

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 12 (1939-1940)

Artikel: Über die Zerlegung strikte definiter Formen in Quadrate.
Autor: Habicht, W.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-12810>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über die Zerlegung strikte definiter Formen in Quadrate

Von W. HABICHT, Schaffhausen

Als *Form* soll im folgenden eine ganze rationale homogene Funktion mit rationalen Koeffizienten bezeichnet werden. Eine Form $F(x_1, \dots, x_n)$ in n Variablen heißt *definit*, wenn sie für kein reelles Wertesystem der Variablen negative Werte annimmt; sie heiße *strikte definit*, wenn sie für sämtliche reellen Wertesysteme der Variablen, mit Ausnahme des Wertesystems $(0, \dots, 0)$, positive Werte annimmt.

Hilbert hat im Jahre 1900 die Frage aufgeworfen, ob sich jede definite Form als Quotient zweier Summen von Formenquadrate darstellen lasse¹⁾. Diese Frage wurde später von *Artin* in bejahendem Sinne beantwortet²⁾. Jedoch liefert der *Artin*'sche Beweis keine explizite Vorschrift, die Zerfällung wirklich durchzuführen, sondern es ergibt sich dabei lediglich die Existenz einer Zerfällung im Rahmen eines allgemeinen Satzes der abstrakten Körpertheorie.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, den *Hilbert-Artin*'schen Satz für den Spezialfall strikter definiter Formen zu beweisen. Ich gebe also einen Beweis für den folgenden Satz:

Eine strikte definitive Form lässt sich als Quotient zweier Summen von Formenquadrate darstellen.

Der Beweis unterscheidet sich wesentlich von dem *Artin*'schen, ist ganz elementar und darf als konstruktiv bezeichnet werden: er besteht nämlich in einer in endlich vielen Schritten durchführbaren Vorschrift, wie die Darstellung zu gewinnen sei. Den Ausgangspunkt des Beweises bildet ein Satz, der von *G. Pólya* aufgestellt und bewiesen worden ist³⁾.

Der versprochene Beweis soll in vier Schritten geführt werden. Dabei enthält jeder einzelne Abschnitt ein an sich bemerkenswertes Resultat.

¹⁾ *D. Hilbert*, Mathematische Probleme. Göttinger Nachrichten 1900, S. 284, Nr. 17.

²⁾ *E. Artin*, Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate. Abhandlungen Math. Seminar Hamburg, Bd. V, 1926, S. 100—115.

³⁾ *G. Pólya*, Über positive Darstellung von Polynomen. Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, LXXIII (1928). Vgl. auch *Hardy, Littlewood, Pólya, Inequalities*. Cambridge 1934, 2. 24, S. 57—60.

1. Der Satz von Pólya lautet:

Eine Form in n Variablen, die für alle nichtnegativen Wertesysteme der Variablen, mit Ausnahme des Wertesystems $(0, \dots, 0)$, positive Werte annimmt, läßt sich als Quotient zweier Formen mit lauter positiven Koeffizienten darstellen.

Und zwar gibt Pólya eine Darstellung mit besonders einfachem Nenner; er beweist nämlich folgendes:

Es sei $G(x_1, \dots, x_n)$ eine Form in n Variablen vom Grade r , und es sei

$$G(x_1, \dots, x_n) > 0$$

für

$$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 , \quad x_1 + \dots + x_n > 0 .$$

Dann geht aus $G(x_1, \dots, x_n)$ bei wiederholter Multiplikation mit $x_1 + \dots + x_n$ schließlich eine Form mit lauter positiven Gliedern hervor; das heißt für eine genügend große natürliche Zahl k ist

$$G(x_1, \dots, x_n) (x_1 + \dots + x_n)^k = \sum_{(\alpha)}^{r+k} p_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} , \quad (1)$$

wo die $p_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ positive rationale Zahlen sind und die Summation sich über solche Wertesysteme $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_n \geq 0$ der Indizes erstreckt, für die $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = r + k$ ist; es ergibt sich beim Beweis sogar, daß alle solchen Wertesysteme durchlaufen werden.

2. Zu einer strikten definiten Form $H(x_1, \dots, x_n)$, welche gerade ist in bezug auf jede ihrer n Variablen, gibt es eine andere Form $S(x_1, \dots, x_n)$, so daß das Produkt $H(x_1, \dots, x_n) S(x_1, \dots, x_n)$ sich als Summe von Quadraten von Monomen darstellen läßt.

Dabei ist als Monom eine Form in x_1, \dots, x_n bezeichnet, welche nur aus einem einzigen Glied besteht.

Es sei also $H(x_1, \dots, x_n)$ eine Form vom Grade $s = 2r$, und es sei $H(x_1, \dots, x_n) > 0$ für ein beliebiges nichtverschwindendes Wertesystem der Variablen. Außerdem sei $H(x_1, \dots, x_n)$ gerade in bezug auf jede der Variablen; $H(x_1, \dots, x_n)$ kann also als Form in x_1^2, \dots, x_n^2 geschrieben werden:

$$H(x_1, \dots, x_n) = G(x_1^2, \dots, x_n^2) .$$

Setzen wir $x_1^2 = y_1, \dots, x_n^2 = y_n$, so entspricht jedem Wertesystem der y_i , das den Bedingungen

$$y_1 \geq 0, \dots, y_n \geq 0 , \quad y_1 + \dots + y_n > 0$$

genügt, ein reelles nicht verschwindendes Wertesystem der x_i ; für ein solches Wertesystem der y_i gilt also $G(y_1, \dots, y_n) > 0$, d. h. die Form G erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von *Pólya*. Demnach gibt es eine natürliche Zahl k , so daß in

$$G(y_1, \dots, y_n) (y_1 + \dots + y_n)^k = \sum_{(\alpha)}^{r+k} p_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} y_1^{\alpha_1} \dots y_n^{\alpha_n}$$

sämtliche $p_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ positive rationale Zahlen sind. Führt man hierin wieder x_1, \dots, x_n als Variable ein und zerlegt jede der Zahlen $p_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ in eine Summe von Quadraten von rationalen Zahlen (was trivialerweise möglich ist), so folgt

$$\begin{aligned} H(x_1, \dots, x_n) (x_1^2 + \dots + x_n^2)^k &= \sum_{(\alpha)}^{r+k} p_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} (x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n})^2 = \\ &= \sum_{((\alpha))}^{r+k} (q_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n})^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Die Summation in der letzten Summe erstreckt sich dabei wieder über sämtliche Wertesysteme der Indizes mit $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = r + k$; jedes Wertesystem kommt vor, es kann aber eventuell auch mehrere Male vorkommen.

Damit ist die Behauptung bewiesen; ja sogar noch mehr:

Eine strikte definite Form, welche gerade ist in bezug auf jede ihrer n Variablen, läßt sich als Quotient zweier Summen von Quadraten von Monomen darstellen⁴⁾.

3. Wir wollen uns jetzt freimachen von der Einschränkung, der die strikte definiten Formen in 2. unterworfen wurden, und beweisen:

Zu einer beliebigen strikte definiten Form $F(x_1, \dots, x_n)$ gibt es eine andere Form $T(x_1, \dots, x_n)$, so daß das Produkt $F(x_1, \dots, x_n) T(x_1, \dots, x_n)$ sich als Summe von Quadraten von Monomen darstellen läßt.

Es sei also $F(x_1, \dots, x_n) > 0$ für ein beliebiges nichtverschwindendes Wertesystem der Variablen. Dann bilde man das Produkt

$$H(x_1, \dots, x_n) = \prod_{v_1=0}^1 \prod_{v_2=0}^1 \dots \prod_{v_n=0}^1 F((-1)^{v_1} x_1, \dots, (-1)^{v_n} x_n). \quad (3)$$

$H(x_1, \dots, x_n)$ ist eine gerade Funktion in jeder einzelnen der Variablen x_1, \dots, x_n ; ferner ist $H(x_1, \dots, x_n)$ strikt definit, da jeder der rechts stehenden Faktoren strikt definit ist. Die Form $H(x_1, \dots, x_n)$ erfüllt also die in 2. gemachten Voraussetzungen; spaltet man von $H(x_1, \dots, x_n)$

⁴⁾ Dieser Satz findet sich schon bei *Pólya*; vgl. a. a. O. ³⁾, S. 144—145.

noch den Faktor $F(x_1, \dots, x_n)$ ab, so folgt jetzt aus (2) in angemessener Bezeichnung die ausgesprochene Behauptung:

$$F(x_1, \dots, x_n) T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{((\alpha))}^h (q_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n})^2. \quad (4)$$

4. Es sei $F(x_1, \dots, x_n)$ wieder eine strikte definite Form vom (geraden) Grad $m = 2l$. Um nun zu einer *Darstellung von $F(x_1, \dots, x_n)$ als Quotient zweier Summen von Formenquadraten* zu gelangen, geben wir der Überlegung eine neue Wendung.

Wir führen nämlich eine neue Unbestimmte u ein und betrachten an Stelle der Form $F(x_1, \dots, x_n)$ von n Variablen die spezielle Form

$$F(x_1, \dots, x_n) + u^m \quad (5)$$

von $n + 1$ Variablen. Da $u^m = u^{2l}$ für einen beliebigen nicht verschwindenden Wert von u positiv ausfällt, so ist die Form (5) wieder strikte definit.

Wir können also eine Form $T(x_1, \dots, x_n, u)$ so konstruieren, daß

$$(F(x_1, \dots, x_n) + u^m) T(x_1, \dots, x_n, u) = \sum_{((\alpha))}^h (q_{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} u^\alpha)^2 \quad (6)$$

ist. Die Summation erstreckt sich dabei über sämtliche nichtnegativen Wertsysteme der Indizes mit $\alpha_1 + \dots + \alpha_n + \alpha = h$ (wobei, wie unter 2. bemerkt wurde, jedes Wertsystem eventuell mehrmals auftreten kann).

Nun fasse man in (6) die Form $F + u^m$ als Polynom in der Unbestimmten u und die Quadratbasen als Monome in u auf, und reduziere jede einzelne der Quadratbasen modulo $F + u^m$. Es sei $(q_{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}) u^\alpha$ eine beliebige aus der Summe rechts in (6) herausgegriffene Quadratbasis. Die Division durch $F + u^m$ kann explizite durchgeführt werden. Es ist nämlich

$$u^\alpha = u^{m\beta+\gamma} = [(u^m)^\beta - (-F)^\beta] u^\gamma + (-F)^\beta u^\gamma \text{ (mit } 0 \leqq \gamma \leqq m-1\text{)}.$$

Da der Ausdruck in der eckigen Klammer durch $F + u^m$ teilbar ist, folgt hieraus

$$(q_{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}) u^\alpha = (F(x_1, \dots, x_n) + u^m) Q + R \cdot u^\gamma; \quad (7)$$

dabei ist $Q = Q(x_1, \dots, x_n, u)$ eine Form in $n + 1$ Variablen und $R = R(x_1, \dots, x_n)$ eine (übrigens nicht identisch verschwindende) Form in n Variablen.

Der bei der Division durch $F + u^m$ verbleibende Rest ist also wieder ein Monom in der Unbestimmten u , und zwar vom Grade $\gamma \leq m - 1$.

Nun bilde man die Ausdrücke (7) für sämtliche Quadratbasen rechts in (6). Quadriert man aus und nimmt die Vielfachen von $F + u^m$ auf die linke Seite, so erhält man aus (6)

$$(F(x_1, \dots, x_n) + u^m) T^*(x_1, \dots, x_n, u) = \sum_{\gamma=0}^{m-1} u^{2\gamma} \sum_{\delta} R_{\gamma\delta}^2(x_1, \dots, x_n). \quad (8)$$

Dabei verschwindet insbesondere die Summe $\sum_{\delta} R_{0\delta}^2$ nicht identisch: es gibt ja rechts in (6) mindestens ein nicht verschwindendes Glied mit $\alpha = 0$; dieses Glied bleibt beim Reduktionsprozeß unverändert bestehen, kommt also auch unter den Summengliedern rechts in (8) vor.

Aus (8) folgt zunächst, daß die Form $T^*(x_1, \dots, x_n, u)$ als Polynom in u einen Grad $\leq m - 2$ hat; (8) kann also geschrieben werden

$$(F(x_1, \dots, x_n) + u^m) \cdot \sum_{\mu=0}^{m-2} C_{\mu}(x_1, \dots, x_n) u^{\mu} = \sum_{\gamma=0}^{m-1} u^{2\gamma} \sum_{\delta} R_{\gamma\delta}^2. \quad (9)$$

Wir multiplizieren links aus und vergleichen links und rechts die Koeffizienten von u^0 und von u^m ($m = 2l$):

$$\begin{aligned} F C_0 &= \sum_{\delta} R_{0\delta}^2 \\ C_0 &= \sum_{\delta} R_{l\delta}^2. \end{aligned}$$

Die rechte Seite der ersten Gleichung verschwindet nicht identisch, somit auch C_0 nicht. Also ist

$$F = \frac{\sum_{\delta} R_{0\delta}^2}{\sum_{\delta} R_{l\delta}^2}.$$

Damit ist eine Darstellung der strikte definiten Form $F(x_1, \dots, x_n)$ als Quotient zweier Summen von Formenquadraten gewonnen, w.z.b.w.

Nebenbei gesagt, könnte man in (9) auch die Koeffizienten von u^2 und u^{m+2} oder von u^4 und u^{m+4} ... oder von u^{m-2} und u^{2m-2} vergleichen; (9) lieferte so nicht nur eine, sondern gleich l Darstellungen der gewünschten Art.

Es sei noch bemerkt, daß der Satz von *Pólya* auch dann noch gilt, wenn man als Koeffizientenkörper nicht den rationalen Zahlenkörper, sondern einen beliebigen archimedisch angeordneten Körper zugrunde

legt. Überträgt man das oben angewandte Schlußverfahren auf diesen allgemeineren Fall, so folgt:

Eine strikte definite Form $F(x_1, \dots, x_n)$ in n Variablen mit Koeffizienten aus einem archimedisch angeordneten Körper K läßt sich in der Form

$$F(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sum_{\delta} p_{\delta} R_{\delta}^2}{\sum_{\delta} p_{\delta}^* R_{\delta}^{*2}}$$

darstellen, wobei die R_{δ} , R_{δ}^ gewisse Formen in x_1, \dots, x_n mit Koeffizienten aus K , die p_{δ} , p_{δ}^* positive Elemente aus K sind.*

(Eingegangen den 3. April 1940.)