Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 12 (1939-1940)

Artikel: Sur une équation diophantienne en rapport avec le calcul de probabilités.

Autor: Seitz, Boris

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12811

Sur une équation diophantienne en rapport avec le calcul des probabilités

Par Boris Seitz, Cernier

Le but du présent travail, suggéré par Monsieur L.-Gustave Du Pasquier, est l'étude de l'équation diophantienne du degré $n+1$ à $2n$ inconnues: $u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$, à résoudre en nombres entiers

$$\frac{1}{n}\left(\frac{u_1}{v_1}+\cdots+\frac{u_n}{v_n}\right)=\frac{u_1+\cdots+u_n}{v_1+\cdots+v_n}\,. \tag{1}$$

Il est clair que, si nous avons n urnes identiques contenant, la première u_1 boules blanches sur v_1 boules au total, la deuxième u_2 boules blanches sur v_2 boules au total, et ainsi de suite, la dernière u_n boules blanches sur v_n boules au total, le premier membre de cette équation représente la probabilité p_1 de tirer une boule blanche de l'une de ces urnes. Le second membre est la probabilité p_2 de tirer une boule blanche si toutes les boules de toutes les urnes étaient préalablement réunies dans une seule et nouvelle urne.

En général $p_1 \neq p_2$. Peut-il se faire que $p_1 = p_2$? C'est cette dernière égalité que traduit l'équation (1). Bien entendu, dans l'interprétation précédente, nous devrons avoir:

$$u_i \geqslant 0\,,\quad v_i > 0\,,\quad u_i \leqslant v_i\,,\quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{2}$$

Mais dans la résolution algébrique de l'équation nous n'avons pas à tenir compte de ces restrictions.

Ecrivons l'équation ainsi

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{u_k}{v_k}+\frac{u_n}{v_n}=n\,\frac{u_n+\sum\limits_{k=1}^{n-1}u_k}{v_n+\sum\limits_{k=1}^{n-1}v_k}$$

et posons

$$u_n = y_{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}u_k \qquad\qquad v_n = x_{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}v_k \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{u_k}{v_k} = h_{n-2}\,\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}u_k}{\sum\limits_{k=1}^{n-1}v_k}\,. \tag{4}$$

Après la simplification par

$$\sum_{k=1}^{n-1} u_k : \sum_{k=1}^{n-1} v_k$$

on obtient

$$h_{n-2} + \frac{y_{n-1}}{x_{n-1}} = n \frac{1 + y_{n-1}}{1 + x_{n-1}}$$

ou

$$x_{n-1}^2 h_{n-2} + x_{n-1}[y_{n-1}(1 - n) + h_{n-2} - n] + y_{n-1} = 0 \ . \tag{5}$$

L'équation (1) est remplacée par l'équation (5) du deuxième degré à deux inconnues et l'équation (4) du même type que (1) mais ayant deux inconnues en moins. Répétons le procédé $n - 1$ fois de suite. Toutes les inconnues seront éliminées et il nous restera un ensemble de $n - 1$ équations diophantiennes du deuxième degré à deux inconnues:

$$x_i^2 h_{i-1} + x_i[y_i(1 - h_i) + h_{i-1} - h_i] + y_i = 0 \tag{6}$$

$$i = 1, \dots, n - 1 \ .$$

Les quantités y_{i-1}, x_{i-1}, h_{i-2} seront définies par des relations déduites de (3) et (4) en remplaçant n par i. On remarquera que $h_0 = 1$ et, bien entendu, $h_{n-1} = n$.

Les équations (6) sont faciles à résoudre en nombres rationnels:

$$x_i = \frac{h_{i-1} + \alpha_i}{h_{i-1}(h_i - 1)} \qquad y_i = \frac{(h_{i-1} + \alpha_i)\left(1 - \frac{P_i}{\alpha_i}\right)}{(h_i - 1)^2}$$

avec $P_i = h_i(h_i - h_{i-1} - 1)$, les α_i étant des paramètres pouvant prendre toutes les valeurs rationnelles, positives ou négatives, sauf zéro. Quant aux $h_1, \dots, h_{n-2}$, ce sont des nombres rationnels, arbitraires, différents de l'unité.

On vérifie facilement d'autre part que

$$\begin{aligned} u_i &= (1 + y_1)(1 + y_2) \dots (1 + y_{i-2})\, y_{i-1}\, u_1 \\ v_i &= (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_{i-2})\, x_{i-1}\, v_1 \end{aligned} \qquad u_1, v_1 \text{ arbitraires.}$$

Nous pourrons toujours choisir u_1 et v_1 de manière que les u_i et v_i soient entiers et satisfassent les conditions (2). Il existe en plus une infinité de valeurs $h_1, \dots, h_{n-2}, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ telles que les x_i et les y_i soient tous positifs.

On peut tirer des résultats ci-dessus plusieurs corollaires, par exemple:

a) Il existe une infinité de systèmes de n urnes contenant des boules blanches et des boules noires, tels que la probabilité mathématique de sortir une boule blanche reste la même, soit qu'on plonge la main dans l'une quelconque d'entre elles, prise au gré du hasard, soit qu'on réunisse préalablement toutes les boules des n urnes dans une nouvelle urne.

b) On peut toujours ajouter au système précédent de n urnes une $(n+1)^{\text{ième}}$ ayant pour nombre total v de boules, la moyenne arithmétique des nombres de boules des n urnes envisagées. La propriété précitée (a) reste encore vraie, quel que soit le nombre de boules blanches parmi les v boules de la $(n+1)^{\text{ième}}$ urne.

c) Il existe une infinité de systèmes de n fractions telles que, pour les additionner, il suffit de diviser la somme des numérateurs par la somme des dénominateurs et de multiplier par n la nouvelle fraction ainsi obtenue

$$\frac{u_1}{v_1}+\frac{u_2}{v_2}+\cdots+\frac{u_n}{v_n}=n\,\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{v_1+v_2+\cdots+v_n}\;.$$

d) les valeurs x_k et y_k sont les solutions de l'équation

$$1+\frac{y_1}{x_1}+\frac{(1+y_1)\,y_2}{(1+x_1)\,x_2}+\cdots+\frac{(1+y_1)\,(1+y_2)\ldots(1+y_{n-2})\,y_{n-1}}{(1+x_1)\,(1+x_2)\ldots(1+x_{n-2})\,x_{n-1}}$$

$$=n\,\frac{(1+y_1)\,(1+y_2)\ldots(1+y_{n-1})}{(1+x_1)\,(1+x_2)\ldots(1+x_{n-1})}\;.$$

En terminant ce travail, je tiens à exprimer à Monsieur le professeur L.-Gustave Du Paquier ma vive reconnaissance pour les conseils qu'il a bien voulu me donner et pour l'intérêt qu'il m'a toujours témoigné.

(Reçu le 13 avril 1940.)