Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 12 (1939-1940)

Artikel: Zwei Abbildungs-Probleme.
Autor: Emch, Arnold
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12806

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zwei Abbildungs-Probleme

Von Arnold Emch, Urbana (Illinois, U. S. A.)

§ 1. Reelle und imaginäre Werte des Ausdrucks

$$R = \sqrt{-(x_1+x_2+x_3)\,(-x_1+x_2+x_3)\,(x_1-x_2+x_3)\,(x_1+x_2-x_3)}$$

1. Da dieser Ausdruck für die Abbildung der projektiven Ebene auf die Steinersche Fläche einerseits und auf die Cayleysche Fläche anderseits von grundlegender Bedeutung ist, soll zuerst der Wert von R für die ∞^2 reellen Tripel (x_1, x_2, x_3) untersucht werden. Sind x_1, x_2, x_3 die Seiten eines reellen Dreiecks, bei welchem die Summe irgend zweier Seiten größer als die dritte ist, so ist $\frac{1}{4} \cdot \sqrt{-1} \cdot R$ gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks, also stets positiv. Ist die Summe jedoch kleiner als die dritte Seite, so ist R stets positiv. Um das einzusehen, nehme man z. B. $-x_1 + x_2 + x_3 < 0$, oder $x_1 > x_2 + x_3$ an, dann sind $x_1 - x_2 + x_3 > 0$, $x_1 + x_2 < x_3 > 0$, $x_1 + x_2 + x_3 > 0$, also $R > 0$.

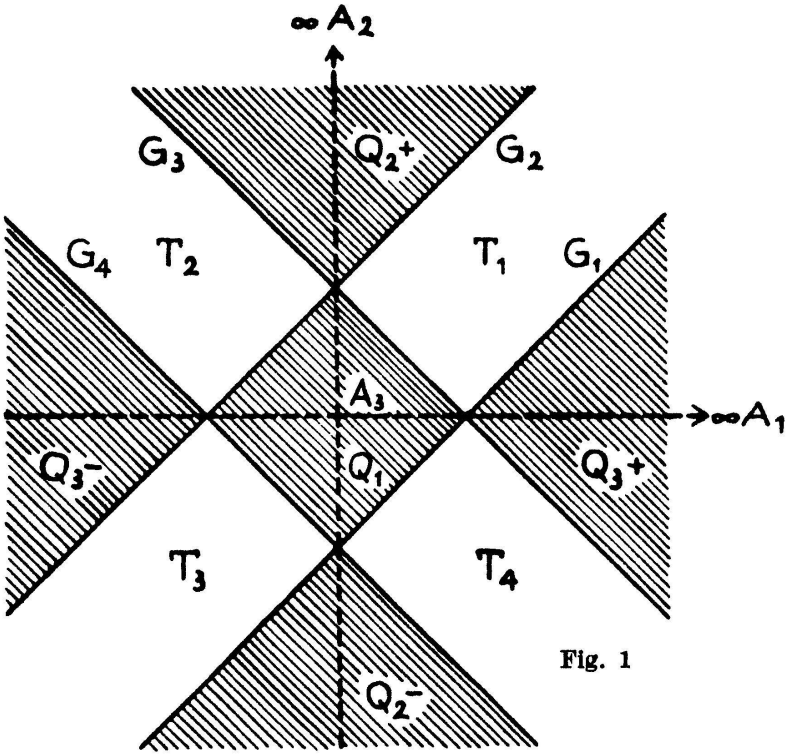

Fig. 1

2. Betrachtet man x_1, x_2, x_3 als Koordinaten der projektiven Ebene, so kann man die Bereiche für reelle und imaginäre Werte von R wie folgt erhalten: $\pm x_1 \pm x_2 \pm x_3 = 0$ stellen vier Gerade dar, welche man in der Reihenfolge, in welcher sie in R erscheinen, mit g_4, g_1, g_2, g_3 bezeichnen kann. Läßt man $x_3 \to \infty$, d. h., die projektive in die Euklidische Ebene übergehen, so werden

$$g_4 = x + y + 1\ , \quad g_1 = -x + y + 1\ , \quad g_2 = x - y + 1\ , \quad g_3 = x + y - 1\ .$$

Diese teilen die Euklidische Ebene in Gebiete Q_i und T_i, wie sie in Fig. 1 erscheinen. Die arithmetischen Werte der g_i haben auf verschiedenen Seiten der entsprechenden Geraden verschiedene Vorzeichen. Daraus ergibt sich die folgende Tabelle für die Werte von R: In

$$\begin{array}{lll}
Q_1\ (g_1 > 0\,,\ g_2 > 0\,,\ g_3 < 0\,,\ g_4 > 0)\,; & \text{ist } R \text{ reell}\,, \\
Q_2^+\ (g_1 > 0\,,\ g_2 < 0\,,\ g_3 > 0\,,\ g_4 > 0)\,; & R \text{ reell}\,, \\
Q_2^-\ (g_1 < 0\,,\ g_2 > 0\,,\ g_3 < 0\,,\ g_4 < 0)\,; & R \text{ reell}\,, \\
Q_3^+\ (g_1 < 0\,,\ g_2 > 0\,,\ g_3 > 0\,,\ g_4 > 0)\,; & R \text{ reell}\,, \\
Q_3^-\ (g_1 > 0\,,\ g_2 < 0\,,\ g_3 < 0\,,\ g_4 < 0)\,; & R \text{ reell}\,.
\end{array}$$

In ähnlicher Weise ergibt sich, daß in T_1, T_2, T_3, T_4, R imaginär ist.

§ 2. Die Abbildung der projektiven Ebene auf die Steiner Fläche

1. Es ist wohl bekannt, daß durch

$$\varrho y_1 = x_2 x_3\,, \quad \varrho y_2 = x_3 x_1\,, \quad \varrho y_3 = x_1 x_2\,, \quad \varrho y_4 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \tag{1}$$

die projektive Ebene S_2 auf die Steiner Fläche

$$S = y_1^2 y_2^2 + y_2^2 y_3^2 + y_3^2 y_1^2 - y_1 y_2 y_3 y_4 = 0 \tag{2}$$

abgebildet wird und dadurch die Eigenschaften von S erhalten werden können. Hier handelt es sich um das topologische Verhältnis von S_2 zu S.

Eine Ebene

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + a_4 y_4 = 0 \tag{3}$$

schneidet S in einer Kurve 4. Ordnung C_4 mit drei Doppelpunkten, deren Bild auf S_2 der Kegelschnitt

$$K = a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2 + a_4 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0 \tag{4}$$

ist. Er zerfällt in zwei Geraden (reell oder imaginär), wenn die Diskriminante

$$\begin{vmatrix} a_4 & \frac{a_3}{2} & \frac{a_2}{2} \\ \frac{a_3}{2} & a_4 & \frac{a_1}{2} \\ \frac{a_2}{2} & \frac{a_1}{2} & a_4 \end{vmatrix} = 2\,(4 a_4^3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 a_4 - a_2^2 a_4 + a_1 a_2 a_3) = 0\,. \tag{5}$$

Nun betrachte man zwei Geraden

$$\begin{aligned} u_1 x_1 + u_2 x_2 \quad + a_3 x_3 \quad &= 0 , \\ u_2 u_3 x_1 + u_3 u_1 x_2 + u_1 u_2 x_3 &= 0 , \end{aligned} \tag{6}$$

deren Produkt

$$u_1(u_2^2+u_3^2)\,x_2 x_3 + u_2(u_3^2+u_1^2)x_3 x_1 + u_3(u_1^2+u_2^2)\,x_1 x_2 + u_1 u_2 u_3(x_1^2+x_2^2+x_3^2) = 0$$

ist. Dieses ist identisch mit (4), wenn

$$a_1 = u_1(u_2^2+u_3^2)\,, \quad a_2 = u_2(u_3^2+u_1^2)\,, \quad a_3 = u_3(u_1^2+u_2^2)\,, \quad a_4 = u_1 u_2 u_3 \tag{7}$$

ist. Setzt man diese Werte in (5) ein, so ergibt sich als Bedingung, daß die Geraden (6) einen degenerierten Kegelschnitt der Art (4) bilden, nach Division durch $2\,u_1\,u_2\,u_3$,

$$4u_1^2u_2^2u_3^2 - u_1^2(u_2^2+u_3^2)^2 - u_2^2(u_3^2+u_1^2)^2 - u_3^2(u_1^2+u_2^2)^2 + (u_2^2+u_3^2)\;(u_3^2+u_1^2)\;(u_1^2+u_2^2) \equiv 0 .$$

Diese ist also durch die Annahme (6) erfüllt.

2. Wenn K degeneriert, so löst sich C_4 in zwei Kegelschnitte auf, welche sich in vier Punkten schneiden, wovon drei auf den drei Doppelgeraden von S liegen. Der vierte P_y ist das Bild des Schnittpunktes P_x der beiden Geraden (6). Die Koordinaten von P_x werden als

$$\begin{aligned} \varrho\, x_1 &= u_1(u_2^2 - u_3^2)\;, \\ \varrho\, x_2 &= u_2(u_3^2 - u_1^2)\;, \\ \varrho\, x_3 &= u_3(u_1^2 - u_2^2)\;, \end{aligned} \tag{8}$$

gefunden. Umgekehrt, wenn P_x gegeben ist, so findet man die Koordinaten u_i, u_i' der Geraden (6) aus deren Gleichungen durch Auflösung nach den (u). In diesen findet sich die Quadratwurzel

$$R = \sqrt{-(x_1+x_2+x_3)\;(-x_1+x_2+x_3)\;(x_1-x_2+x_3)\;(x_1+x_2-x_3)}$$

wie sie in § 1 untersucht wurde. Die beiden Vorzeichen derselben kann man mit den Geraden (u) und (u') assoziieren. Betrachtet man nun die in Fig. 1 gegebene Gebietsteilung und geht auf S_2 zurück, so hat man sofort den

Satz 1. *Die Gebiete Q_1, Q_2, Q_3 und T_1, T_2, T_3, T_4 der projektiven Ebene S_2 werden durch* (1) *bezüglich auf die konkaven und konvexen Teile der Steinerschen Fläche abgebildet, wo die Tangentialebenen S bezüglich in Paaren von reellen und imaginären Kegelschnitten schneiden.*

§ 3. Die Abbildung von S_2 auf die Cayley'sche kubische Fläche

1. Die Involution (1) $\varrho x_i' = \frac{1}{x_i}$ läßt die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \sigma x_1 (x_2^2 + x_3^2) &= y_1 \ , \\ \sigma x_2 (x_3^2 + x_1^2) &= y_2 \ , \\ \sigma x_3 (x_1^2 + x_2^2) &= y_3 \ , \\ \sigma x_1 x_2 x_3 \qquad &= y_4 \ , \end{aligned} \tag{2}$$

bis auf den gemeinsamen Faktor $x_1\, x_2\, x_3$ invariant. Somit ist also auch das ∞^3 System von Kurven dritter Ordnung C_3

$$a_1 x_1 (x_2^2 + x_3^2) + a_2 x_2 (x_3^2 + x_1^2) + a_3 x_3 (x_1^2 + x_2^2) + 2 a_4 x_1 x_2 x_3 = 0 \tag{3}$$

darin invariant. Zwei entsprechende Punkte P, P' auf C_3 bestimmen eine Gerade (u), welche, wenn P C_3 beschreibt, eine Kurve dritter Klasse umhüllen, deren Gleichung ohne Schwierigkeit in der Form

$$\begin{aligned} &(-a_1+a_2+a_3-2a_4)\ (\ \ u_1-u_2-u_3)\ (\ \ u_1+u_2-u_3)\ (u_1+u_2+u_3) \\ +&(\ \ a_1-a_2+a_3-2a_4)\ (\ \ u_1+u_2-u_3)\ (-u_1+u_2+u_3)\ (u_1+u_2+u_3) \\ +&(\ \ a_1+a_2-a_3-2a_4)\ (-u_1+u_2+u_3)\ (\ \ u_1-u_2+u_3)\ (u_1+u_2+u_3) \\ +&(\ \ a_1+a_2+a_3+2a_4)\ (-u_1+u_2+u_3)\ (\ \ u_1-u_2+u_3)\ (u_1+u_2-u_3) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

gefunden wird. Daß die Klasse 3 ist, kann natürlich auch durch das Prinzip der (1,1)-Korrespondenz auf einer kubischen Kurve bewiesen werden.

2. Betrachtet man in (2) die y_i als Koordinaten eines projektiven Raumes S_3 (y), so kann durch (2) S_2 auf die Cayleysche kubische Fläche Γ_3

$$2\, y_1\, y_2\, y_3 - (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)\, y_4 + y_4^3 = 0 \tag{5}$$

abgebildet werden, wie ich schon früher bewiesen habe[1]).

Die Klassenkurve (4) berührt die sechs invarianten Geraden der Transformation T (1). Die invarianten Punkte $B_0(1, 1, 1)$; $B_1(-1, 1, 1)$; $B_2(1, -1, 1)$; $B_3(1, 1, -1)$ werden auf die Doppelpunkte $B_0^*(1, 1, 1, 1)$; $B_1^*(-1, 1, 1, -1)$; $B_2^*(1, -1, 1, -1)$; $B_3^*(1, 1, -1, -1)$ und $A_1(1, 0, 0)$; $A_2(0, 1, 0)$; $A_3(0, 0, 1)$ auf die Geraden $V_2\, V_3$, $V_3\, V_1$, $V_1\, V_2$ des Koordinatentetraeders $V_1\, V_2\, V_3\, V_4$ von S_3 abgebildet. Die Kanten $V_i\, V_k$ schneiden die Einheitsebene $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$ in sechs Punkten

[1]) American Journal of Mathematics, Vol. XLVIII (1926), pp. 21—44.

eines Vierseits, dessen Diagonalpunkte gerade B_1^*, B_2^*, B_3^* sind. Die invarianten Geraden $B_i B_k$ von T werden auf die Kanten $B_i^* B_k^*$ des Knotentetraeders abgebildet.

Die Gleichungen der Seitenflächen von (B_i^*) sind für

$$\begin{array}{lll} B_0^* B_2^* B_3^* & : & -y + y_2 + y_3 - y_4 = 0 \,, \\ B_0^* B_3^* B_1^* & : & y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = 0 \,, \\ B_0^* B_1^* B_2^* & : & y_1 + y_2 - y_3 - y_4 = 0 \,, \\ B_1^* B_2^* B_3^* & : & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0 \,. \end{array} \tag{6}$$

Wir haben jetzt den

Satz 2: *Die ∞^2 Paare entsprechender Punkte der quadratischen Involution T in S_2 werden auf die Punkte der kubischen Fläche Γ_3 abgebildet. Umgekehrt jedem Punkt von Γ_3 entspricht ein Paar entsprechender Punkte in T*[2]).

3. Dem Schnitt der Ebene (C_y)

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 + u_4 y_4 = 0 \tag{7}$$

mit Γ_3 entspricht in S_2 die Kurve

$$C_x = u_1 x_1 (x_2^2 + x_3^2) + u_2 x_2 (x_3^2 + x_1^2) + u_3 x_3 (x_1^2 + x_2^2) + 2 u_4 x_1 x_2 x_3 = 0 \,. \tag{8}$$

Unter den Kurven C_x befinden sich auch die degenerierten, die aus einer Geraden und dem entsprechenden Kegelschnitt in T bestehen:

$$\begin{aligned} C_x &= (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)\,(a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2) \\ &= a_2 a_3 x_1 (x_2^2 + x_3^2) + a_3 a_1 x_2 (x_3^2 + x_1^2) + a_1 a_2 x_3 (x_1^2 + x_2^2) + (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) x_1 x_2 x_3 = 0 \,. \end{aligned} \tag{9}$$

Es wird (8) identisch mit (9) sein, wenn $u_1 = a_2 a_3$, $u_2 = a_3 a_1$, $u_3 = a_1 a_2$, $2 u_4 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. Durch Elimination der (a) erhält man die Bedingung das C_x (8) zerfällt:

$$u_2^2 u_3^2 + u_3^2 u_1^2 + u_1^2 u_2^2 - 2 u_1 u_2 u_3 u_4 = 0 \,. \tag{10}$$

Wie man erwarten muß, läßt sich leicht bestätigen, daß (10) die Diskriminante von C_x (8) ist. Wenn die u_i (10) befriedigen, so schneidet die Ebene (7) Γ_3 in einer Kurve mit Doppelpunkt, so daß sie Tangential-

[2]) Das ist ein einfaches Beispiel des Satzes von *Castelnuovo*, daß jede ebene Involution rational ist, d. h. auf eine rationale Fläche abgebildet werden kann.

ebene von Γ_3 ist. Da Γ_3 vier Doppelpunkte hat, so ist sie von der 4. Klasse. Bestimmt man ihre Klassengleichung in gewohnter Weise, so findet man gerade die Gleichung (10). So folgt der

Satz 3: *Bei der Abbildung der quadratischen Involution in S_2 auf die Cayleysche Fläche Γ_3 ist die Klassengleichung von Γ_3 formell gleichbedeutend mit der Diskriminante von C_x in S_2.*

4. *Die konjugiert komplexen Paare der Involution T.*

Eine Gerade g

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \tag{11}$$

und der ihr entsprechende Kegelschnitt K

$$a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2 = 0 \tag{12}$$

in T, schneiden sich in einem Punktepaar (P, P') von T, dessen Koordinaten sich wie folgt ergeben:

$$\begin{aligned} P &\begin{cases} \varrho x_1 = a_2(-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + R) \;, \\ \varrho x^2 = a_1(\;\; a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - R) \;, \\ \varrho x_3 = 2 a_1 a_2 a_3 \;, \end{cases} \\ P' &\begin{cases} \varrho x_1' = a_2(-a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 - R) \;, \\ \varrho x_2' = a_1(\;\; a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 + R) \;, \\ \varrho x_3' = 2 a_1 a_2 a_3 \;, \end{cases} \end{aligned} \tag{13}$$

worin

$$R = \sqrt{a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 - 2(a_2^2 a_3^2 + a_3^2 a_1^2 + a_1^2 a_2^2)} \;,$$

oder

$$R = \sqrt{-(a_1+a_2+a_3)\,(-a_1+a_2+a_3)\,(a_1-a_2+a_3)\,(a_1+a_2-a_3)} \,. \tag{14}$$

Das Punktepaar (P, P') ist reell oder imaginär jenachdem R es ist. Das Kriterium dafür wurde, wenn $(a) = (x)$ in § 1 aufgestellt.

Um zu zeigen, daß auch ein konjugiert komplexes (imaginäres) Punktepaar (P, P') auf einen reellen Punkt von Γ_3 abgebildet wird, beweisen wir zuerst die bekannte Tatsache, daß die Gerade, auf welcher ein solches Punktepaar liegt, reell ist. Seien

$$A\,(a + ib,\; c + id,\; 1)\,, \qquad \overline{A}\,(a - ib,\; c - id\,,\; 1)$$

zwei solche Punkte, so ergibt sich leicht die Gleichung für $A\overline{A}$, $dx_1 - bx_2 - (ad - bc)\,x_3 = 0$. Jetzt finden wir P' welcher A in T entspricht, dann P welcher $\overline{A}$ entspricht

$$P' \begin{cases} \varrho x_1' = x_2 x_3 = c + id \\ \varrho x_2' = x_2 x_1 = a + ib \\ \varrho x_3' = x_1 x_2 = ac - bd + i(ad + bc)\ , \end{cases}$$

oder nach leichter Rechnung (15)

$$P' \begin{cases} \delta x_1' = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - i\dfrac{b}{a^2 + b^2} \\ \delta x_2' = \dfrac{c}{c^2 + d^2} - i\dfrac{d}{c^2 + d^2} \\ \delta x_3' = 1 \end{cases} .$$

Damit $P' \equiv \overline{A}$ ist es notwendig, daß $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$. Nun kann man nach diesen Bedingungen $a = \cos\Theta$, $b = \sin\Theta$, $c = \cos\Phi$, $d = \sin\Phi$ setzen, so daß jetzt P' und P die Form annehmen

$$P' \begin{cases} \varrho x_1' = \cos\Theta - i\sin\Theta = e^{-i\Theta}\ , \\ \varrho x_2' = \cos\Phi - i\sin\Phi = e^{-i\Phi}\ , \\ \varrho x_3' = 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\ , \end{cases} \tag{16}$$

$$P \begin{cases} \varrho x_1 = e^{i\Theta}\ , \\ \varrho x_2 = e^{i\Phi}\ , \\ \varrho x_3 = 1\ . \end{cases} \tag{16$_1$}$$

Werden diese Werte in dem Bildpunkte von P (oder P') eingesetzt (2), so ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta y_1 &= e^{i\Phi} + e^{-i\Phi} &&= \tau\cos\Phi &&, \\ \delta y_2 &= e^{i\Theta} + e^{-i\Theta} &&= \tau\cos\Theta &&, \\ \delta y_3 &= e^{i(\Theta-\Phi)} + e^{-i(\Theta-\Phi)} &&= \tau\cos(\Theta - \Phi) &&, \\ \delta y_4 &= 2 &&= \tau &&, \end{aligned}$$

ein reeller Punkt.

Es wurde oben festgestellt, daß einer C_x in S_2, welche aus einer Geraden und ihrem entsprechenden Kegelschnitt besteht auf Γ_3 ein Tangentialebenenschnitt, d. h. eine kubische Kurve mit Doppelpunkt entspricht. Im Falle eines reellen Paares P, P' als Schnitt von g und K erhält man auf Γ_3 einen Tangentialebenenschnitt mit nicht isoliertem Doppelpunkt.

Ist (P, P') ein konjugiert komplexes Paar, so ergibt sich ein isolierter Doppelpunkt. Es kann weiter durch Rechnung festgestellt werden, daß der Teil von Γ_3 mit solchen isolierten Doppelpunkten konvex ist und einen tetraederförmigen Körper Δ bildet, der auf den Knoten von Γ_3 aufgespannt ist. Diese soll hier der Kürze halber nicht eingeschlossen werden. Der übrige Teil von Γ_3 ist hyperbolisch, d. h., die Tangentialebenen in seinen Punkten schneiden Γ_3 in Kurven mit reellen Zweigen durch die Doppelpunkte. Δ ist elliptisch.

Das Gesamtresultat der Abbildung kann zusammengefaßt werden in dem

Satz 4: *Das Geradennetz der projektiven Ebene S_2 wird durch die quadratische Involution T in zwei Klassen R und J geteilt mit bezüglich reellen und imaginären Paaren von entsprechenden Punkten in T. Die Paare von R und J werden bezüglich auf den hyperbolischen und elliptischen Teil der Cayleyschen kubischen Fläche Γ_3 abgebildet.*

(Eingegangen den 25. Januar 1940.)