Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 12 (1939-1940)

Artikel: Über die allgemeine lineare Differentialgleichung.

Autor: Li, Ta

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12790

Über die allgemeine lineare Differentialgleichung

Von Ta li, Lantien, China

Anmerkung der Redaktion. Herr *Fréchet* (Paris) schreibt uns zu der vorliegenden Arbeit: „L'intégration d'une équation linéaire d'ordre n (1) est, comme on sait équivalente à celle d'un système canonique linéaire S de n équations du premier ordre à n inconnues. Or le problème consistant à donner une expression formelle (et rigoureuse) de la solution générale de S (quand par exemple les coefficients de S sont continus[1])), a été résolu par plusieurs auteurs. Chacune des solutions se trouve exprimée, comme dans l'expression (2) de M. Ta Li, par une série d'intégrales multiples d'ordre croissant portant sur des polynomes de degrés croissants par rapport aux coefficients (fonctions de x) de S. C'est le résultat obtenu d'abord par *Peano*, Math. Ann. vol. 32, 1888, p. 459, puis indépendamment par *Baker* dans le cas de coefficients analytiques au moyen de la théorie des matrices (Proceedings London Math. Soc., vol. 34, 1902, p. 354 et 356, vol. 35, 1903, p. 333—378; vol. 2, sér. 2, 1904, p. 293—296; Phil. Trans. Royal Soc., A. Vol. 216, 1915—16, p. 129 à 186). Ce résultat s'obtient pour ainsi dire sans calcul comme l'a signalé *M. Hostinský* (Le problème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires, Publ. Fac. Sc. Univ. Masaryk, Brno, Nr. 230, 1936) par une simple application de la méthode des approximations successives. Il en résulte immédiatement la formule correspondante pour l'intégrale générale de l'équation générale linéaire d'ordre n (voir par exemple: Leçons sur les équations différentielles, par *M. Fréchet*, p. 126—129; [voir aussi p. 109—111], chez Tournier et Constant, Paris, 1938). Mais dans l'expression obtenue, il y a des simplifications à faire. La formule (2) de M. *Ta Li* a le grand intérêt de se présenter toutes simplifications faites."

Einleitung

Trotzdem das Studium der linearen Differentialgleichung sehr weit zurückreicht, ist es uns nur in einzelnen Fällen gelungen, Lösungen in geschlossener Form anzugeben, wenn die Ordnung der Gleichung höher als eins ist. Der Beweis von Liouville dafür, daß die allgemeine Differentialgleichung zweiter Ordnung nicht elementar integrierbar ist, könnte uns leicht zu der Vermutung führen, daß die linearen Differentialgleichungen zum Teil keine geschlossenen Lösungen besäßen, so daß auch die nicht geschlossenen Lösungen ihre Berechtigung fänden.

Dem genialen Gedanken zur Lösung der linearen Integralgleichung analog gab es zur Integration der allgemeinen Differentialgleichung erster Ordnung die Methode der sukzessiven Approximation von Picard. Sie kann auf die binomische lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung übertragen werden, während die Übertragung auf die beliebige lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung nicht ohne weiteres möglich ist,

[1]) Pour le cas des coefficients discontinus, voir: Sur l'intégration d'un système canonique d'équation différentielles linéaires à coéfficients discontinus, par *M. Fréchet*, Proceed. Benares Math. Math. Soc. (sous presse).

wovon wir uns leicht überzeugen können, wenn wir die Auflösungsmethode der binomischen algebraischen Gleichung auf eine beliebige algebraische Gleichung auszudehnen versuchen.

Die Übertragung wird dann erst möglich, wenn man den Differentialoperator als eine Größe auffaßt und die allgemeine lineare Gleichung als eine binomische behandelt. Fügen wir noch eine Potenz der unabhängigen Veränderlichen hinzu, so können wir durch Variation des Exponenten n formale Lösungen erhalten. Wir werden zeigen, daß sie unter den von Picard gemachten Voraussetzungen alle gleichmäßig konvergieren und ein Fundamentalsystem bilden. Für den Fall der konstanten Koeffizienten besteht zwischen den neuen Lösungen und den bekannten Exponentialen eine sehr einfache Beziehung, ebenso bei der Cauchyschen oder homogenen Differentialgleichung. Wegen ihrer raschen Konvergenz, linearen Unabhängigkeit und einfachen Beziehung zu den klassischen Lösungen scheint es mir nicht überflüssig, diese Arbeit zur Veröffentlichung zu bringen, zumal da sie in allen Fällen brauchbare Lösungen liefert, auch da, wo man bis jetzt außer Potenzreihenentwicklung keine Auflösungsmethode besitzt. Ferner ist zu bemerken, daß wir in dieser Arbeit durchaus nur von reduzierten oder homogenen Differentialgleichungen sprechen, da die vollständigen durch die Methode der Variation der Konstanten leicht erledigt werden können, falls ein Fundamentalsystem der reduzierten bekannt ist. In § 3 wird eine neue Definition der Irreduzibilität eingeführt, wodurch die Frage, ein geschlossenes Integral einer linearen algebraischen Differentialgleichung zu gewinnen, auf diejenige zurückgeführt wird, zu untersuchen, ob sie nach unserer Definition reduzibel ist. Die Lösung einer irreduziblen algebraischen Differentialgleichung n-ter Ordnung wird von uns als Differentialtranszendenz n-ter Ordnung bezeichnet. Im 2. Kapitel werden die binomischen Differentialgleichungen behandelt, da sie durch ihre Eigenschaften sich auszeichnen.

Kapitel I

Die allgemeine lineare Differentialgleichung

§ 1. Lösungen und ihre gleichmäßige Konvergenz.

Es sei n eine positive ganze Zahl, y eine noch zu bestimmende Funktion von x und $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ ihre Ableitungen in bezug auf x, dann heißt:

$$f_0(x)\, y^{(n)} - \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x)\, y^{(n-\nu)} =$$

$$= f_0(x)\, y^{(n)} - f_1(x)\, y^{(n-1)} - f_2(x)\, y^{(n-2)} - \cdots - f_n(x)\, y = 0 \text{ mit } f_0(x) \not\equiv 0$$

eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit den bekannten Funktionen $f_0(x)$, $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ als Koeffizienten, die wir in einem gewissen Intervall etwa $a \leqq x \leqq b$ als beschränkt voraussetzen wollen. Der Einfachheit halber wollen wir $f_0(x) \equiv 1$ annehmen und $y^{(\nu)} = D^\nu y$ setzen. Hiernach kann die obige Differentialgleichung in der binomischen Form:

$$y^{(n)} - \Big(\sum_{\lambda=0}^{n-1} f_{n-\lambda}(x) D^\lambda\Big)\, y = 0 \tag{1}$$

geschrieben werden, wobei $\sum\limits_{\lambda=0}^{n-1} f_{n-\lambda}(x)\, D^\lambda$ vorläufig als eine bekannte Größe zu betrachten ist.

Zur Lösung der Gleichung setzen wir an:

$$y = g(x) + \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{n} \sum_{\lambda=0}^{n-1} f_{n-\lambda}(x)\, D^\lambda g(x)\, dx^n$$

$$+ \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{n} \sum_{\lambda_1=0}^{n-1} f_{n-\lambda_1}(x)\, D^{\lambda_1} \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{n} \sum_{\lambda=0}^{n-1} f_{n-\lambda}(x)\, D^\lambda g(x)\, dx^{2n} +$$

$$\underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{n} \sum_{\lambda_2=0}^{n-1} f_{n-\lambda_2}(x)\, D^{\lambda_2} \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{n} \sum_{\lambda_1=0}^{n-1} f_{n-\lambda_1}(x)\, D^{\lambda_1} \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{n} \sum_{\lambda=0}^{n-1} f_{n-\lambda}(x)\, D^\lambda g(x)\, dx^{3n} + \cdots,$$

wobei $g(x)$ eine noch zu bestimmende Funktion von x, c eine in Betracht kommende und zwischen a und b gelegene Stelle ist. Durch Einsetzen des Ansatzes in die Gleichung (1) ergibt sich als Bedingung für $g(x)$:*)

$$g^{(n)}(x) \equiv 0\,,$$

also muß $g(x)$ die Form: $\sum\limits_{\lambda=0}^{n-1} a_\lambda (x - c)^\lambda$ haben. Zur Abkürzung wollen wir:

$$y_\mu(x) = \frac{(x-c)^\mu}{\mu\,!} +$$

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{n} \Big(\sum_{\lambda=0}^{n-1} f_{n-\lambda}(x) \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{n-\lambda}\Big)^{\varrho} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \frac{(x-c)^{\mu-\lambda}}{(\mu-\lambda)\,!} f_{n-\lambda}(x)\, dx^{\varrho(n-\lambda)+n}\,, \tag{2}$$

$$\mu = 0, 1, 2, \ldots n-1$$

setzen. Angenommen die Reihen (2) seien gleichmäßig konvergent und n-mal differenzierbar in dem Intervall $< a, b >$, was wir bald beweisen

*) Anm. der Redaktion: Siehe zu dem Beweise die Bemerkungen von Herrn Kienast, dieses Heft, S. 20.

werden, dann sind (2) n partikuläre Lösungen von (1), welche, wie wir später einsehen werden, voneinander linear unabhängig sind.

Um zu zeigen, daß die Reihen (2) gleichmäßig konvergieren, setzen wir voraus, daß in $< a, b >$:

$$e^{|x-c|} < N \quad \text{und} \quad |f_{n-\lambda}(x)| < M \;, \quad \lambda = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \;, \tag{3}$$

bleiben; dann bilden offensichtlich:

$$\frac{|x-c|^{\mu}}{\mu} + \sum_{\varrho=0}^{\infty} M^{\varrho} \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{n} \Big(\sum_{\lambda=0}^{n-1} \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{n-\lambda} \Big)^{\varrho} MN\, dx^{\varrho(n-\lambda)+n} \,,$$

$$\mu = 0, 1, 2, \ldots n-1$$

Majoranten von (2). Bezeichnen wir nun:

$$\Big(\sum_{\lambda=0}^{n-1} \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{n-\lambda} \Big)^{\varrho} dx^{\varrho(n-\lambda)}$$

mit $a_{\varrho}(x)$, so ist

$$|a_{\varrho}(x)| \leqslant N^{\varrho} \frac{|x-c|^{\varrho}}{\varrho\,!} \,. \tag{4}$$

Für $\varrho = 0, 1$ trifft es offenbar zu, dann folgt aber unter Annahme der Gültigkeit für ϱ, daß:

$$|a_{\varrho+1}(x)| = \Big| \sum_{\lambda=0}^{n-1} \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{n-\lambda} a_{\varrho}(x)\, dx^{n-\lambda} \Big| \leqq N^{\varrho} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{|x-c|^{\varrho+\nu}}{(\varrho+\nu)!}$$

$$< N^{\varrho} \frac{|x-c|^{\varrho+1}}{(\varrho+1)\,!} e^{|x-c|} < N^{\varrho+1} \frac{|x-c|^{\varrho+1}}{(\varrho+1)\,!} \,.$$

Also (4) gilt auch für $\varrho + 1$. Daher gilt es ganz allgemein. Hiernach sind die Glieder der Majoranten kleiner als die von:

$$\frac{|x-c|^{\mu}}{\mu\,!} + MN \sum_{\varrho=0}^{\infty} \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{n} \frac{(MN\,|x-c|)^{\varrho}}{\varrho\,!}\, dx^n, \; \mu = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

deren Summen offenbar:

$$\frac{|x-c|^{\mu}}{\mu\,!} + \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{n} e^{MN\,|x-c|}\, dx^n$$

sind und unterhalb

$$\frac{|x-c|^{\mu}}{\mu\,!} + N^{MN} \frac{|x-c|^{n}}{n\,!}$$

liegen. Hiernach sind die Reihen (2) alle in $< a, b >$ gleichmäßig konvergent. Sie konvergieren noch rascher als die der Exponentialfunktion.

Daß sie unter den Voraussetzungen (3) n-mal differenzierbar sind, ergibt sich aus (2), da die Reihen:

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} \Big(\sum_{\lambda=0}^{n-1} f_{n-\lambda}(x) \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{n-\lambda}\Big)^{\varrho} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \frac{(x-c)^{\mu-\lambda}}{(\mu-\lambda)!} f_{n-\lambda}(x)\, dx^{\varrho(n-\lambda)}$$

bereits gleichmäßig konvergieren.

§ 2. Lineare Unabhängigkeit.

Betrachten wir nun die Wronskische Determinante der n durch (2) gegebenen Funktionen: $y_0(x), y_1(x), \ldots, y_{n-1}(x)$:

$$\varDelta(x) = \begin{vmatrix} y_0(x), & y_1(x), & \ldots\ldots\ldots & y_{n-1}(x) \\ y_0'(x), & y_1'(x), & \ldots\ldots\ldots & y_{n-1}'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_0^{(n-1)}(x), & y_1^{(n-1)}(x), & \ldots\ldots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}, \tag{5}$$

dann erhalten wir nach der Definition der bestimmten Integrale für $\nu, \mu = 0, 1, 2, \ldots n-1$,

$$y_{\mu}^{(\nu)}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-c)^{\mu-\nu}}{(\mu-\nu)!} + \\ \displaystyle\sum_{\varrho=0}^{\infty} \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{n-\nu} \Big(\sum_{\lambda=0}^{n-1} f_{n-\lambda}(x) \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{n-\lambda}\Big)^{\varrho} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \frac{(x-c)^{\mu-\lambda}}{(\mu-\lambda)!} f_{n-\lambda}(x)\, dx^{\varrho(n-\lambda)+n-\nu} \\ \qquad\qquad \text{falls } \nu \leqq \mu, \\ \displaystyle\sum_{\varrho=0}^{\infty} \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{n-\nu} \Big(\sum_{\lambda=0}^{n-1} f_{n-\lambda}(x) \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{n-\lambda}\Big)^{\varrho} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \frac{(x-c)^{\mu-\lambda}}{(\mu-\lambda)!} f_{n-\lambda}(x)\, dx^{\varrho(n-\lambda)+n-\nu} \\ \qquad\qquad \text{falls } \nu > \mu, \end{cases} \tag{6}$$

und

$$y_{\mu}^{(\nu)}(c) = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu \neq \mu \\ 1 & \text{für } \nu = \mu, \end{cases} \tag{7}$$

so daß an der Stelle c die Wronskische Determinante gleich 1 wird.

Hiernach ist: $\varDelta(x) \not\equiv 0$. Die Funktionen $y_0(x), y_1(x), \ldots, y_{n-1}(x)$ sind also voneinander linear unabhängig. Sie bilden daher ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (1). Die allgemeine Lösung von (1) lautet dann:

$$y(x) = \sum_{\mu=0}^{n-1} c_\mu y_\mu(x) \ , \tag{8}$$

wobei $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ beliebige Konstante bedeuten. Mittels (8) können wir das sogenannte Cauchysche Problem leicht erledigen, wenn man $c_\nu = y^{(\nu)}(c)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ als die vorgeschriebenen Anfangswerte wählt.

§ 3. Differentialtranszendenz höherer Ordnung.

Es seien $P_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, p$ teilfremde Polynome von x und $\lambda_{i,\varrho}$, $\varrho = 0, 1, 2, \ldots, n$ positive ganze Zahlen. Wir wollen eine Summe von Gliedern der Form:

$$P_i(x)\, y^{\lambda_{i,0}} (y')^{\lambda_{i,1}} \ldots (y^{(n)})^{\lambda_{i,n}}$$

betrachten und von ihnen diejenigen Glieder herausgreifen, welche die höchste Ableitung in höchster Potenz enthalten, und von diesen herausgegriffenen diejenigen, welche die zweithöchste Ableitung in höchster Potenz enthalten usw. Schließlich kommen wir zu einem wohlbestimmten Glied, welches wir als „*Hauptglied*" bezeichnen wollen. Dieses wollen wir an die Spitze stellen. Von den übriggebliebenen Gliedern wird ein zweites Hauptglied abgesondert, welches wir an die zweite Stelle setzen. In dieser Weise werden alle Glieder geordnet. Setzen wir nun diese so geordnete Summe gleich Null, so bekommen wir eine algebraische Differentialgleichung, welche wir als „*geordnet*" bezeichnen wollen. Es ist leicht einzusehen, daß es für jede algebraische Differentialgleichung nur eine solche Darstellung gibt. Eine geordnete algebraische Differentialgleichung heißt von n-ter Ordnung, wenn darin die Ableitung $y^{(n)}$ wirklich vorkommt.

Es sei nun:

$$\sum_{i=1}^{p} P_i(x)\, y^{\lambda_{i,0}} (y')^{\lambda_{i,1}} \ldots (y^{(n)})^{\lambda_{i,n}} = 0 \,, \tag{9}$$

eine geordnete algebraische Differentialgleichung n-ter Ordnung. Wir nennen sie irreduzibel, wenn sie mit keiner algebraischen Differentialgleichung niedrigerer Ordnung eine Lösung gemeinsam hat, sonst reduzibel. Unsere Erklärung der Irreduzibilität ist zwar eine ganz andere als die gewöhnliche[2]), welche sich bloß auf reduzierte lineare algebraische

[2]) Gewöhnlich wird eine reduzierte lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit polynomen Koeffizienten als irreduzibel bezeichnet, wenn sie mit keiner solchen Gleichung niedrigerer Ordnung eine Lösung gemeinsam hat, sonst heißt sie reduzibel.

Differentialgleichungen bezieht, doch werden wir auf die letztere verzichten.

Nun führen wir die folgende Definition ein:

Definition: *Eine einer algebraischen Differentialgleichung genügende Funktion heißt eine Differentialtranszendenz n-ter Ordnung, wenn die niedrigste Ordnung ihrer algebraischen Differentialgleichungen n ist.*

Zum Beispiel die Funktionen $e^{\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx}$, $e^{\int_1^x \frac{\cos x}{x} dx}$ genügen keiner algebraischen Differentialgleichung nullter und erster Ordnung. Die einfachste Differentialgleichung, die sie erfüllen, ist:

$$\left(x \frac{y'}{y}\right)'^2 + \left(x \frac{y'}{y}\right)^2 = 1 \ ,$$

trotzdem diese Gleichung die weitere Lösung $y = x$ besitzt, also eigentlich reduzibel ist. Die Funktionen sind dann Differentialtranszendenzen zweiter Ordnung.

Ferner genügt die Funktion $y = e^{e^x}$ erst der algebraischen Differentialgleichung

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' - \frac{y'}{y} = 0 \ ,$$

welche offenbar die Lösung $y = c$ besitzt, also reduzibel ist. Daher ist e^{e^x} eine Differentialtranszendenz zweiter Ordnung.

Bei der Gamma-Funktion haben wir dagegen kennengelernt, daß sie überhaupt keiner algebraischen Differentialgleichung genügt.

Um zu zeigen, daß es wirklich irreduzible algebraische Differentialgleichungen höherer Ordnung gibt, betrachten wir das folgende Beispiel

$$y'' - xy = 0 \tag{10}$$

Die Gleichung geht nämlich durch die Transformation

$$y' = yz \tag{11}$$

über in

$$z' = x - z^2 \tag{12}$$

Nach dem Existenzsatz im komplexen Gebiet hat die Differentialgleichung (12) eine überall reguläre Lösung $z = \varphi(x)$ durch jeden Punkt. Diese in Potenzreihe darstellbare Lösung kann nicht abbrechen, da die Gleichung (12) offenbar keine polynome Lösung besitzt. Die einzige Singularität von $\varphi\left(\frac{1}{\xi}\right)$ ist dann die wesentliche singuläre Stelle $\xi = 0$. Dies besagt, daß die Gleichung (12) keine algebraische Lösung besitzt. Denn wäre

$$\sum_{\lambda=0}^{m} P_\lambda(x)\ z^\lambda = 0\ ,$$

wobei $P_\lambda(x)$ Polynome vom höchstens k-ten Grade sind, so haben wir

$$\sum_{\lambda=0}^{m} \xi^k P_\lambda\left(\frac{1}{\xi}\right) z^\lambda\left(\frac{1}{\xi}\right) = \sum_{\lambda=0}^{m} Q_\lambda(\xi)\ z^\lambda\left(\frac{1}{\xi}\right) = 0\ ,$$

wobei $Q_\lambda(\xi)$ Polynome von ξ bedeuten. Hiernach ist $z\left(\frac{1}{\xi}\right)$ wiederum eine algebraische Funktion von ξ. Dann kann sie höchstens Verzweigungspunkte und Pole haben, so daß $\xi = 0$ sicherlich keine wesentliche Singularität von $z\left(\frac{1}{\xi}\right)$ sein kann. Daraus folgt, daß $z = \varphi(x)$ keine algebraische Funktion ist. Aus (11) ergibt sich als Lösung von (10)

$$y = C\, e^{\int z(x)\cdot dx}\ .$$

Diese ist sicherlich keine algebraische Funktion, da $\int z(x)\, dx$ erst Logarithmus von algebraischer Funktion sein kann, wenn z selbst es ist. Wegen

$$y' = C z\, e^{\int z\, dx}$$

und (11) kann weder y noch y'/y einer algebraischen Gleichung genügen. Hiernach ist die Gleichung (10) auch in unserem Sinne irreduzibel. Ebenfalls kann die Irreduzibilität der allgemeinen Besselschen Differentialgleichung

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)\, y = 0 \tag{14}$$

leicht bestätigt werden.

Nach unserer Definition ist die Lösung einer irreduziblen algebraischen Differentialgleichung n-ter Ordnung sicherlich eine Differentialtranszendenz n-ter Ordnung. Die algebraischen Funktionen sind dann solche nullter Ordnung, während die Exponentialfunktion, die trigonometrischen und Hyperbel-Funktionen Differentialtranszendenzen erster Ordnung sind. Beispielsweise genügt $\sin x$ der Differentialgleichung $y'^2 + y^2 = 1$, die Umkehrung der Hyperbelfunktion $ln\,(x + \sqrt{x^2 + 1})$ der Gleichung $(x^2 + 1)\, y'^2 = 1$, während die Funktionen $e^{\sqrt{x}}$, $e^{-\sqrt{x}}$ die Differentialgleichung $4xy'^2 - y^2 = 0$ und die Funktionen $e^{\arcsin(2x-1)}$, $e^{-\arcsin(2x-1)}$ die Gleichung $x\,(1 - x)\, y'^2 = y^2$ erfüllen.

Die Besselschen Funktionen

$$J_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\nu}}{\nu!\,\Gamma(n+\nu+1)} \tag{15}$$

bilden dagegen Beispiele von Differentialtranszendenzen zweiter Ordnung. Nach dieser Auseinandersetzung gibt es dann unendlich viele Werte von x etwa x_0, für welche die Zahlen $J_n(x_0)$ weder einer algebraischen Gleichung noch einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung genügen, so daß sie im Gegensatz zu e und π als Transzendenzen zweiter Ordnung zu betrachten sind.

Hiernach liegt die Vermutung nahe, daß die Zahlen $\kappa_{2\mu+1}$, welche durch die harmonische Reihe

$$\kappa_{2\mu+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\mu+1}}\,, \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \ldots \tag{16}$$

gegeben sind, Transzendenzen höherer Ordnung sein können. Aus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi x}{n} = -\log\left(2\sin\frac{\pi}{2}x\right) \tag{17}$$

folgt nämlich:

$$\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi x}{n^3} = \int_0^x \int_0^x \log\left(2\sin\frac{\pi}{2}x\right) dx^2 + \kappa_3\,, \tag{18}$$

zwar durch einen leicht zu bestätigenden Grenzübergang und eine weitere Integration. Die Differentialgleichung für (17) ist offenbar

$$\left(\frac{2}{\pi}y^{(4)}\right)^2 = 1 + \left(\frac{2}{\pi}y^{(3)}\right)^2\,, \tag{19}$$

also ist sie eine algebraische Transzendenz vierter Ordnung. Dies zeigt uns ganz deutlich, warum die Darstellung der Zahlen $\kappa_{2\mu+1}$ durch die Zahlen e und π nicht geht.

Diese Einteilung der Funktionen nach der niedrigsten Ordnung ihrer algebraischen Differentialgleichung ermöglicht uns die Theorie der algebraischen Funktionen auf Differentialtranszendenzen zu übertragen. Doch wollen wir hierauf nicht eingehen.

§ 4. Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

Betrachten wir nun die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$y^{(n)} - \sum_{\lambda=1}^{n-1} a_\lambda y^{(n-\lambda)} = 0 \,, \tag{20}$$

dann sind nach (2), wenn wir $c = 0$ wählen:

$$\begin{aligned} y_\mu &= \frac{x^\mu}{\mu\,!} + \sum_{\varrho=0}^{\infty} \Big(\sum_{\lambda=0}^{n-1} a_{n-\lambda} \underbrace{\int_0^x \cdots \int_0^x}_{n-\lambda}\Big)^\varrho \sum_{\lambda=0}^{\mu} a_{n-\lambda} \frac{x^{n+\mu-\lambda}}{(n+\mu-\lambda)!} dx^{\varrho(n-\lambda)} = \\ &= \frac{x^\mu}{\mu\,!} + S_\mu(x)\,, \qquad \mu = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \end{aligned} \tag{21}$$

n lineare unabhängige partikuläre Lösungen von (20). Während die klassische Methode uns als Lösungen die Exponentialfunktionen $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}$, liefert, wobei $r_1, r_2, \ldots, r_n$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung:

$$r^n - \sum_{\lambda=0}^{n} a_\lambda r^{n-\lambda} = 0$$

sind, welche wir zunächst als *voneinander verschieden* voraussetzen wollen. Multiplizieren wir y_μ mit r_k^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$) und zählen die Produkte zusammen, so erhalten wir:

$$e^{r_k x} = \sum_{\mu=0}^{n-1} r_k^\mu y_\mu \tag{22}$$

eine Beziehung zwischen unseren Lösungen und den klassischen. Die Relation (22) ist sehr leicht zu bestätigen, da sowohl $y_\mu (\mu = 0, 1, \ldots n-1)$, als auch $e^{r_\mu x}$ ($\mu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) ein Fundamentalsystem bilden und $S_\mu(x)$ mit $\frac{x^n}{n!}$ beginnt.

Falls die charakteristische Gleichung *mehrfache Wurzeln* hat, etwa $r_m = r_{m+1} = \cdots = r_n$, geht (22) in:

$$\left.\begin{aligned} e^{r_k x} &= \sum_{\mu=0}^{n-1} r_k^\mu y_\mu \qquad k = 1, 2, \ldots, m \\ x^\varrho e^{r_m x} &= \varrho\,! \sum_{\mu=\varrho}^{n-1} \binom{\mu}{\varrho} r_m^{\mu-\varrho} y_\mu \,, \quad \varrho = 1, 2, \ldots, n-m \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

über, eine einfache Beziehung, welche leicht bewiesen werden kann.

§ 5. Cauchysche oder homogene Differentialgleichung.

Die Differentialgleichung

$$x^n\, y^{(n)} - \sum_{\lambda=1}^{n} a_\lambda\, x^{n-\lambda}\, y^{(n-\lambda)} = 0 \tag{24}$$

wird gewöhnlich als Cauchysche oder homogene Differentialgleichung bezeichnet. Sie hat nach (2), falls $c = 1$ gewählt wird, n linear unabhängige Lösungen:

$$y_\mu(x) = \frac{(x-1)^\mu}{\mu\,!} +$$

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} \underbrace{\int_1^x \cdots \int_1^x}_{n} \Big(\sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{a_{n-\lambda}}{x^{n-\lambda}} \underbrace{\int_1^x \cdots \int_1^x}_{n-\lambda}\Big)^{\varrho} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \frac{a_{n-\lambda}\,(x-1)^{\mu-\lambda}}{(\mu-\lambda)\,!\; x^{n-\lambda}}\, dx^{\varrho(n-\lambda)+n} \tag{25}$$

während uns der Ansatz x^r die Lösungen:

$$x^{r_1},\; x^{r_2},\; x^{r_3},\; \ldots,\; x^{r_n}$$

liefert, falls $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ die Wurzeln der algebraischen Gleichung:

$$n\,!\binom{r}{n} - \sum_{\lambda=1}^{n} (n-\lambda)\,!\; a_\lambda \binom{r}{n-\lambda} = 0 \tag{26}$$

sind, welche wir zuerst als *voneinander verschieden* voraussetzen wollen. Da die Lösungen (25) ein Fundamentalsystem bilden, können wir setzen:

$$x^\nu = \sum_{\varrho=0}^{n-1} c_{\nu\varrho}\, y_\varrho\,. \tag{27}$$

Daraus folgt durch Differentiation:

$$\mu\,!\binom{r_\nu}{\mu} x^{r_\nu-\mu} = \sum_{\varrho=0}^{n-1} c_{\nu\varrho}\, y_\varrho^{(\mu)} \qquad \mu = 1, 2, \ldots, n-1\,. \tag{28}$$

Für $x = 1$ ergibt sich dann:

$$c_{\nu\mu} = \mu\,!\binom{r_\nu}{\mu} \qquad \mu = 0, 1, 2, \ldots, n-1\,, \tag{29}$$

so daß zwischen den neuen Lösungen und den klassischen die einfache Beziehung:

$$x^{r_\nu} \equiv \sum_{\mu=0}^{n-1} \mu\,!\binom{r_\nu}{\mu}\, y_\mu \tag{30}$$

besteht. Falls die Gleichung (6) *mehrfache Wurzeln* hat, etwa

$$r_m = r_{m+1} = \cdots = r_n$$

wollen wir für die positive ganze Zahl μ:

$$x^r (l n x)^\mu = f(x, \mu) \tag{31}$$

setzen, dann wird:

$$x f'(x, \mu) = r f(x, \mu) + \mu f(x, \mu - 1) \ .$$

Daraus durch wiederholte Differentiation:

$$x f^{(\nu+1)} (x, \mu) = (r - \nu) f^{(\nu)} (x, \mu) + \mu f^{(\nu)} (x + \mu - 1) \ , \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{32}$$

was durch vollständige Induktion zu beweisen ist.

Für $\mu = 1$ und $x = 1$ erhalten wir:

$$f(1, 1) = 0 \ , \quad f'(1, 1) = 1 \ , \quad f^{(2)}(1, 1) = 2 r - 1 \ ,$$
$$f^{(3)}(1, 1) = 3 r^2 - 6 r + 2 \ , \quad \text{usw.}$$

Mittels (32) können dann $f^{(\nu)} (1, 2), f^{(\nu)} (1, 3) \ldots$ leicht ausgerechnet werden, da $f(1, \mu) = 0$ für $\mu \geqq 1$. Hiernach, wenn man:

$$\sum_{\lambda=0}^{n-1} c_{m+\mu, \lambda} \, y_\lambda = x^{r_m} (l n x)^\mu \ , \quad \mu = 1, 2, \ldots, n - m$$

ansetzt, kann man $c_{m+\mu, \lambda}$ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n - 1)$ leicht ausrechnen. Es sind dann:

$$c_{m+\mu, \lambda} = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda < \mu \\ \mu! & \text{für } \lambda = \mu \\ f^{(\lambda)}(1, \mu) & \text{für } \lambda > \mu \end{cases} .$$

Die einfache Beziehung (30) geht dann in:

$$\left. \begin{aligned} x^{r_\nu} &\equiv \sum_{\mu=0}^{n-1} \mu! \binom{r_\nu}{\mu} y_\mu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots m) \\ x^{r_m} (l n x)^\mu &= \mu! \, y_\mu + \sum_{\lambda=1}^{n-\mu-1} f^{(\mu+\lambda)} (1, \mu) \, y_{\mu+\lambda} \end{aligned} \right\} \tag{33}$$

$$\mu = 1, 2, 3, \ldots, n - m \ ,$$

über, was ebenfalls einfach ist.

Daß die Formel (25) auch im Fall einer Cauchyschen Differentialgleichung erster Ordnung die richtige Lösung liefert, möge am Beispiel:

$$xy' - ay = 0$$

gezeigt werden. In diesem Falle liefert (25), falls $c = 1$ gewählt wird:

$$y_0 = 1 + \frac{1}{1!}(a \ln x)^1 + \frac{1}{2!}(a \ln x)^2 + \frac{1}{3!}(a \ln x)^3 + \cdots = \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{1}{\varrho!}(a \ln x)^\varrho = x^a$$

als Lösung der gegebenen Differentialgleichung. Sie stimmt offenbar überein mit der klassischen bekannten Lösung.

Kapitel II

Binomische Differentialgleichung

Die allgemeine Formel (2) kann unter Umständen beträchtlich vereinfacht werden, besonders wenn die Gleichung (1) nur 2 Glieder enthält. In diesem Fall geht (1) in:

$$y^{(n)} - f(x)\, y = 0 \tag{34}$$

über. Die Untersuchung dieser Gleichung gibt uns eine viel genauere Auskunft über die Natur der linearen Differentialgleichung. Wegen der außerordentlich raschen Konvergenz unter ganz milder Beschränkung über die Funktion $f(x)$ möge die binomische Differentialgleichung (34) einen besonderen Platz einnehmen.

§ 6. Lösungen, ihre Konvergenz und Differenzierbarkeit.

Es sei λ eine positive ganze Zahl, welche höchstens gleich n ist, und $f(x)$ eine Funktion, für die das Integral:

$$\underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{\lambda} f(x)\, dx^\lambda \qquad \text{für} \qquad a \leqq x \leqq b$$

existiert. Wir wollen eine solche Funktion als in $< a, b, >$ λ-integrierbar bezeichnen. Für sie gibt es dann mindestens eine positive Zahl M derart, daß:

$$\Big|\underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{\lambda} f(x)\, dx^\lambda\Big| < M \qquad \text{für} \qquad a \leqq x \leqq b\,. \tag{35}$$

Auf Grund dieser Ungleichung können wir zeigen, daß die Reihen:

$$y_\mu(x) = \frac{(x-c)^\mu}{\mu!} + \sum_{\varrho=0}^{\infty} \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{n} \Big(f(x) \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{n}\Big)^\varrho \frac{(x-c)^\mu}{\mu!} f(x)\, dx^{(\varrho+1)n}, \tag{36}$$

$$\mu = 0, 1, 2, \ldots, n-1\,,$$

gleichmäßig konvergieren, falls $f(x)$ λ-integrierbar und λ kleiner als n ist. Sie konvergieren auch dann noch gleichmäßig, wenn $f(x)$ n-integrierbar ist und M kleiner als $\frac{1}{2^n}$ bleibt.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß für jede positive ganze Zahl μ die Beziehung:

$$\underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{\lambda} (x-c)^\mu f(x)\, dx^\lambda =$$

$$= \sum_{\varrho=0}^{\lambda} (-1)^\varrho \varrho! \binom{\lambda}{\varrho} \binom{\mu}{\varrho} \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{\varrho} (x-c)^{\mu-\varrho} \Big(\underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{\lambda} f(x)\, dx^\lambda\Big)\, dx^\varrho \tag{37}$$

besteht. Sie gilt offenbar für $\lambda = 0, 1, 2, 3$. Angenommen, sie sei für $\lambda = k$ gültig, dann folgt wegen $\binom{k}{\varrho} + \binom{k}{\varrho-1} = \binom{k+1}{\varrho}$, daß sie auch für $\lambda = k+1$ gilt. Hieraus ergibt sich die Ungleichung:

$$\Big|\underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{\lambda} (x-c)^\mu f(x)\, dx^\lambda\Big| < M \sum_{\varrho=0}^{\lambda} \varrho! \binom{\lambda}{\varrho} \binom{\mu}{\varrho} \Big|\underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{\varrho} (x-c)^{\mu-\varrho} dx^\varrho\Big| =$$

$$= M \sum_{\varrho=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\varrho} |x-c|^\mu = M\, 2^\lambda |x-c|^\mu\,. \tag{38}$$

Daraus erhalten wir:

$$\Big|\underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{n} \frac{(x-c)^\mu}{\mu!} f(x)\, dx^n\Big| < M\, 2^\lambda \Big|\underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{n-\lambda} \frac{(x-c)^\mu}{\mu!} dx^{n-\lambda}\Big| =$$

$$= M\, 2^\lambda \frac{|x-c|^{\mu+n-\lambda}}{(\mu+n-\lambda)!}\,,$$

folglich:

$$\Big|\underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{n} \Big(f(x) \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{n}\Big)^\varrho \frac{(x-c)^\mu}{\mu!} f(x)\, dx^{(\varrho+1)n}\Big| < \frac{(M\, 2^\lambda)^{\varrho+1} |x-c|^{\mu+(\varrho+1)(n-\lambda)}}{\{\mu+(\varrho+1)(n-\lambda)\}!}\,, \tag{39}$$

was durch vollständige Induktion leicht zu beweisen ist, da die Ungleichung offenbar für $\varrho = 0$ gilt. Hiernach sind:

$$| x - c |^{\mu} \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{\{ M\, 2^{\lambda} | x - c |^{n-\lambda} \}^{\varrho}}{\{ \mu + \varrho (n - \lambda) \} !} \tag{40}$$

Majoranten von (36), so daß für $\lambda < n$ die Reihen (36) überall gleichmäßig konvergieren, wo (35) gilt. Falls $\lambda = n$ ist, geht (40) in:

$$\frac{| x - c |^{\mu}}{\mu !} \sum_{\varrho=0}^{\infty} (M\, 2^{n})^{\varrho}$$

über. Die Reihen (36) sind dann sicher gleichmäßig konvergent, wenn $M < \frac{1}{2^n}$ bleibt. Damit haben wir unsere Behauptung vollständig bewiesen.

Um zu zeigen, daß (36) auch dann noch Lösungen von (34) sind, wenn $f(x)$ λ-integrierbar ist, müssen wir zunächst die Differenzierbarkeit der Reihen (36) untersuchen. Dazu benötigen wir den

Hilfssatz: Es seien $f_{\nu}(x)\,(\nu = 0, 1, 2, 3 \ldots)$ stetig, $f(x)$ λ-integrierbar und $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu}(x) = F(x)$ gleichmäßig konvergent in dem geschlossenen Intervall $< a, b >$, dann ist die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} f(x)\, f_{\nu}(x)$ gliedweise λ-integrierbar in demselben Intervall.

Beweis: Da $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu}(x) = F(x)$ gleichmäßig konvergiert, gibt es für jede positive kleine Größe ε eine positive ganze Zahl p derart, daß für $n \geqq p$ die Ungleichung:

$$\Big| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} f_{\nu}(x) \Big| = \Big| F(x) - \sum_{\nu=0}^{n} f_{\nu}(x) \Big| < \varepsilon \quad \text{für} \quad a \leqq x \leqq b$$

gilt. Mit Rücksicht auf (35) ergibt sich:

$$\Big| \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{\lambda} f(x) F(x)\, dx^{\lambda} - \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{\lambda} f(x) \sum_{\nu=0}^{n} f_{\nu}(x)\, dx^{\lambda} \Big| =$$

$$= \Big| \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{\lambda} f(x) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} f_{\nu}(x)\, dx^{\lambda} \Big| < \varepsilon \Big| \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{\lambda} f(x)\, dx^{\lambda} \Big| < \varepsilon M < \varepsilon' ,$$

wobei ε' wiederum eine kleine Größe ist. Hiernach erhalten wir:

$$\underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{\lambda} f(x) \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)\, dx^\lambda \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{\lambda} f(x) f_\nu(x)\, dx^\lambda ,$$

was zu beweisen war.

Fassen wir die Integration als das Umkehrungsverfahren der Differentiation auf, so kann der obige Satz auch folgendermaßen ausgedrückt werden:

Es sei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$ *gleichmäßig konvergent,* $f(x)$ *λ-integrierbar in* $< a, b >$, *dann kann die offenbar in* $< a, b >$ *gleichmäßig konvergente Reihe* $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{\lambda} f(x) f_\nu(x)\, dx^\lambda$ *λ-mal gliedweise differenziert werden.*

Auf Grund dieser Tatsache können wir jede der gleichmäßig konvergenten Reihen (36) n-mal differenzieren und das Resultat in (34) einsetzen. Daraus folgt dann der folgende Satz:

Ist $\lambda < n$ *und* $f(x)$ *eine λ-integrierbare Funktion in* $< a, b >$, *dann sind* (36) *n linear unabhängige Lösungen von* (34). *Sie sind nicht nur stetig, sondern auch* $(n - \lambda)$*-mal stetig differenzierbar in* $< a, b >$.

§ 7. Potenzreihenentwicklung.

Sollen die Lösungen (36) von (34) Potenzreihenentwicklungen haben, müssen wir $f(x)$ notwendig als in der Form:

$$f(x) \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(c)}{\nu!} (x - c)^\nu \tag{41}$$

darstellbar voraussetzen, wobei die Potenzreihe einen von Null verschiedenen Konvergenzradius besitzt. Setzt man (41) in:

$$a_{\varrho+1}(x) = \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{n} \Big(f(x) \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{n}\Big)^\varrho \frac{(x-c)^\mu}{\mu!} f(x)\, dx^{(\varrho+1)n}$$

ein, dann erhalten wir nach wiederholter Integration:

$$\begin{aligned} a_{\varrho+1}(x) = \frac{(x-c)^\mu}{\mu!} \frac{(x-c)^{(\varrho+1)n}}{(n!)^{\varrho+1}} \sum_{\lambda_{\varrho+1}=0}^{\infty} \sum_{\lambda_\varrho=0}^{\lambda_{\varrho+1}} \cdots \\ \cdots \sum_{\lambda_1=0}^{\lambda_2} \frac{f^{(\lambda_1)}(c)\, f^{(\lambda_2-\lambda_1)}(c) \ldots f^{(\lambda_{\varrho+1}-\lambda_\varrho)}(c)\;\; (x-c)^{\lambda_{\varrho+1}}}{\lambda_1!\,(\lambda_2-\lambda_1)! \ldots (\lambda_{\varrho+1}-\lambda_\varrho)! \prod\limits_{\nu=1}^{\varrho+1} \binom{\nu n + \mu + \lambda_\nu}{n}} \end{aligned} \tag{42}$$

Diese Formel gilt offenbar für $\varrho = 0$. Durch vollständige Induktion ergibt sich dann, daß sie allgemein gültig ist.

Setzt man (42) in (36) ein, dann erhalten wir nach Umordnung der Glieder (was wegen der gleichmäßigen Konvergenz erlaubt ist), die Potenzreihenentwicklungen von (36):

$$y_\mu(x) = \frac{(x-c)^\mu}{\mu!}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-c)^{kn}}{(n!)^k}\left\{ \sum_{\varrho=0}^{k-1} \cdot \sum_{\lambda_{k-\varrho}=0}^{n-1} \; \sum_{\lambda_{k-\varrho-1}=0}^{\varrho n+\lambda_{k-\varrho}} \; \sum_{\lambda_{k-\varrho-2}=0}^{\lambda_{k-\varrho-1}} \cdots \sum_{\lambda_1=0}^{\lambda_2} \cdot \right.\right.$$

$$\cdot \frac{(n!)^\varrho f^{(\lambda_1)}(c)\, f^{(\lambda_2-\lambda_1)}(c) \ldots f^{(\varrho n+\lambda_{k-\varrho}-\lambda_{k-\varrho-1})}(c)\,(x-c)^{\lambda_{k-\varrho}}}{\lambda_1!\,(\lambda_2-\lambda_1)!\ldots(\varrho n+\lambda_{k-\varrho}-\lambda_{k-\varrho-1})!\binom{kn+\mu+\lambda_{k-\varrho}}{n}\prod_{\nu=1}^{k-\varrho-1}\binom{\nu n+\mu+\lambda_\nu}{n}} +$$

$$\left.\left. + \frac{(f(c))^k}{\prod_{\nu=1}^{k}\binom{\nu n+\mu}{n}} \right\}\right]; \qquad \mu = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \; . \tag{43}$$

§ 8. Gleichung erster Ordnung.

Für $n = 1$ hat die Gleichung:

$$y' - f(x)y = 0 \tag{44}$$

die bekannte Lösung:

$$y = c^{\int_c^x f(x)\,dx} \; ,$$

welche ein ganz anderes Aussehen hat als:

$$y = \sum_{\varrho=0}^{\infty} \left(\int_c^x f(x)\right)^\varrho dx^\varrho \; . \tag{45}$$

Doch ist es nicht schwer zu zeigen, daß die Lösungen identisch gleich sind. Denn die Beziehung:

$$\underbrace{\int_c^x f(x)^\varrho \cdots \int_c^x}_{\varrho} f(x)\,dx^\varrho = \frac{1}{\varrho!}\left(\int_c^x f(x)\,dx\right)^\varrho \tag{46}$$

gilt ja zunächst für $\varrho = 0, 1$. Angenommen, sie sei für ϱ gültig, dann folgt nach Multiplikation von (46) mit $f(x)$ und Integration nach x von c bis x, die Beziehung:

$$\underbrace{\int_c^x f(x) \cdots \int_c^x}_{\varrho+1} f(x)\,dx^{\varrho+1} = \frac{1}{(\varrho+1)!}\left(\int_c^x f(x)\,dx\right)^{\varrho+1} ,$$

womit die allgemeine Gültigkeit von (46) bewiesen ist. Hiernach erhalten wir die Identität:

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty} (\int_c^x f(x))^\varrho dx^\varrho = \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{1}{\varrho!} (\int_c^x f(x)\,dx)^\varrho = e^{\int_c^x f(x)\,dx} . \tag{47}$$

Dadurch haben wir gezeigt, daß unsere Methode auch in dem Fall der linearen Differentialgleichung erster Ordnung die richtige Lösung liefert.

§ 9. Gleichung mit konstanten Koeffizienten.

Im Fall $f(x) = d \neq 0$ eine Konstante ist, betrachten wir zunächst die binomische algebraische Gleichung:

$$r^n - d = 0 . \tag{48}$$

Ihre Wurzeln mögen mit $d_\mu (\mu = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ bezeichnet werden.

α) Falls $d > 0$ ist, sind die Wurzeln gegeben durch:

$$d_\mu = \sqrt[n]{d}\left(\cos\frac{2\mu\pi}{n} + i\sin\frac{2\mu\pi}{n}\right), \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

wobei d_μ und $d_{n-\mu}$ konjugiert komplex sind.

β) Ist dagegen $d < 0$, so haben wir

$$d_\mu = \sqrt[n]{|d|}\left(\cos\frac{(2\mu+1)\pi}{n} + i\sin\left(\frac{2\mu+1)\pi}{n}\right)\right),$$

mit d_μ und $d_{n-\mu-1}$ als konjugiert komplex.

Die Lösungen von (49)

$$y^{(n)} - dy = 0 \tag{49}$$

sind dann gegeben durch:

$$y_\mu = \frac{(x-c)^\mu}{\mu!} + d\underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{n} \frac{(x-c)^\mu}{\mu!}\,dx^n + d^2\underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{2n} \frac{(x-c)^\mu}{\mu!}\,dx^{2n} + \cdots =$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} d^\lambda \underbrace{\int_c^x \cdots \int_c^x}_{\lambda n} \frac{(x-c)^\mu}{\mu!}\,dx^{\lambda n} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} d^\lambda \frac{(x-c)^{\lambda n+\mu}}{(\lambda n+\mu)!}, \quad \mu=0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{50}$$

Wegen $d^\lambda = d_\nu{}^{\lambda n}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ können wir setzen:

$$y_\nu^* = \sum_{\mu=0}^{n-1} d_\nu^\mu y_\mu = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{\{d_\nu(x-c)\}^{\lambda n+\mu}}{(\lambda n+\mu)!} = e^{d_\nu(x-c)} ; \tag{51}$$

$$\mu = 0, 1, 2, \ldots, n-1 .$$

Falls $d>0$, $n=2m$ hat die Gleichung (48) zwei reelle Wurzeln d_0, d_m und $m-1$ Paare imaginäre Wurzeln d_1, d_{2m-1}, d_2, $d_{2(m-1)}\ldots$. Die reellen Lösungen von (49) lauten in diesem Falle:

$$y_0^* = e^{\sqrt[n]{d}\,(x-c)} \qquad\qquad y_m^* = e^{-\sqrt[n]{d}\,(x-c)}$$

$$\frac{1}{2}(y_\nu^* + y_{n-\nu}^*) = e^{(x-c)\sqrt[n]{d}\cos\frac{2\nu\pi}{n}} \cdot \cos\left\{(x-c)\sin\frac{2\nu\pi}{n}\right\}$$

$$-\frac{i}{2}(y_\nu^* - y_{n-\nu}^*) = e^{(x-c)\sqrt[n]{d}\cos\frac{2\nu\pi}{n}} \cdot \sin\left\{(x-c)\sin\frac{2\nu\pi}{n}\right\}$$

$$\nu = 1, 2, 3, \ldots, m-1,$$

während für $d>0$, $n=2m+1$ anstatt y_m^* die Lösungen:

$$\frac{1}{2}(y_m^* + y_{m+1}^*)\;, \qquad -\frac{i}{2}(y_m^* - y_{m+1}^*)$$

auftreten. Der Fall $d<0$ kann ähnlich behandelt werden.

(Eingegangen den 7. Februar 1939.)