Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 12 (1939-1940)

Artikel: Quelques remarques sur la théorie des transformations linéaires bornées des fonctions de plusieurs variables dans les espaces fonctionels L... .

Autor: Plancherel, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12804

Quelques remarques sur la théorie des transformations linéaires bornées des fonctions de plusieurs variables dans les espaces fonctionnels L^{α}

Par M. Plancherel, Zurich

Les pages suivantes apportent quelques compléments à la théorie des transformations linéaires bornées des fonctions de plusieurs variables dans les espaces fonctionnels L^{α}.

Au § 1 est étudiée la transformation des fonctions de m variables qui est déterminée par la donnée d'une transformation des fonctions de p variables ($1 \leqq p < m$) et d'une transformation des fonctions de $(m - p)$ variables.

Le § 2 étudie le prolongement dans $L^{\alpha}(1 \leqq \alpha < 2)$ des transformations linéaires bornées de L^2 à noyau borné.

§ 1. Représentons par $x = (x_1, \ldots, x_m)$ un point de l'espace euclidien R_m à m dimensions et par L_m^{α} l'ensemble des fonctions mesurables $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$, telles que

$$\int_{R_m} |f(x)|^{\alpha} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, \ldots, x_m)|^{\alpha} dx_1 \ldots dx_m \tag{1}$$

ait une valeur finie.

Une transformation T faisant correspondre à toute fonction $f(x)$ de L_m^{α} une fonction $F(y) = F(y_1, \ldots, y_n) = T(f(x); y)$ de L_n^{β} est linéaire si

$$T(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 T f_1 + a_2 T f_2 , \tag{2}$$

quelles que soient les fonctions f_1, f_2 de L_m^{α} et les constantes a_1, a_2. Elle est bornée, s'il existe une constante b, telle que

$$\left(\int_{R_n} |F(y)|^{\beta} dy \right)^{\frac{1}{\beta}} \leqq b \left(\int_{R_m} |f(x)|^{\alpha} dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{3}$$

pour toute fonction f de L_m^{α}. La plus petite constante $b_T = b_T(\alpha, \beta)$ vérifiant (3) est la borne de la transformation T de L_m^{α} dans L_n^{β}.

Soient p, q deux entiers positifs et $1 \leqq p < m$, $1 \leqq q < n$. Nous désignerons par $x' = (x_1, \ldots, x_p)$ un point de l'espace R_p, par $x'' = (x_{p+1}, \ldots, x_m)$ un point de l'espace R_{m-p}, par $y' = (y_1, \ldots, y_q)$ un point de l'espace R_q et par $y'' = (y_{q+1}, \ldots, y_n)$ un point de l'espace R_{n-q}.

Théorème 1. Si T' est une transformation linéaire bornée de L_p^α dans L_q^β et T'' une transformation linéaire bornée de L_{m-p}^α dans L_{m-q}^β, il existe, lorsque $0 < \alpha \leqq \beta$, une et une seule transformation T de L_m^α dans L_n^β telle que

1. *T soit linéaire bornée,*
2. $$T(f'f'') = T'f' \cdot T''f'' , \tag{4}$$

lorsque $f'(x')$ appartient à L_p^α et $f''(x'')$ à L_{m-p}^α. La borne b_T est égale à $b_{T'} \cdot b_{T''}$.

Nous représenterons cette transformation T par le symbole $T = (T', T'') = (T'', T')$.

Le caractère linéaire imposé à T et la relation (4) permettent de définir T d'une manière univoque pour toute fonction-escalier de L_m^α. Une telle fonction est représentable par une somme

$$\varphi(x) = \varphi(x', x'') = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i'(x')\, \varphi_i''(x'') , \tag{5}$$

dans laquelle $\varphi_i'(x')$ est une fonction nulle à l'extérieur et constante à l'intérieur d'un intervalle p - dimensionnel I_i' et $\varphi_i''(x'')$ une fonction nulle à l'extérieur et constante à l'intérieur d'un intervalle $(m-p)$ - dimensionnel I_i''. Par conséquent, la transformée de (5) est égale à

$$T\varphi = \sum_{i=1}^{k} T'\varphi_i' \cdot T''\varphi_i'' .$$

On s'assure aisément que $T\varphi$ est indépendante de la représentation particulière (5) qui, elle, n'est pas univoque, et que

$$T(\varphi\,; y) = T''[T'(\varphi(x', x'')\,; y')\,; y''] = T'[T''(\varphi(x', x'')\,; y'')\,; y'] . \tag{6}$$

On peut toujours faire en sorte que dans la représentation (5) de la fonction-escalier φ les intervalles I_i', resp. I_i'', n'empiètent pas les uns sur les autres. En admettant dans ce qui suit que c'est le cas, on voit que, pour tout $\gamma > 0$, sauf évent. aux points de contact des intervalles,

$$|\varphi|^\gamma = \sum_{i=1}^{k} |\varphi_i'\varphi_i''|^\gamma , \tag{7}$$

$$\int_{R_p} |\varphi(x', x'')|^\gamma dx' = \sum_{=1}^{k} |\varphi_i''(x'')|^\gamma \int_{R_p} |\varphi_i'|^\gamma dx' , \quad \int_{R_m} |\varphi(x)|^\gamma dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{R_m} |\varphi_i'\varphi_i''|^\gamma dx . \tag{8}$$

Or, en tenant compte du fait que T' et T'' sont linéaires et bornées ainsi que des relations (5) — (8), on peut écrire

$$\left(\int_{R_n} |T\varphi|^\beta dy\right)^{\frac{1}{\beta}} = \left[\int_{R_q} dy' \int_{R_{n-q}} |T''(\sum_1^k \varphi_i'' T'\varphi_i')|^\beta dy''\right]^{\frac{1}{\beta}}$$

$$\leqq b_{T''}\left[\int_{R_q} dy' \left(\int_{R_{m-p}} |\sum_1^k \varphi_i'' T'\varphi_i'|^\alpha dx''\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\beta}}$$

$$= b_{T''}\left[\int_{R_q} dy' \left(\sum_1^k |T'\varphi_i'|^\alpha \int_{R_{m-p}} |\varphi_i''|^\alpha dx''\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}\right]^{\frac{1}{\beta}}$$

$$= b_{T''}\left\{\left[\int_{R_q} dy' \left(\sum_1^k |T'\varphi_i'|^\alpha \int_{R_{m-p}} |\varphi_i''|^\alpha dx''\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}\right]^{\frac{\alpha}{\beta}}\right\}^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Appliquons l'inégalité de Minkowski (ici intervient l'hypothèse $\alpha \leqq \beta$) [1]) au crochet du second membre de la dernière inégalité. Il vient

$$\left(\int_{R_m} |T\varphi|^\beta dy\right)^{\frac{1}{\beta}} \leqq b_{T''}\left\{\sum_1^k \int_{R_{m-p}} |\varphi_i''|^\alpha dx'' \left(\int_{R_q} |T'\varphi_i'|^\beta dy'\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\leqq b_{T'} b_{T''}\left\{\sum_1^k \int_{R_{m-p}} |\varphi_i''|^\alpha dx'' \int_{R_p} |\varphi_i'|^\alpha dx'\right\}^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$= b_{T'} b_{T''}\left\{\sum_1^k \int_{R_m} |\varphi_i'\varphi_i''|^\alpha dx\right\}^{\frac{1}{\alpha}} = b_{T'} b_{T''}\left(\int_{R_m} |\varphi|^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

On a donc pour toute fonction-escalier φ

$$\left(\int_{R_m} |T\varphi|^\beta dy\right)^{\frac{1}{\beta}} \leqq b_{T'} b_{T''}\left(\int_{R_m} |\varphi|^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{9}$$

Or, l'ensemble des fonctions-escaliers de R_m forme une multiplicité linéaire partout dense dans l'espace fonctionnel L_m^α métrisé en prenant comme distance de deux fonctions f, g la quantité $(\int_{R_m} |f - g|^\alpha dx)^{1/\alpha}$. On pourra donc approcher en moyenne d'ordre α toute fonction f de L_m^α par une suite φ_h, $(h = 1, 2, \ldots)$, de fonctions-escaliers. En vertu de (9), la suite correspondante $T\varphi_h$ convergera en moyenne d'ordre β vers une fonction F univoquement déterminée par f. En définissant alors Tf par $Tf = F$, on s'assurera que la transformation T ainsi définie répond à toutes les conditions du théorème 1.

---

[1]) Sur les inégalités de Minkowski voir, p. ex. *G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya,* Inequalities (Cambridge, 1934).

Théorème 2. Sous les hypothèses du théorème 1, on a pour toute fonction $f(x) = f(x', x'')$ *de* L^{α}_{m}

$$T\,(f(x)\,;\,y) = T''[T'(f(x', x'')\,;\,y')\,;\,y''] = T'[T''(f(x', x'')\,;\,y'')\,;\,y'] . \qquad (10)$$

C'est l'extension de la formule (6) établie pour les fonctions-escaliers. Il suffira de démontrer la première des formules (10). Elle implique l'existence des fonctions

$$F'(y', x'') = T'\,(f(x', x'')\,;\,y')\,, \quad F''(y', y'') = T''(F'(y', x'')\,;\,y'')\,,$$

l'appartenance de F' — en tant que fonction de y' — à L^{β}_{q}, celle de F'' — en tant que fonction de y'' — à L^{β}_{n-q} et l'égalité $F'' = Tf$.

$f(x)$ appartenant à L^{α}_{m}, on sait, d'après un théorème de G. Fubini sur les intégrales multiples que, considérée comme fonction de x', elle appartient aussi à L^{α}_{p}, sauf peut-être pour des valeurs de x'' formant un ensemble E'' de mesure $(m - p)$-dimensionnelle nulle. Par conséquent, en chaque point x'' de $R_{m-p} - E''$, $F'(y', x'')$ existe et

$$\Big(\int\limits_{R_q} |F'(y', x'')|^{\beta} dy'\Big)^{\frac{1}{\beta}} \leqq b_{T''}\Big(\int\limits_{R_p} |f(x', x'')|^{\alpha} dx'\Big)^{\frac{1}{\alpha}}$$

et, par suite, encore

$$\int\limits_{R_{m-p}} dx''\Big(\int\limits_{R_q} |F'(y', x'')|^{\beta} dy'\Big)^{\frac{\alpha}{\beta}} \leqq b^{\alpha}_{T'}\int\limits_{R_{m-p}} dx''\int\limits_{R_p} |f(x', x'')|^{\alpha} dx'$$

$$= b^{\alpha}_{T'}\int\limits_{R_m} |f(x)|^{\alpha} dx < \infty\ .$$

D'autre part, on a l'inégalité

$$\int\limits_{R_q} dy'\Big(\int\limits_{R_{m-p}} |F'(y', x'')|^{\alpha} dx''\Big)^{\frac{\beta}{\alpha}} \leqq \Big[\int\limits_{R_{m-p}} dx''\Big(\int\limits_{R_q} |F'(y', x'')|^{\beta} dy'\Big)^{\frac{\alpha}{\beta}}\Big]^{\frac{\beta}{\alpha}} \qquad (12)$$

qui résulte de la généralisation suivante d'une autre inégalité de Minkowski [2]).

Si $g(y', x'')$ *est une fonction réelle, non négative, appartenant à la classe* L^{γ}_{q+m-p}, *on a, sous l'hypothèse* $0 < \gamma \leqq 1$,

$$\int\limits_{R_q} dy'\Big(\int\limits_{R_{m-p}} (g(y', x''))^{\gamma} dx''\Big)^{\frac{1}{\gamma}} \leqq \Big[\int\limits_{R_{m-p}}\Big(\int\limits_{R_q} g(y', x'')\, dy'\Big)^{\gamma} dx''\Big]^{\frac{1}{\gamma}} .$$

[2]) loc. cit. [1]), p. 148.

Il suffit de prendre $\gamma = \alpha/\beta$ et $g(y', x'') = |F'(y', x'')|^{\beta}$ pour obtenir (12). (11) et (12) entraînent l'inégalité

$$\int_{R_q} dy' \Big(\int_{R_{m-p}} |F'(y', x'')|^{\alpha} dx'' \Big)^{\frac{\beta}{\alpha}} \leqq b^{\beta}_{T'} \Big(\int_{R_m} |f|^{\alpha} dx \Big)^{\frac{\beta}{\alpha}} < \infty . \tag{13}$$

La fonction de y'

$$\int_{R_{m-p}} |F'(y', x'')|^{\alpha} dx''$$

existe donc et a une valeur finie, sauf évent. aux points d'un ensemble E' de mesure q-dimensionnelle nulle. En chaque point de $R_q - E'$, $F'(y', x'')$ appartient — en tant que fonction de x'' — à la classe L^{α}_{m-p}. Par conséquent, $F'(y', x'')$ possède une transformée $T''[F'(y', x''); y'']$ qui — en tant que fonction de y'' — appartient à la classe L^{β}_{n-q}. Ainsi se trouve établie l'existence de F'' et l'inégalité

$$\Big(\int_{R_{n-q}} |F''(y', y'')|^{\beta} dy'' \Big)^{\frac{1}{\beta}} \leqq b_{T''} \Big(\int_{R_{m-p}} |F'(y', x'')|^{\alpha} dx'' \Big)^{\frac{1}{\alpha}} .$$

Donc,

$$\int_{R_q} dy' \int_{R_{n-q}} |F''|^{\beta} dy'' \leqq b^{\beta}_{T''} \int_{R_q} dy' \Big(\int_{R_{m-p}} |F'(y', x'')|^{\alpha} dx'' \Big)^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

$$\leqq b^{\beta}_{T''} b^{\beta}_{T'} \Big(\int_{R_m} |f|^{\alpha} dx \Big)^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

d'où encore

$$\Big(\int_{R_n} |F''(y)|^{\beta} dy \Big)^{\frac{1}{\beta}} \leqq b_{T'} \,.\, b_{T''} \Big(\int_{R_m} |f(x)|^{\alpha} dx \Big)^{\frac{1}{\alpha}} . \tag{14}$$

Il reste à démontrer que $F''(y) = T[f(x); y]$. Or, cette égalité a déjà été établie pour les fonctions-escaliers. En vertu de l'inégalité (14), on remarquera que si la fonction f est approchée en moyenne d'ordre α par une suite de fonctions-escaliers $\varphi_h (h = 1, 2, \ldots)$, les fonctions correspondantes Φ''_h convergent en moyenne d'ordre β vers F''. D'autre part, $\Phi''_h = T\varphi_h$ et $T\varphi_h$ converge vers Tf, puisque T est une transformation linéaire bornée. Donc $F'' = Tf$.

§ 2. A toute transformation linéaire bornée T_2 de L^2_m dans L^2_n est attachée une fonction $\tau(x; y) = \tau(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ appelée la génératrice de T_2 et telle que

$$T_2(f(x); y) = \frac{\partial^n}{\partial y_1 \ldots \partial y_n} \int_{R_m} f(x) \frac{\partial^m \overline{\tau(x; y)}}{\partial x_1 \ldots \partial x_m} dx .$$

Si T'_2 et T''_2 sont des transformations linéaires bornées de L^2_p dans L^2_q, resp. de L^2_{m-p} dans L^2_{n-q} et si $\tau'(x'; y')$, $\tau''(x''; y'')$ sont leurs génératrices, la transformation $T_2 = (T_2', T_2'')$ a pour génératrice la fonction $\tau(x, y) = \tau'(x'; y')\tau''(x''; y'')$.

Réciproquement, si la génératrice $\tau(x ; y)$ d'une transformation linéaire bornée T_2 est un produit $\tau'(x'; y')\tau''(x''; y''), \tau'$ et τ'' (supposées non constantes) sont les génératrices de transformations T_2' et T_2'' telles que $(T_2', T_2'') = T_2$.

L'adjointe T_2^* de la transformation T_2 transforme les fonctions de L_n^2 en fonctions de L_m^2. Si $G(y)$ appartient à L_n^2,

$$T_2^*(G(y); x) = \frac{\partial^m}{\partial x_1 \ldots \partial x_m} \int_{R_n} G(y) \frac{\partial^n \tau(x; y)}{\partial y_1 \ldots \partial y_n} dy \ .$$

On a, pour toute fonction f de L_m^2 et G de L_n^2 [3])

$$\int_{R_m} f(x)\, \overline{T_2^*(G(y); x)}\, dx = \int_{R_n} \overline{G(y)}\, T_2(f(x); y)\, dy \ .$$

Nous considérons dans ce § la classe particulièrement intéressante des transformations dont la génératrice est une fonction absolument continue du point $(x ; y)$ de l'espace R_{m+n}. Nous appellerons alors *noyau* de la transformation la dérivée

$$\varphi(x ; y) = \frac{\partial^{m+n} \tau(x; y)}{\partial x_1 \ldots \partial x_m\, \partial y_1 \ldots \partial y_n}$$

et nous supposerons encore que ce noyau est borné, c'est-à-dire qu'il existe une constante M telle que, presque partout, dans R_{m+n}

$$|\varphi(x ; y)| \leqq M \ .$$

La transformée $F(y) = T_2\left(f(x) ; y\right)$ d'une fonction f de L_m^2 est alors la limite en moyenne d'ordre 2 de

$$\int_{-r_1}^{r_1} \cdots \int_{-r_m}^{r_m} f(x_1, \ldots, x_m)\, \overline{\varphi(x_1 \ldots, x_m ; y_1, \ldots, x_n)}\, dx_1 \ldots dx_m \qquad (15)$$

lorsque $r_1 \to \infty, \ldots, r_m \to \infty$. Nous la représenterons symboliquement par

$$F(y) = T_2(f(x) ; y) \sim \int_{R_m} f(x)\, \overline{\varphi(x; y)}\, dx \ . \qquad (16)$$

Désignons par $b = b_{T_2}(2, 2)$ la borne de cette transformation. Donc,

$$\int_{R_n} |F(y)|^2 dy \leqq b^2 \int_{R_m} |f(x)|^2 dx \ .$$

[3]) Voir, p. ex., *M. Plancherel*, Note sur les transformations linéaires et les transformations de Fourier des fonctions de plusieurs variables (Commentarii math. helv., t. 9 (1937), p. 249—262).

Théorème 3. Si f appartient à L_m^α $(1 \leqq \alpha \leqq 2)$, l'expression (15) *converge en moyenne d'ordre $\alpha' = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}$ vers une fonction F de $L_n^{\alpha'}$, lorsque $r_1 \to \infty, \ldots, r_m \to \infty$. La correspondance $f \to F$ ainsi établie définit une transformation T_α qui a les propriétés suivantes :*

1. T_α est une transformation linéaire bornée de L_m^α dans $L_n^{\alpha'}$. Sa borne $b_{T_\alpha}(\alpha, \alpha')$ ne surpasse pas

$$b^{\frac{2(\alpha-1)}{\alpha}} M^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}$$

2. Lorsque f appartient simultanément aux classes L_m^α et L_m^2, on a $T_\alpha f = T_2 f$.

Dans le cas $\alpha = 1$, la convergence de (15) vers $F(y)$ est la convergence ordinaire et l'inégalité

$$\Big(\int_{R_n} |F(y)|^{\alpha'} dy\Big)^{\frac{1}{\alpha'}} \leqq b^{\frac{2(\alpha-1)}{\alpha}} M^{\frac{2-\alpha}{\alpha}} \Big(\int_{R_m} |f(x)|^\alpha dx\Big)^{\frac{1}{\alpha}}$$

est à remplacer par

$$|T_1(f\,;\,y)| = |F(y)| \leqq M \int_{R_m} |f(x)|\, dx\,.$$

Les propriétés de T_α sont immédiates dans le cas $\alpha = 1$. Il en est de même de la propriété 2, dès que la propriété 1 est démontrée. Il suffira donc d'établir cette dernière lorsque $1 < \alpha < 2$. Cela peut se faire, soit à l'aide d'un théorème de M. Riesz[4]), soit en suivant les raisonnements que nous avons donnés dans une note antérieure[5]) en nous inspirant d'une méthode de F. Riesz. On remarquera d'abord que la fonction

$$\psi(\xi\,;\eta) = \frac{1}{M}\varphi\Big(b\,\frac{x}{M}\,;\ b\,\frac{y}{M}\Big)$$

où

$$\xi = b\,\frac{x}{M}\,,\quad \eta = b\,\frac{y}{M}$$

est le noyau d'une transformation S_2 de L_m^2 dans L_n^2 de borne 1 et que $|\psi(\xi\,;\eta| \leqq 1$. L'inégalité (16) relative à T_α se ramène ainsi à une

---

[4]) Une démonstration basée sur le théorème de M. Riesz est donnée par *A. Zygmund*, Trigonometrical series (Varsovie, 1935), p. 198.

[5]) *M. Plancherel*, Formule de Parseval et transformations fonctionnelles orthogonales (Commentarii math. helv., t. 1 (1929), p. 273—288). Corrigeons quelques fautes qui se sont glissées dans cette note. Page 277, ligne 6 depuis le bas, ajouter à „lorsque $\Phi(x, y)$ est symétrique" les mots: et que $e = E$; p. 278, ligne 5, au lieu de $\nu \geqq \frac{1}{2}$ lire: $\nu \geqq -\frac{1}{2}$; p. 281, ligne 5 depuis le bas, au lieu de $M^{\frac{2-\alpha}{\alpha}}$ lire $M^{-\frac{2-\alpha}{\alpha}}$.

inégalité analogue relative à une transformation S_α et au cas $b = M = 1$ On montrera ensuite, comme au § 4 de la note rappelée, que tout repose sur la démonstration du cas particulier suivant de (16)

$$\left(\int_Y dy \left| \int_X f(\xi)\, \overline{\psi(x,\eta)}\, d\xi \right|^{\alpha'}\right)^{\frac{1}{\alpha'}} \leqq \left(\int_X |f(\xi)|^\alpha d\xi\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

où X et Y désignent deux intervalles de R_m, resp. de R_n et f une fonction arbitraire de R_m. Or, la démonstration de cette inégalité se fait comme au § 5 de la note en question [6].

Notons encore que la transformation

$$T^*_\alpha(G(y)\,;\,x) \sim \int_{R_n} G(y)\,\varphi(x\,;\,y)\,dy$$

est une transformation linéaire bornée de L^α_n dans $L^{\alpha'}_m$ et que la relation

$$\int_{R_m} f(x)\,\overline{T^*_\alpha(G\,;\,x)}\,dx = \int_{R_n} \overline{G(y)}\,T_\alpha(f\,;\,y)\,dy$$

a lieu pour toute fonction f de L^α_m et toute fonction G de L^α_n.

Les théorèmes 1—3 ont une application immédiate dans l'étude de la transformation de Fourier des fonctions de m variables, qui a pour noyau

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-i(x_1 y_1 + \cdots + x_m y_m)}.$$

---

[6]) Les autres hypothèses faites dans cette note, en particulier sur l'orthogonalité de T (nous dirions aujourd'hui l'isométrie de T) ne jouent aucun rôle aux § 4 et 5. On y utilise le seul fait que la transformation T et son adjointe $\mathfrak{T}$ ont la même borne dans L^2.

(Reçu le 5 décembre 1939.)