frac{n^2}{s}$  annimmt.

Mit dem obenstehenden Satz ist nun auch der äquivalente Satz V, dessen Beweis wir noch schuldig geblieben sind, sichergestellt.

<sup>5)</sup> Bei allen Polytopen mit Gegenecken wird die entsprechende Achse zweimal geliefert, und muß im  $P$ -Büschel auch doppelt gezählt werden. Selbstverständlich bilden in diesen Fällen die einfach gezählten Geraden ebenfalls ein  $P$ -Büschel mit halber Geradenzahl. So entsteht z. B. aus dem Oktaederbüschel mit 6 Geraden das Orthogonalbüschel mit 3 Geraden.

<sup>6)</sup> Als Unterlage diente: *A. Urech, Polytopes réguliers de l'espace à  $n$  dimensions et leurs groupes de rotations*, Thèse E. P. F., Zurich (1925).

$s$	Polytop	$n$	$i$	$m_i$	$\cos \theta_i$	$A$	$\lambda$
2	Reguläres $n$ -Eck	$n$	$i$	$n$	$\cos \frac{2(i-1)\pi}{n}$ $i = 1, 2, \dots, n$	$\frac{n^2}{2}$	$\frac{n}{2}$
3	Tetraeder	4	1	4	1	$\frac{16}{3}$	$\frac{4}{3}$
			2	12	$-\frac{1}{3}$		
3	Hexaeder	8	1	8	1	$\frac{64}{3}$	$\frac{8}{3}$
			2	24	$\frac{1}{3}$		
			3	24	$-\frac{1}{3}$		
			4	8	$-1$		
3	Oktaeder	6	1	6	1	12	2
			2	24	0		
			3	6	$-1$		
3	Ikosaeder	12	1	12	1	48	4
			2	60	$\frac{1}{\sqrt{5}}$		
			3	60	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$		
			4	12	$-1$		
3	Dodekaeder	20	1	20	1	$\frac{400}{3}$	$\frac{20}{3}$
			2	60	$\frac{\sqrt{5}}{3}$		
			3	120	$\frac{1}{3}$		
			4	120	$-\frac{1}{3}$		
			5	60	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$		
			6	20	$-1$		
4	5-Zell	5	1	5	1	$\frac{25}{4}$	$\frac{5}{4}$
			2	20	$-\frac{1}{4}$		
4	16-Zell	8	1	8	1	16	2
			2	48	0		
			3	8	$-1$		

$s$	Polytop	$n$	$i$	$m_i$	$\cos \theta_i$	$A$	$\lambda$
4	8-Zell	16	1	16	1	64	4
			2	64	$\frac{1}{2}$		
			3	96	0		
			4	64	$-\frac{1}{2}$		
			5	16	-1		
4	24-Zell	24	1	24	1	144	6
			2	192	$\frac{1}{2}$		
			3	144	0		
			4	192	$-\frac{1}{2}$		
			5	24	-1		
4	600-Zell	120	1	120	1	3600	30
			2	1440	$\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$		
			3	2400	$\frac{1}{2}$		
			4	1440	$\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$		
			5	3600	0		
			6	1440	$\frac{1 - \sqrt{5}}{4}$		
			7	2400	$-\frac{1}{2}$		
			8	1440	$\frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$		
			9	120	-1		
4	120-Zell	600	1	600	1	90000	150
			2	2400	$\frac{1 + 3\sqrt{5}}{8}$		
			3	7200	$\frac{5 + \sqrt{5}}{8}$		
			4	14400	$\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$		

$s$	Polytop	$n$	$i$	$m_i$	$\cos \theta_i$	$A$	$\lambda$
4	120-Zell (Fortsetzung)	600	5	7200	$\frac{3}{4}$	90000	150
			6	2400	$\frac{-1 + 3\sqrt{5}}{8}$		
			7	14400	$\frac{3 + \sqrt{5}}{8}$		
			8	14400	$\frac{\sqrt{5}}{4}$		
			9	19200	$\frac{1}{2}$		
			10	14400	$\frac{1 + \sqrt{5}}{8}$		
			11	7200	$\frac{5 - \sqrt{5}}{8}$		
			12	14400	$\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$		
			13	16800	$\frac{1}{4}$		
			14	14400	$\frac{-1 + \sqrt{5}}{8}$		
			15	14400	$\frac{3 - \sqrt{5}}{8}$		
			16	32400	0		
			17	14400	$\frac{-3 + \sqrt{5}}{8}$		
			18	14400	$\frac{1 - \sqrt{5}}{8}$		
			19	16800	$-\frac{1}{4}$		
			20	14400	$\frac{1 - \sqrt{5}}{4}$		
			21	7200	$\frac{-5 + \sqrt{5}}{8}$		
			22	14400	$\frac{-1 - \sqrt{5}}{8}$		
			23	19200	$-\frac{1}{2}$		
			24	14400	$-\frac{\sqrt{5}}{4}$		

$s$	Polytop	$n$	$i$	$m_i$	$\cos \theta_i$	$A$	$\lambda$
4	120-Zell (Fortsetzung)	600	25	14400	$\frac{-3 - \sqrt{5}}{8}$	90000	150
			26	2400	$\frac{1 - 3\sqrt{5}}{8}$		
			27	7200	$-\frac{3}{4}$		
			28	14400	$\frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$		
			29	7200	$\frac{-5 - \sqrt{5}}{8}$		
			30	2400	$\frac{-1 - 3\sqrt{5}}{8}$		
			31	600	$-1$		
$s$	$s+1$ -Zell	$s+1$	1	$s+1$	1	$\frac{(s+1)^2}{s}$	$\frac{s+1}{s}$
			2	$s(s+1)$	$-\frac{1}{s}$		
$s$	$2s$ -Zell	$2s$	1	$2s$	1	$4s$	2
			2	$4s(s-1)$	0		
			3	$2s$	$-1$		
$s$	$2s$ -Zell	$2s$	$i$	$2s \binom{s}{i}$ $(i=0, 1, \dots, s)$	$1 - \frac{2i}{s}$ $(i=0, 1, \dots, s)$	$\frac{4s}{s}$	$\frac{2s}{s}$

Zum Schlusse weisen wir noch auf folgendes hin: Wenn man außer der durch Satz VII klargestellten, für  $P$ -Büschel charakteristischen Eigenschaft der Winkel der Büschelgeraden mit einer beliebigen Geraden, verlangt, daß die Summe der Kosinuskwerte verschwindet, so gelangt man zu dem von *L. Schläfli* eingeführten Begriff des eutaktischen Büschels. Herr *W. Gruner* in Bern machte mich in freundlicher Weise darauf aufmerksam, daß bereits *L. Schläfli* die Eutaxie der regulären Büschel hergeleitet hat. <sup>7)</sup>

(Eingegangen den 9. August 1940.)

<sup>7)</sup> *L. Schläfli*, Theorie der vielfachen Kontinuität, herausgegeben von *J. H. Graf*, Bern 1901, § 35. Über die Summe der Quadrate der Projektionen eines Strahles auf symmetrisch verteilte Richtungen, S. 134—139.