

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 12 (1939-1940)

Artikel: Sur les zéros de quelques classes de fonctions.
Autor: Obrechkoff, Nikola
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-12793>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sur les zéros de quelques classes de fonctions

Par NIKOLA OBRECHKOFF, Sofia

1. M. Pólya¹⁾ a démontré des théorèmes pour les zéros des fonctions

$$\frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^q}) , \quad \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{x^{q-1}}{1+x^q} \right) \quad (1)$$

où q est un nombre entier positif. Par une autre méthode nous démontrons des résultats nouveaux pour les zéros d'une classe assez générale de fonctions qui contient les fonctions (1) aussi dans le nouvel cas où q n'est pas un nombre entier.

I. Soit $f(x)$ un polynôme arbitraire dont les zéros sont tous réels et positifs. Soient encore p et q deux nombres arbitraires réels et positifs et considérons la fonction

$$y(x) = x^p f(x^q) . \quad (2)$$

Alors la fonction $y^{(n)}(x^{\frac{1}{q}})$, s'annule seulement pour x réel et non négatif si $n < p + 1$. Si p est un nombre entier cette propriété est vraie pour $n < p + q + 1$. Si encore q est entier le même est valable pour chaque $n = 1, 2, 3, \dots$

En effet on obtient facilement la formule

$$y^{(n)}(x) = x^{p-n} P_n(x^q) , \quad (3)$$

$$P_n(x) = (p+1-n) P_{n-1}(x) + q x P'_{n-1}(x) , \quad P_0(x) = f(x) . \quad (4)$$

Supposons que le polynôme $P_{n-1}(x)$ a seulement des zéros réels et positifs. De (4), en appliquant un raisonnement de Laguerre²⁾ on voit tout de suite que dans le cas $n < p + 1$ les zéros du polynôme $P_n(x)$ sont réels. Ils seront positifs puisque les coefficients de $P_n(x)$ ont seulement des variations des signes.

Considérons maintenant le cas où p est un nombre entier. Alors on a

$$y^{(p)}(x) = P_p(x^q) ,$$

où $P_p(x)$ a tous ses zéros réels et positifs. On obtient

$$y^{(p+m)}(x) = q x^{q-m} P_{p+m}(x^q) .$$

¹⁾ G. Pólya, The Tôhoku Mathematical Journal, 19, 1921, p. 241—248.

G. Pólya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, t. II, 1925, Berlin, p. 46, 231.

²⁾ E. Laguerre, Oeuvres, t. I, Paris, 1898, p. 200; voir la première formule de cette page.

D'après le résultat obtenu $P_{p+m}(x)$ a seulement des zéros réels et positifs si $m < q + 1$. Si q est entier le même sera valable pour $P_{p+q}(x)$ et suivant la même marche de démonstration on voit que tous les polynomes $P_n(x)$ ont seulement des zéros réels positifs.

On voit facilement que le théorème reste valable si l'on suppose que $f(x)$ a tous ses zéros réels.

D'après un théorème de Laguerre chaque fonction entière qui est limite d'une suite de polynomes, dont les zéros sont réels et positifs, a la forme

$$f(x) = A e^{-\lambda x} x^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right),$$

où $\lambda \geq 0$, $\alpha_n > 0$ et la série $\sum_1^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}$ est convergente. Pour simplicité nous dirons que $f(x)$ est du type I. Suivant Laguerre chaque fonction entière limite des polynomes dont les zéros sont réels a la forme

$$f(x) = B e^{-\gamma x^2 + \delta x} x^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right) e^{\frac{x}{\alpha_n}},$$

où $\gamma \geq 0$, δ , α_n réels, $\sum_1^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2}$ convergente. Disons avec M. Pólya que $f(x)$ est du type II.

Alors du théorème I par une passage à la limite on obtient tout de suite.

II. Soit $f(x)$ une fonction du type I et soient p et q deux nombres positifs. Désignons par

$$y(x) = x^p f(x^q).$$

Alors la fonction $y^{(n)}(x^{\frac{1}{q}})$ pour $n < p + 1$ s'annule seulement pour $x \geq 0$. Si p est entier cela est vraie pour $n < p + q + 1$ et si encore q est entier le même est valable pour chaque n . Si la fonction $f(x)$ est du type II il reste la même conclusion pour la fonction $y^{(n)}(x^{\frac{1}{q}})$ en remplaçant l'intervalle $x \geq 0$ par $-\infty < x < \infty$, c'est-à-dire cette fonction s'annule seulement pour x réel.

Considérons par exemple le cas où

$$f(x) = e^{-\gamma x^2 + \delta x},$$

$\gamma > 0$, δ réel. Alors si p et q sont nombres entier et positifs les zéros de la fonction

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^p e^{-\gamma x^{2q} + \delta x^q}), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

sont situés sur les démi-droites sortant de l'origine et passant respectivement par les points $\exp\left(\frac{2\pi ki}{q}\right)$, $\exp\left(\frac{2k+1}{q}\pi i\right)$, $n=0, 1, 2, \dots, q-1$. En suivant la même marche de démonstration on obtient le théorème:

III. Soient p et q deux nombres entiers négatifs et soit $f(x)$ une fonction entière du type I. Alors, en posant $y(x) = x^p f(x^q)$, la fonction $y^{(n)}(x^{\frac{1}{q}})$, $n = 1, 2, 3, \dots$, s'annule seulement pour $x \geq 0$. Si $f(x)$ est du type II la fonction $y^{(n)}(x^{\frac{1}{q}})$ s'annule seulement pour x réel.

De la même manière on peut démontrer des théorèmes pour les zéros des fonctions de la forme

$$\frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{x^p f(x^q)}{(1+x^q)^m} \right].$$

2. Des recherches de M. Pólya³⁾ on peut tirer le théorème suivant:

IV. Soit D la région du plan de z , bornée par deux droites parallèles qui font avec l'axe réel l'angle φ . Considérons les suites

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots \quad (5)$$

qui ont la propriété suivante: pour chaque polynôme $f(z)$ dont les zéros se trouvent dans D , le polynôme

$$\lambda_0 f(z) + \lambda_1 f'(z) + \lambda_2 f''(z) + \dots \quad (6)$$

a aussi tous ses zéros dans D . La condition nécessaire et suffisante pour que la suite (5) a cette propriété est que la fonction $\lambda(ze^{-i\varphi})$, où

$$\lambda(z) = \lambda_0 + \lambda_1 z + \lambda_2 z^2 + \dots \quad (7)$$

soit entière du type II. Si $P(z)$ est un polynôme réel arbitraire, le polynôme

$$\lambda_0 P(z) + \lambda_1 P'(z) + \lambda_2 P''(z) + \dots \quad (8)$$

a au moins autant de zéros réels que $P(z)$.

³⁾ G. Pólya, Comptes Rendus, 183, 1926, p. 413—414.

N. Obrechkoff, Annuaire de l'Université à Sofia, 23, 1927, p. 177—200.

E. Benz, Comment. Mathem. Helv., 7, 1935, p. 243—289.

Nous donnons quelques applications nouvelles. Soit $F(x)$ une fonction intégrable dans l'intervalle $(-a, a)$, $a > 0$, et soit $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Supposons que les zéros du polynôme $f(z)$ de degré m se trouvent dans D et considérons le polynôme

$$g(z) = \int_{-a}^a F(x) f(z + x) dx . \quad (9)$$

Nous avons

$$g(z) = \lambda_0 f(z) + \lambda_1 f'(z) + \cdots + \lambda_m f^{(m)}(z) ,$$

où

$$\lambda_p = \frac{1}{p!} \int_{-a}^a F(x) x^p dx .$$

Pour la fonction $\lambda(iz)$ nous avons

$$\lambda(iz) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i^p z^p}{p!} \int_{-a}^a F(x) x^p dx = \int_{-a}^a F(x) e^{izx} dx . \quad (10)$$

Ainsi nous avons obtenu le théorème suivant:

V. Si la fonction (10) est entière et du type II le polynôme (9) a tous ses zéros dans D . $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$.

Dans le cas particulier $F(x) = 1$, $\lambda(iz) = 2 \frac{\sin az}{z}$, on obtient un théorème de M. Meisner⁴⁾, qu'il a démontré en se basant sur un de mes résultats⁵⁾. Soit $F(x)$ une fonction intégrable dans $(0, a)$ et posons $\overline{F(x)} = F(-x)$. La fonction

$$\varphi(z) = \int_{-a}^a F(x) e^{izx} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{-a}^a F(x) (ix)^n dx \quad (11)$$

est réelle et de genre ≤ 1 . Donc si elle a seulement des zéros réels elle sera du type II. D'après la deuxième partie du théorème cité, le polynôme

$$\sum \frac{P^{(n)}(z)}{n!} \int_{-a}^a F(x) (ix)^n dx = \int_{-a}^a F(x) P(z + ix) dx$$

a au moins autant de zéros réels que $P(z)$. Ainsi nous avons:

VI. Soit $F(x)$ une fonction intégrable dans $(-a, a)$, telle que $F(-x) = \overline{F(x)}$, et supposons que la fonction entière

$$\int_{-a}^a F(x) e^{izx} dx \quad (12)$$

⁴⁾ L. Meisner, The Tôhoku Mathematical Journal, 44, 1938, p. 175—177.

⁵⁾ N. Obrechkooff, The Tôhoku Mathematical Journal, 38, 1933, p. 93—100.

a seulement des zéros réels. Si $P(z)$ est un polynôme réel arbitraire, le polynôme

$$\int_{-a}^a F(x) P(z + ix) dx \quad (13)$$

a au moins autant de zéros réels que $P(z)$.

On doit à M. Pólya et Schur⁶⁾ le théorème suivant:

Si la fonction (14) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est entière et du type II et le polynôme

$$Q(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$$

a tous ses zéros réels et négatifs, le polynôme

$$a_0 b_0 + 1! a_1 b_1 z + 2! a_2 b_2 z^2 + \dots \quad (15)$$

a aussi tous ses zéros réels.

En prenant pour (14) la fonction (12) on voit que (15) a la forme $\int_{-a}^a F(x) Q(izx) dx$, et on obtient le théorème:

VII. Supposons que la fonction (12) a seulement des zéros réels et soit $Q(z)$ un polynôme dont tous les zéros sont réels et négatifs. Alors le polynôme

$$\int_{-a}^a F(x) Q(izx) dx$$

a seulement des zéros réels.

(Reçu le 3 juillet 1939.)

⁶⁾ G. Pólya und I. Schur, Journal für die reine und angew. Mathematik, 144, 1914, p. 89—113.