Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 12 (1939-1940)

Artikel: Die eindimensionalen Freigebilde.
Autor: Finsler, Paul
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12807

Die eindimensionalen Freigebilde

Von Paul Finsler, Zürich

Im folgenden sollen die eindimensionalen[1]) Freigebilde[2]) im komplexen n-dimensionalen projektiven Raum L_n untersucht und in ihrer Gesamtheit bestimmt werden.

1. Freikurven

Wir betrachten zunächst die *irreduziblen* eindimensionalen Freigebilde, die kurz als *Freikurven* bezeichnet seien.

Eine Freikurve C, die zum L_ϱ gehört ($\varrho \geqq 1$), wird von jedem $L_{\varrho-1}$ nur in linear unabhängigen, also in höchstens ϱ Punkten getroffen; der Schnitt kann nicht unendlich viele Punkte, d. h. ein eindimensionales Gebilde enthalten, da C nicht reduzibel ist[3]).

Durch $\varrho - 1$ Punkte $P_0, \ldots, P_{\varrho-2}$ von C ist stets ein $L_{\varrho-2}$ bestimmt, der als Achse eines im L_ϱ liegenden Büschels $L_{\varrho-1}(t)$ betrachtet werden kann. Jeder Raum $L_{\varrho-1}$ des Büschels kann C in höchstens einem weiteren Punkt P treffen, und umgekehrt ist durch jeden der unendlich vielen, von $P_0, \ldots, P_{\varrho-2}$ verschiedenen Punkte P von C ein solcher $L_{\varrho-1}$ eindeutig bestimmt. Die Verhältnisse der projektiven Koordinaten von P lassen sich daher als rationale Funktionen des passend gewählten Parameters t darstellen. Diese Funktionen ordnen dann jedem Wert von t, einschließlich $t = \infty$, einen Punkt P von C zu; fällt dieser in die Achse $L_{\varrho-2}$, so fällt er in einen der Punkte $P_0, \ldots, P_{\varrho-2}$ und der $L_{\varrho-1}$ „berührt" C in diesem Punkt (s. u.).

C ist also eine rationale Kurve ϱ-ter Ordnung C^ϱ im L_ϱ. Weiter ist C eine „Normalkurve"[4]) dieses Raumes, denn durch $\varrho + 1$ Punkte einer

[1]) Die Dimension eines algebraischen Gebildes ist gleich dem Maximum der Dimensionen der einzelnen Teile; ein eindimensionales Gebilde kann also außer Kurven noch einzelne Punkte enthalten. Vgl. *P. Finsler*, Über algebraische Gebilde, Math. Annalen 101 (1929), S. 284 (zitiert als „A. G."); § 3, S. 287.

[2]) Freigebilde sind algebraische Gebilde, die von keinem linearen Raum in endlich vielen, linear abhängigen Punkten getroffen werden; Freisysteme sind solche, die zudem nur aus endlich vielen linearen Räumen zusammengesetzt sind. Vgl. *P. Finsler*, Über eine Klasse algebraischer Gebilde (Freigebilde), Comm. Math. Helv. 9 (1937), S. 172; zitiert als „Frgeb.". *P. Finsler*, Über Freisysteme (lineare Freigebilde), Comm. Math. Helv. 11 (1938), S. 62; zitiert als „Frsyst.". *P. Finsler*, Über die Darstellung und Anzahl der Freisysteme und Freigebilde, Monatshefte für Math. und Phys. 48 (1939), S. 433; zitiert als „Darst.".

[3]) Vgl. A. G., S. 285 und S. 291, § 8.

[4]) *Normal*kurven und -flächen sind irreduzible Gebilde, die nicht durch Projektion aus irreduziblen Gebilden gleicher Dimension und gleicher Ordnung entstehen, die einem Raum von höherer Dimension angehören; vgl. Enzyklopädie der math. Wiss. III C 7, S. 811.

Kurve ϱ-ter Ordnung läßt sich stets ein L_ϱ legen, der sie ganz enthalten muß, sofern sie irreduzibel ist.

Wenn eine irreduzible Kurve ϱ-ter Ordnung nicht Freigebilde ist, so gibt es einen L_ν, der sie in wenigstens $\nu + 2$ Punkten trifft $(\nu < \varrho - 1)$, und sie gehört daher einem Raum von höchstens $\nu + ((\varrho + 1) - (\nu + 2)) = \varrho - 1$ Dimensionen an. Es gilt also:

Satz 1. *Die Freikurven, d. h. die irreduziblen eindimensionalen Freigebilde, sind identisch mit den rationalen Normalkurven ϱ-ter Ordnung C^ϱ des L_ϱ $(\varrho = 1, 2, \ldots, n)$*[5]*. Es sind dies die einzigen irreduziblen Kurven höchstens ϱ-ter Ordnung, die zum L_ϱ gehören.*

2. Berührung

Die *Berührung* einer Freikurve C^ϱ des L_ϱ mit einem linearen Raum L_ν kann geometrisch durch die folgenden Eigenschaften definiert werden:

a) Die Freikurve C^ϱ des L_ϱ berührt einen im L_ϱ enthaltenen $L_{\varrho-1}$, wenn sie weniger als ϱ Punkte mit ihm gemein hat;

b) sie berührt einen im L_ϱ enthaltenen L_μ, wenn sie jeden durch den L_μ gehenden $L_{\varrho-1}$ des L_ϱ berührt, oder wenn $\mu = \varrho$ ist;

c) sie berührt den L_μ im Punkt P, wenn sie eine im L_μ enthaltene Gerade L_1 berührt, die sie im Punkte P trifft;

d) sie berührt den Raum L_ν (in P), wenn sie den Schnittraum $L_\nu L_\varrho$ (in P) berührt.

Analytisch sei die Freikurve C^ϱ durch rationale Funktionen vom höchsten Grad ϱ in der Form $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ dargestellt. Die Kurve berührt dann den Raum L_ν im Punkt P, wenn die Punkte mit den Koordinaten $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{x}'(t) = \dfrac{d\mathbf{x}}{dt}$ für einen bestimmten Wert von t dem Raum L_ν angehören und der erstere mit P zusammenfällt.

Diese analytische Definition ergibt dasselbe wie die geometrische, denn es folgt aus beiden, daß die Berührung mit dem Auftreten mehrfacher Wurzeln bei der Schnittpunktsberechnung zusammenfällt. Insbesondere läßt sich auch nach der analytischen Definition durch jeden L_μ des L_ϱ, welcher die Kurve C^ϱ nicht berührt, ein $L_{\varrho-1}$ legen, der sie ebenfalls nicht berührt. Ist nämlich $\mu < \varrho - 1$, so verbinde man den Raum L_μ mit den Punkten der Kurve durch Räume $L_{\mu+1}$. Würden diese alle berühren (ohne daß der L_μ berührt), so müßte mit einem variabeln Punkt $P = \mathbf{x}(t)$

[5]) Diese Kurven behandelt *W. K. Clifford*, On the classification of loci. Phil. Trans. London 169 (1879), S. 663.

auch der Punkt $P' = \mathfrak{x}'(t)$ dem Raum $L_{\mu+1}$ angehören, also von L_μ und P linear abhängig sein, und durch Integration würde folgen, daß der $L_{\mu+1}$ selbst fest bleibt und also die Kurve C^ϱ enthält, was unmöglich ist. Es gibt also im L_ϱ unendlich viele $L_{\mu+1}$ durch den L_μ, welche die Kurve nicht berühren, und durch Weiterschließen findet man ebenso unendlich viele $L_{\varrho-1}$ durch den L_μ, die sie ebenfalls nicht berühren.

Eine Gerade, welche die Freikurve in zwei Punkten trifft, kann sie nicht berühren, denn man kann sie mit $\varrho - 2$ weitern Punkten der C^ϱ durch einen $L_{\varrho-1}$ verbinden, welcher die Kurve in ϱ Punkten trifft. Eine berührende Gerade trifft daher die Kurve stets nur im Berührungspunkt.

Weiter ersieht man aus der analytischen Definition, daß ein L_μ, welcher die Kurve C^ϱ nicht trifft, sie auch nicht berührt. Es gilt also:

Satz 2. *Durch jeden L_μ im L_ϱ, welcher eine Freikurve C^ϱ des L_ϱ nicht berührt oder nicht trifft, insbesondere also durch jeden Punkt Q des L_ϱ, geht wenigstens ein $L_{\varrho-1}$ im L_ϱ, welcher die Kurve ebenfalls nicht berührt und sie folglich in ϱ linear unabhängigen Punkten trifft.*

3. Irreduzible Teile

Es sei C eine irreduzible, im eindimensionalen Freigebilde G enthaltene Kurve, die zum L_ϱ gehöre, und $L'_{\varrho-2}$ ein im L_ϱ enthaltener Raum, der G nicht trifft. Weiter seien $P_0, P_1, \ldots, P_\nu$ linear unabhängige Punkte von C, deren Verbindungsraum L_ν mit G keine Kurve, also auch keinen weitern Punkt gemein haben soll.

Ist dann $\nu \leqq \varrho - 2$, so gibt es höchstens endlich viele $L_{\nu+1}$, welche den L_ν mit einem weitern Punkt P von C verbinden und als Schnitt mit G ein eindimensionales Gebilde ergeben. Andernfalls würden diese Gebilde einen durch den $L'_{\varrho-2}$ gelegten $L'_{\varrho-1}$, welcher keinen der Punkte $P_0, \ldots, P_\nu$ enthält, in unendlich vielen Punkten, also in einer Kurve treffen, die auch den $L'_{\varrho-2}$ treffen müßte. Es gibt also einen Punkt $P_{\nu+1}$ auf C, so daß der durch ihn bestimmte $L_{\nu+1}$ das Gebilde G nur in den Punkten $P_0, \ldots, P_{\nu+1}$ trifft.

Nachdem so, von einem Punkt P_0 von C ausgehend, die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{\varrho-2}$ gefunden sind, gibt es für $P_{\varrho-1}$ auf C noch unendlich viele mögliche Lagen; für diese müssen sich wie früher unter 1. die Verhältnisse der Koordinaten als eindeutige, also rationale Funktionen eines Parameters t darstellen lassen. C ist daher eine rationale Normalkurve, d. h. eine Freikurve C^ϱ des L_ϱ.

Würde nun der Schnitt des L_ϱ mit G außer C noch eine irreduzible Kurve C' enthalten, so müßte diese ganz in einem durch $P_0, \ldots, P_{\varrho-2}$

gehenden $L_{\varrho-1}$ liegen. Andernfalls würden unendlich viele der $L_{\varrho-1}$, welche die Punkte $P_0, \ldots, P_{\varrho-2}$ mit einem weitern Punkt von C verbinden, von C' noch in einem weitern, also von diesen abhängigen Punkte getroffen und müßten daher mit G ein eindimensionales Gebilde gemeinsam haben; dies ist aber, wie oben gezeigt, nicht möglich.

Liegt nun noch der Punkt $P_{\varrho-1}$ auf C so, daß der Verbindungsraum der Punkte $P_0, \ldots, P_{\varrho-1}$ G nur in diesen Punkten trifft, so müßte C' ebenso in je einem $L_{\varrho-1}$ enthalten sein, der beliebige $\varrho - 1$ der ϱ Punkte, aber nicht alle ϱ enthält. Diese Räume $L_{\varrho-1}$ haben aber nur einen Punkt gemeinsam, denn sonst müßten sie auch einen Punkt des Verbindungsraums der ϱ Punkte gemeinsam haben, was nicht der Fall ist.

Der Schnitt des L_ϱ mit G kann also außer C keine Kurve C', aber auch keine einzelnen Punkte enthalten, denn durch jeden solchen ginge nach Satz 2 ein $L_{\varrho-1}$ im L_ϱ, der G in mehr als ϱ Punkten treffen würde. Es gilt daher

Satz 3. *Ein eindimensionales Freigebilde G kann nur aus Freikurven, d. h. rationalen Normalkurven C^μ, und aus einzelnen Punkten zusammengesetzt sein, und zwar so, daß die zu den C^μ gehörenden Räume L_μ keine andern Punkte von G enthalten.*

4. Getrennte Teile

Es lassen sich jetzt die Sätze 8 bis 14 von Frsyst.[6]) auf eindimensionale Freigebilde übertragen:

Satz 4. *Ist in einem algebraischen Gebilde G eine Freikurve C^μ enthalten, so läßt sich durch jeden Punkt X des zu G gehörigen Raums L_ϱ ein $L_{\varrho-1}$ legen, dessen Schnitt mit G zum $L_{\varrho-1}$ gehört.*

Zum Beweis nehme man in G $\varrho + 1$ linear unabhängige Punkte $P_0, \ldots, P_\varrho$ an, darunter $P_0, \ldots, P_\mu$ auf der Freikurve C^μ. Durch die $\varrho - \mu$ übrigen Punkte und den Punkt X lege man im L_ϱ einen $L_{\varrho-\mu}$, welcher den zu C^μ gehörigen Raum L_μ im Punkt Y trifft. Durch Y geht nach Satz 2 ein $L_{\mu-1}$, welcher C^μ in den Punkten $Q_0, \ldots, Q_{\mu-1}$ trifft. Diese sind von den Punkten $P_{\mu+1}, \ldots, P_\varrho$ linear unabhängig und bestimmen mit ihnen zusammen den gesuchten $L_{\varrho-1}$.

Ist G ein eindimensionales Freigebilde, so kann man das Verfahren so lange wiederholen, bis der Schnitt nur aus Punkten besteht, und findet so:

---

[6]) Vgl. Fußnote [2]).

Satz 5. *Bei einem eindimensionalen Freigebilde kann man durch jeden Punkt des zugehörigen Raums einen L_ν legen, bei passend gewähltem ν, der das Gebilde in $\nu + 1$ linear unabhängigen Punkten trifft.*

Daraus ergibt sich weiter:

Satz 6. *Fügt man zu einem eindimensionalen Freigebilde im zugehörigen Raum einen neuen Punkt hinzu, oder auch mehrere, so ist das entstehende Gebilde nicht mehr Freigebilde.*

Dagegen kann es möglich sein, zu einem eindimensionalen Freigebilde eine ganze Gerade (z. B. zu zwei windschiefen Geraden eine sie schneidende) im zugehörigen Raum hinzuzufügen, um wieder ein solches zu erhalten. Es gilt aber

Satz 7. *Ist $G = A + B$ ein eindimensionales Freigebilde und $AB = 0$, so kann der zu A gehörige lineare Raum das Gebilde B nicht treffen.*

Wenn nämlich der zu A gehörige Raum mit B einen Punkt X gemeinsam hätte, so könnte man nach Satz 5 durch X einen L_ν legen, der A in $\nu + 1$ Punkten trifft; der Schnitt von G mit dem L_ν wäre dann kein Freigebilde. Weiter folgt:

Satz 8. *Ist $G = A + B$ ein eindimensionales Freigebilde und $AB = 0$, so können die zu A und zu B gehörigen Räume sich nicht in genau einem Punkt X treffen.*

Man könnte sonst durch X einen L_μ legen, der A in $\mu + 1$, und einen L_ν, der B in $\nu + 1$ Punkten treffen würde. Dann würde aber der Verbindungsraum $[L_\mu, L_\nu] = L_{\mu+\nu}$ das Gebilde G in $\mu + \nu + 2$ einzelnen Punkten treffen, was unmöglich ist.

Wir brauchen noch

Satz 9. *Das Gebilde A enthalte eine zum L_μ gehörige Freikurve C^μ, und der zu A gehörige Raum L_α enthalte einen Raum L_σ mit $\sigma \geqq 1$ und $AL_\sigma = 0$. Dann läßt sich im L_α durch den L_σ ein $L_{\alpha-1}$ legen, so daß der zum Schnitt des $L_{\alpha-1}$ mit A gehörige Raum den Raum L_σ trifft, also $[AL_{\alpha-1}]\, L_\sigma \neq 0$ ist.*

Ist $L_\mu L_\sigma = 0$, so nehme man in A $\alpha + 1$ unabhängige Punkte $P_0, \ldots, P_\alpha$ an, darunter die Punkte $P_0, \ldots, P_\mu$ auf C^μ. Durch $\alpha - \mu - \sigma$ der übrigen Punkte und den L_σ kann man einen $L_{\alpha-\mu}$ legen, der den Raum L_μ in einem Punkt X trifft. Durch X geht ein $L_{\mu-1}$, der C^μ in μ Punkten trifft, und der Verbindungsraum $[L_{\alpha-\mu}, L_{\mu-1}] = L_{\alpha-1}$ ist der gesuchte Raum, da er mindestens $(\alpha - \mu - \sigma) + \mu = \alpha - \sigma$ unabhängige Punkte von A enthält, deren Verbindungsraum im $L_{\alpha-1}$ den L_σ treffen muß.

Ist aber $L_\mu L_\sigma = L_\tau \neq 0$, so geht nach Satz 2 durch den L_τ ein $L_{\mu-1}$, welcher C^μ in μ Punkten trifft, und da deren Verbindungsraum $L_{\mu-1}$ schon den L_σ trifft, genügt es, den gesuchten $L_{\alpha-1}$ durch den Verbindungsraum des $L_{\mu-1}$ mit L_σ zu legen. Dies ist auch stets möglich, da dieser Verbindungsraum nicht den ganzen L_μ, also auch nicht den ganzen L_α enthält.

Es werde jetzt angenommen, daß die zu den Gebilden A und B gehörenden Räume $[A] = L_\alpha$ und $[B] = L_\beta$ mindestens eine Gerade gemeinsam haben, d. h. es sei $L_\alpha L_\beta = L_\sigma$ und $\sigma \geqq 1$; aber in Übereinstimmung mit Satz 7 sei $AL_\sigma = 0$ und $BL_\sigma = 0$. Ferner sei $[L_\alpha, L_\beta] = L_\varrho$, also $\varrho = \alpha + \beta - \sigma$, und in A sei eine Freikurve C^μ enthalten. Nach Satz 9 geht dann im L_α durch den L_σ ein $L_{\alpha-1}$ derart, daß der Raum $[L_{\alpha-1}, L_\beta] = L_{\varrho-1}$ die Gebilde A und B in zwei Gebilden $L_{\alpha-1} A$ und B schneidet, deren zugehörige Räume sich immer noch treffen.

Sind A und B höchstens eindimensionale Freigebilde, so kann man das Verfahren für A und entsprechend für B so lange fortsetzen, bis entweder die zugehörigen Räume nur noch einen Punkt gemeinsam haben oder der Schnitt selbst nur ein Punktsystem darstellt. In beiden Fällen ist aber der Schnitt nach Satz 8 bzw. Frgeb. Satz 2 kein Freigebilde. Wegen Frgeb. Satz 7 ergibt sich somit:

Satz 10. *Zwei (höchstens) eindimensionale Freigebilde ohne gemeinsamen Punkt ergeben zusammen dann und nur dann wieder ein Freigebilde, wenn sich die zugehörigen Räume nicht treffen.*

Daraus folgt weiter:

Satz 11. *Beliebige (höchstens) eindimensionale Freigebilde ohne gemeinsame Punkte ergeben zusammen dann und nur dann wieder ein Freigebilde, wenn sich die zugehörigen Räume in freier Lage*[7]) *befinden.*

5. Struktur der eindimensionalen Freigebilde

Nun sei G ein zusammenhängendes, eindimensionales Freigebilde, welches aus den Freikurven C^{μ_i} bestehe; L_ϱ sei der zu G gehörige Raum, $L'_{\varrho-2}$ ein darin enthaltener Raum, der G nicht trifft. Es besteht eine algebraische Bedingung dafür, daß ein durch den $L'_{\varrho-2}$ gehender $L_{\varrho-1}$ einen Schnittpunkt von zwei der Kurven C^{μ_i} enthält oder eine derselben berührt. Ein $L_{\varrho-1}$, welcher dieser Bedingung nicht genügt, der also alle solchen Schnitte und jede Berührung vermeidet, muß jede der Kurven C^{μ_i} in μ_i, also G in $\Sigma \mu_i$ Punkten treffen, und da G Freigebilde ist, so folgt

[7]) Frsyst. § 2, S. 63.

$\Sigma\mu_i \leqq \varrho$. Das Gebilde G enthält also nur endlich viele Kurven $C^{\mu_1}, \ldots,$ C^{μ_r}, und die Bezeichnung kann so gewählt werden, daß auch die Kurven $C^{\mu_1}, \ldots, C^{\mu_i}$ zusammen je ein zusammenhängendes Gebilde ergeben $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

Nimmt man nun auf C^{μ_1} $\mu_1 + 1$ Punkte an und fügt, unter Vermeidung der gegenseitigen Schnittpunkte der Kurven, auf C^{μ_2} weitere μ_2 usf., schließlich auf C^{μ_r} weitere μ_r Punkte hinzu, so muß der Verbindungsraum dieser Punkte alle Kurven C^{μ_i} enthalten, also mit L_ϱ identisch sein. Es gilt daher $\Sigma\mu_i \geqq \varrho$ und folglich $\Sigma\mu_i = \varrho$.

Ist aber $\Sigma\mu_i = \varrho$ und setzt man die Kurven $C^{\mu_1}, \ldots, C^{\mu_r}$ der Reihe nach zusammen, so muß die Dimension des zugehörigen Raums jedesmal um μ_i zunehmen und es kann jedesmal höchstens ein neuer Schnittpunkt auftreten; im ganzen treffen sich daher die Kurven in höchstens $r - 1$ Punkten. Zudem erhält man auf diese Weise wegen Frgeb. Satz 8 nur Freigebilde. Zusammenfassend findet man

Satz 12. *Ein zusammenhängendes, eindimensionales Freigebilde besteht aus r Freikurven $C^{\mu_1}, \ldots, C^{\mu_r}$, die sich in höchstens $r - 1$ Punkten treffen und so liegen, daß der zugehörige Raum die Dimension $\varrho = \Sigma\mu_i$ besitzt. Umgekehrt ergeben r zusammenhängende Freikurven in dieser Lage stets ein Freigebilde.*

Nimmt man Satz 11 und Satz 12 zusammen und vergleicht mit Frsyst. Satz 25 und 29, so ergibt sich

Satz 13. *Ersetzt man in einem eindimensionalen Freigebilde die Freikurven C^{μ_i} durch die zugehörigen Räume L_{μ_i}, so erhält man ein Freisystem. Umgekehrt erhält man alle eindimensionalen Freigebilde, wenn man in denjenigen Freisystemen, deren Räume L_{μ_i} sich höchstens in passend gelegenen Punkten treffen, jeden Raum L_{μ_i} für $\mu_i > 1$ durch eine zugehörige Freikurve C^{μ_i} ersetzt, welche durch alle in ihm enthaltenen Schnittpunkte hindurchgeht.*

Dabei müssen diese Schnittpunkte nur insofern passend liegen, daß jedesmal eine Freikurve C^{μ_i} hindurchgelegt werden kann.

6. Ordnung und Anzahl

Gehört ein zusammenhängendes, aus den Kurven C^{μ_i} bestehendes eindimensionales Freigebilde zum L_ϱ, so gibt es, wie unter 5. gezeigt, einen $L_{\varrho-1}$, der es in $\Sigma\mu_i = \varrho$ Punkten trifft, dagegen wird es von keinem linearen Raum in einem System von mehr als ϱ Punkten getroffen. Die Ordnung eines solchen Gebildes ist also gleich der Dimension des zugehörigen Raums.

Besteht ein Freigebilde aus s zusammenhängenden, eindimensionalen Teilen, so ist seine Ordnung $\Sigma \mu_i$, die Dimension des zugehörigen Raums jedoch $\Sigma \mu_i + s - 1$; enthält es außerdem noch einzelne Punkte, so erhöhen sich die beiden Zahlen um die Anzahl dieser Punkte. Es gilt daher

Satz 14. *Die Ordnung eines eindimensionalen Freigebildes ist dann und nur dann kleiner als die Dimension ϱ des zugehörigen Raums, wenn es in getrennte eindimensionale Teile zerfällt; sonst ist sie gleich ϱ. Ist die Anzahl der zusammenhängenden eindimensionalen Teile gleich s, so ist die Ordnung gleich $\varrho - s + 1$; in jedem Falle ist sie gleich der Summe der Ordnungen der irreduziblen Teile.*

Obschon die Freikurven C^ϱ des L_ϱ unter sich projektiv äquivalent sind[8]), gibt es doch im L_5 schon unendlich viele projektiv verschiedene eindimensionale Freigebilde, wie ein bei den Freisystemen gegebenes Beispiel[9]) zeigt. Man kann jedoch endlich viele Typen unterscheiden und sie nach Satz 13 auf Typen von Freisystemen zurückführen. Es ergeben sich so als Anzahlen der zum L_{-1} bis L_6 gehörenden Typen von zusammenhängenden, eindimensionalen Freigebilden[10]) die Werte

$$z_1(n) = 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 10,\ 26,\ 79\,.$$

Man kann nun[11]) alle zum L_n gehörenden eindimensionalen Freigebilde erhalten, wenn man in den zum L_n gehörenden Systemen ΣL_{α_i} von freien Räumen die einzelnen Teilräume für $\alpha_i > 0$ durch beliebige, zum L_{α_i} gehörige zusammenhängende eindimensionale Freigebilde ersetzt, die Punkte ($\alpha_i = 0$) jedoch beibehält, sofern wenigstens eine der Dimensionen größer als 0 ist. Es sei also

$$\begin{aligned} \bar{z}(\alpha_i) &= z_1(\alpha_i) \text{ für } \alpha_i \neq 0\,, \\ \bar{z}(0) &= 0, \text{ wenn alle } \alpha_i < 1\,, \\ \bar{z}(0) &= 1 \text{ sonst.} \end{aligned}$$

Wenn dann im System ΣL_{α_i} je r_i der Zahlen α_i einander gleich sind, so daß der Index i die Teilräume verschiedener Dimension unterscheidet, so erhält man aus ihm

$$\prod_i \binom{\bar{z}(\alpha_i) + r_i - 1}{r_i}$$

verschiedene eindimensionale Freigebilde.

8) Enzyklopädie der math. Wiss. III C 7, S. 895.

9) Frsyst. S. 75. Darst. Verzeichnis G 9.

10) Vgl. Darst. § 7. In dieser Arbeit findet sich ein Verzeichnis aller dieser Freigebilde.

11) Vgl. Frsyst., S. 76.

Wenn ferner der Index j die verschiedenen zum L_n gehörenden Systeme von freien Räumen unterscheidet und $u(n)$ die Anzahl der Zerfällungen der Zahl $n+1$ in eine Summe von natürlichen Zahlen bedeutet, so erhält man als Gesamtzahl der zum L_n gehörenden Typen von eindimensionalen Freigebilden den Wert

$$f_1(n) = \sum_{j=1}^{u(n)} \prod_i \binom{\bar{z}(\alpha_{ij}) + r_{ij} - 1}{r_{ij}} .$$

Dabei ist für $\alpha_{ij} = 0$ $\bar{z}(\alpha_{ij}) = 0$ zu setzen, wenn bei festem j alle $\alpha_{ij} < 1$ sind, sonst aber $\bar{z}(0) = 1$.

Für den L_{-1} bis L_6 ergibt sich so

$$f_1(n) = 0,\ 0,\ 1,\ 3,\ 8,\ 20,\ 54,\ 153,$$

so daß also in der Ebene 4, im L_3 12, im L_4 32, im L_5 86 und im L_6 239 wesentlich verschiedene eindimensionale Freigebilde vorhanden sind.

(Eingegangen den 31. Januar 1940.)