Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 12 (1939-1940)

Artikel: Allgemeine Integration einiger partieller Differentialgleichungen der mathematischen Physik durch Quaternionenfunktionen.

Autor: Eichler, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12803

Allgemeine Integration einiger partieller Differentialgleichungen der mathematischen Physik durch Quaternionenfunktionen

Von M. Eichler, Göttingen

Einleitung

1. Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, die von Herrn Fueter ins Leben gerufene Funktionentheorie einer Quaternionenvariablen von einigen elementaren aber gleichwohl noch nicht beachteten Gesichtspunkten her zu beleuchten[1]). Diesen Gesichtspunkten liegen die folgenden beiden Fragen zugrunde: 1. Welche Bedeutung haben die regulären Quaternionenfunktionen für die Auffindung allgemeiner Integrale bekannter partieller Differentialgleichungen der mathematischen Physik, oder was für Differentialgleichungen von physikalischer Bedeutung lassen sich mittels regulärer Quaternionenfunktionen allgemein integrieren? 2. Was für Darstellungsarten von praktischem Wert gibt es für Quaternionenfunktionen in der Umgebung einer regulären Stelle? Naturgemäß kann von einer vollständigen Beantwortung keiner der beiden Fragen die Rede sein; hier werden im wesentlichen nur Ansätze aufgezeigt, die in späteren Veröffentlichungen zu vertiefen und auszuwerten sind.

Um die in den einzelnen Formeln auftretenden Symmetrien und Unsymmetrien deutlich hervorzuheben, führen wir die folgenden Bezeichnungen ein: die Grundvariable z wird als Summe ihres Realteils mit einem skalaren Produkt geschrieben:

$$z = x + i_1 x_1 + i_2 x_2 + i_3 x_3 = x + \mathfrak{i}\mathfrak{x} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{i} = (i_1, i_2, i_3), \mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3)\,;$$

im gleichen Sinne schreiben wir

$$F(z) = f(z) + \mathfrak{i}\mathfrak{f}(z)\,.$$

Die partiellen Ableitungen nach x bezeichnen wir durch übergesetzte Punkte, die bekannten Differentialoperatoren grad, div, rot, Δ sollen sich stets nur auf die Variablen x_1, x_2, x_3 beziehen. Die Regularitätsbedingungen für eine Funktion $F(z)$ schreiben sich nun in der Form

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \operatorname{div} \mathfrak{f} \\ \dot{\mathfrak{f}} &= -\operatorname{grad} f \pm \operatorname{rot} \mathfrak{f}\,, \end{aligned}$$

[1]) Eine gewisse Vertrautheit mit dem Gegenstand wird vorausgesetzt; es erübrigt sich dann, für die einzelnen hier benutzten Hauptsätze aus der Theorie Literaturhinweise zu bringen.

wo das obere Vorzeichen im Falle der Rechtsregularität, das untere im Falle der Linksregularität zu stehen hat.

Falls $F(z)$ von x nicht abhängt, erhält man den Spezialfall

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \mathfrak{f} = 0 \,, && \dot{f} = 0 \,, \\ &\operatorname{rot} \mathfrak{f} = \operatorname{grad} f \,, && \dot{\mathfrak{f}} = 0 \,. \end{aligned} \tag{1}$$

Dies sind die Differentialgleichungen des stationären elektromagnetischen Feldes im unmagnetischen Leiter, wenn f das elektrische Potential und $\mathfrak{f}$ die magnetische Feldstärke bedeutet — Materialkonstanten sind dabei durch passende Wahl des Maßstabes auf 1 normiert.

Eine weitere Spezialisierung erhält man, wenn auch $\operatorname{rot} \mathfrak{f} = 0$ ist. Dann gibt es bekanntlich eine Funktion g so, daß $\mathfrak{f} = \operatorname{grad} g$ ist; g muß die Gleichung

$$\Delta g = 0 \tag{2a}$$

erfüllen. In diesem Falle ist also

$$F(z) = \mathfrak{i} \operatorname{grad} g(\mathfrak{x}) \,, \tag{2b}$$

wo $g(\mathfrak{x})$ eine Potentialfunktion ist. $F(z)$ beschreibt jetzt ein elektrostatisches Feld. Funktionen dieser Art wollen wir *statisch* nennen.

Weiter unten werden wir zeigen, daß auch zeitlich veränderte zweidimensionale elektromagnetische Felder Anlaß zur Bildung regulärer Quaternionenfunktionen geben (Formel (16b)).

Funktionen, die sowohl rechts- wie linksregulär sind, wollen wir als *zweiseitig regulär* bezeichnen. Ihre Komponenten genügen den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} &\dot{f} = \operatorname{div} \mathfrak{f} \\ &\dot{\mathfrak{f}} = -\operatorname{grad} f \,, \ \operatorname{rot} \mathfrak{f} = 0 \ . \end{aligned}$$

$\dot{F}$ ist hiernach durch den Realteil f von F eindeutig festgelegt, F selber jedoch nur bis auf eine statische Funktion.

Für die Rechnung sind die Symbole grad, div, rot bisweilen nicht praktisch, wir führen deshalb an ihrer Stelle neue Symbole ein:

$$\begin{aligned} \delta_\lambda \varphi &= \mathfrak{i} \operatorname{grad} \varphi = i_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi_1 + i_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \varphi + i_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \varphi \,, \\ \delta_\varrho \varphi &= \operatorname{grad} \varphi \mathfrak{i} = \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi i_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \varphi i_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \varphi i_3 \ . \end{aligned}$$

Für reelle φ fallen $\delta_\varrho \varphi$ und $\delta_\lambda \varphi$ zusammen. Sind f ein reelles Skalar und $\mathfrak{f}$ ein reeller Vektor, so gilt

$$\delta_\lambda(\mathfrak{i}\mathfrak{f}) = -\operatorname{div}\mathfrak{f} + \mathfrak{i}\operatorname{rot}\mathfrak{f}\,, \qquad \delta_\lambda(\mathfrak{i}\mathfrak{f}) = -\operatorname{div}\mathfrak{f} - \mathfrak{i}\operatorname{rot}\mathfrak{f}\,,$$
$$\delta_\lambda^2 f = \delta_\varrho^2 f = -\Delta f\,,$$

sofern die nötigen Differenzierbarkeits- und Stetigkeitsvoraussetzungen erfüllt sind.

Die Randwertaufgabe für zeitlich unveränderliche elektromagnetische Felder.

2. Es sei $\mathfrak{G}$ irgend ein beliebiges endliches Gebiet im $\mathfrak{x}$-Raum, sein Rand $\mathfrak{R}$ möge aus einer endlichen Anzahl glatter Flächen bestehen. Dann kann man die den Gleichungen (1) und (2) genügenden Funktionen und damit ihre Komponenten durch ihre Werte auf $\mathfrak{R}$ ausdrücken. Der Ausdruck, der dies leistet, ist auf einem anderen Wege von Moïsil und Théodoresco [1a]) bewiesen worden; er ergibt sich durch eine leichte Rechnung aus der Fueterschen Integralformel.

Zur Durchführung dieser Rechnung bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}'$ den Rand des Gebietes im $(x, \mathfrak{x})$-Raume, welches aus allen Punkten aus $\mathfrak{G}$ und mit beliebiger x-Koordinate besteht. Ferner sei

$$\mathfrak{r} = (\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$$

der nach innen gerichtete Einheitsnormalvektor für $\mathfrak{R}$; er ist gleichzeitig der Einheitsnormalvektor für $\mathfrak{R}'$, wenn man noch als die x-Komponente 0 hinzufügt. Schließlich sei $d\omega$ das Oberflächenelement von $\mathfrak{R}$, dann ist $d\omega dx$ das Oberflächenelement von $\mathfrak{R}'$. Ist nun $\mathfrak{z}$ irgend ein innerer Punkt von $\mathfrak{G}$, so besagt die Fuetersche Integralformel

$$F(\mathfrak{z}) = f(\mathfrak{z}) + \mathfrak{i}\mathfrak{f}(\mathfrak{z}) = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{\mathfrak{R}'} F(\mathfrak{x})\,dZ\,\Delta\left((x + \mathfrak{i}(\mathfrak{x}-\mathfrak{z}))^{-1}\right)\,,$$

wobei

$$dZ = \mathfrak{i}\mathfrak{r}\;d\omega\,dx$$

ist. Es ist also

$$F(\mathfrak{z}) = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{\mathfrak{R}} F(\mathfrak{x})\,\mathfrak{i}\mathfrak{r}\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Delta\left((x + \mathfrak{i}(\mathfrak{x}-\mathfrak{z}))^{-1}\right)dx\right\}d\omega\,.$$

Nun ist

$$\Delta\left((x + \mathfrak{i}(\mathfrak{x}-\mathfrak{z}))^{-1}\right) = -4\,\frac{x - \mathfrak{i}(\mathfrak{x}-\mathfrak{z})}{(x^2 + (\mathfrak{x}-\mathfrak{z})^2)^2}\,,$$

und die Integration über x läßt sich in geschlossener Form ausführen:

[1a]) *Gr. C. Moïsil et N. Théodoresco,* Fonctions holomorphes dans l'espace, Mathematica **5** (1931), p. 142.

Wegen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2 + (\mathfrak{x} - \mathfrak{z})^2)^2} = 0\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + (\mathfrak{x} - \mathfrak{z})^2)^2} = \frac{1}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{z}|^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} - \int_0^{\infty} \frac{dx^{-1}}{(x^{-2} + 1)^2}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)} = \frac{\pi}{2}$$

erhält man

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\mathfrak{x})\,(\mathfrak{i}\,\mathfrak{r})\,\Delta\left((x + \mathfrak{i}(\mathfrak{x} - \mathfrak{z}))^{-1}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4\pi}\,\frac{-f.\mathfrak{r}(\mathfrak{x}-\mathfrak{z}) - [\mathfrak{f},\mathfrak{r}]\,(\mathfrak{x}-\mathfrak{z}) + \mathfrak{i}\,(f[\mathfrak{r},\mathfrak{x}-\mathfrak{z}] - (\mathfrak{f}\mathfrak{r})\,(\mathfrak{x}-\mathfrak{z}) + [[\mathfrak{f},\mathfrak{r}],\mathfrak{x}-\mathfrak{z}])}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{z}|^3}.$$

Es ist also im Falle des stationären Feldes

$$f(\mathfrak{z}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{R}} \frac{-f.\mathfrak{r}\,(\mathfrak{x}-\mathfrak{z}) - [\mathfrak{f},\mathfrak{r}]\,(\mathfrak{x}-\mathfrak{z})}{|x - z|^3}\,d\omega = -\frac{1}{4\pi}\,\mathrm{div}\int_{\mathfrak{R}} \frac{f\mathfrak{r} + [\mathfrak{f},\mathfrak{r}]}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{z}|}\,d\omega\,,$$

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{z}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{R}} \frac{f[\mathfrak{r},\mathfrak{x} - \mathfrak{z}] - (\mathfrak{f}\mathfrak{r})\,(\mathfrak{x} - \mathfrak{z}) + [[\mathfrak{f},\mathfrak{r}],\mathfrak{x} - \mathfrak{z}]}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{z}|^3}\,d\omega \tag{3}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\,\mathrm{grad}\int_{\mathfrak{R}} \frac{\mathfrak{f}\mathfrak{r}}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{z}|}\,d\omega - \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}\int_{\mathfrak{R}} \frac{f\mathfrak{r} + [\mathfrak{f},\mathfrak{r}]}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{z}|}\,d\omega\,.$$

Werden f und $\mathfrak{f}$ auf $\mathfrak{R}$ beliebig stetig gegeben, so sind $f(\mathfrak{z})$ und $\mathfrak{f}(\mathfrak{z})$ Real- und Imaginärteil einer im Inneren von $\mathfrak{G}$ rechtregulären Quaternionenfunktion, denn man kann die vorgenommene Integraltransformation rückgängig machen und sich dann auf Bekanntes berufen.

Im Spezialfalle des statischen Feldes erhält man

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{z}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{R}} \frac{-(\mathfrak{f}\mathfrak{r})\,(\mathfrak{x} - \mathfrak{z}) + [[\mathfrak{f},\mathfrak{r}],\mathfrak{x} - \mathfrak{z}]}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{z}|^3}\,d\omega = \mathfrak{f}'(\mathfrak{z}) + \mathfrak{f}''(\mathfrak{z}) \tag{4}$$

mit

$$\mathfrak{f}'(\mathfrak{z}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{R}} \frac{(\mathfrak{f}\,\mathfrak{r})\,(\mathfrak{x}-\mathfrak{z})}{|\,\mathfrak{x}-\mathfrak{z}\,|}\,d\omega = -\frac{1}{4\pi}\,\mathrm{grad}\int_{\mathfrak{R}} \frac{\mathfrak{f}\,\mathfrak{r}}{|\,\mathfrak{x}-\mathfrak{z}\,|}\,d\omega\,,$$

$$\mathfrak{f}''(\mathfrak{z}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{R}} \frac{[\,[\mathfrak{f},\mathfrak{r}]\,,\,\mathfrak{x}-\mathfrak{z}\,]}{|\,\mathfrak{x}-\mathfrak{z}\,|^3}\,d\omega = -\frac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}\int_{\mathfrak{R}} \frac{[\mathfrak{f},\mathfrak{r}]}{[\mathfrak{x}-\mathfrak{z}]}\,d\omega\,. \tag{5}$$

Aus der ersten Formel (3) folgt noch, weil der Realteil einer statischen Funktion verschwindet,

$$\int_{\mathfrak{R}} \frac{[\mathfrak{f},\mathfrak{r}]\,(\mathfrak{x}-\mathfrak{z})}{|\,\mathfrak{x}-\mathfrak{z}\,|^3}\,d\omega = 0\,. \tag{6}$$

Ist wieder $\mathfrak{f}$ auf $\mathfrak{R}$ beliebig stetig gegeben, so folgt aus (5)

$$\mathrm{div}\ \mathfrak{f}'(\mathfrak{z}) = \mathrm{div}\ \mathfrak{f}''(\mathfrak{z}) = 0\,,\quad \mathrm{rot}\ \mathfrak{f}'(\mathfrak{z}) = 0\,,$$

$$\mathrm{rot}\ \mathfrak{f}''(\mathfrak{z}) = \frac{1}{4\pi}\,\Delta\int_{\mathfrak{R}} \frac{[\mathfrak{f},\mathfrak{r}]}{|\,\mathfrak{x}-\mathfrak{z}\,|}\,d\omega - \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{grad}\int_{\mathfrak{R}} \frac{[\mathfrak{f},\mathfrak{r}]\,(\mathfrak{x}-\mathfrak{z})}{|\,\mathfrak{x}-\mathfrak{z}\,|^3}\,d\omega$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\,\mathrm{grad}\int_{\mathfrak{R}} \frac{[\mathfrak{f},\mathfrak{r}]\,(\mathfrak{x}-\mathfrak{z})}{|\,\mathfrak{x}-\mathfrak{z}\,|^3}\,d\omega\,,$$

falls (6) erfüllt ist, stellt also sowohl $\mathfrak{f}'(\mathfrak{z})$ wie $\mathfrak{f}''(\mathfrak{z})$ den Imaginärteil einer im Inneren von $\mathfrak{G}$ statischen Quaternionenfunktion dar.

Man zeigt mittels einer bekannten Schlußweise (vgl. Kellog, Foundations of Potential Theory, Berlin 1929, S. 162): nähert sich $\mathfrak{z}$ auf der Normalen einem Punkt $\mathfrak{z}_0$ auf $\mathfrak{R}$, in welchem $\mathfrak{R}$ und $F = \mathfrak{i}\,\mathfrak{f}$ zweimal stetig differenzierbar ist, von innen bzw. von außen, so streben die durch die Randintegrale definierten Funktionen $F(\mathfrak{z})$, $\mathfrak{f}'(\mathfrak{z})$, $\mathfrak{f}''(\mathfrak{z})$ Grenzwerten $\overline{F}(\mathfrak{z}_0)$, $\overline{\mathfrak{f}}'(\mathfrak{z}_0)$, $\overline{\mathfrak{f}}''(\mathfrak{z}_0)$ zu, für welche gilt:

$$\overline{F}(\mathfrak{z}_0) = \pm\frac{1}{2}\,F(\mathfrak{z}_0) + \frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathfrak{R}'} F\,dZ\,\Delta\left((\zeta-\mathfrak{i}\,\mathfrak{z}_0)^{-1}\right),$$

$$\overline{\mathfrak{f}}'(\mathfrak{z}_0)\cdot\mathfrak{r} = \pm\frac{1}{2}\,\mathfrak{f}(\mathfrak{z}_0)\cdot\mathfrak{r} - \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{grad}\int_{\mathfrak{R}} \frac{\mathfrak{f}\,\mathfrak{r}}{|x-\mathfrak{z}_0|}\,d\omega\,.\,\mathfrak{r}\,, \tag{5a}$$

$$[\overline{\mathfrak{f}}''(\mathfrak{z}_0)\,,\,\mathfrak{r}] = \pm\frac{1}{2}\,[\mathfrak{f}(\mathfrak{z}_0)\,,\,\mathfrak{r}] - \left[\frac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}\int_{\mathfrak{R}} \frac{[\mathfrak{f},\mathfrak{r}]}{|\,\mathfrak{x}-\mathfrak{z}_0\,|}\,d\omega\,,\,\mathfrak{r}\right],$$

und die drei auf den rechten Seiten stehenden Integrale existieren trotz der Unstetigkeit der Integranden. $\mathfrak{f}(\mathfrak{z})$ macht also einen Sprung an $\mathfrak{R}$, und zwar nimmt $\mathfrak{f}'(\mathfrak{z})$ die Normalkomponente und $\mathfrak{f}''(\mathfrak{z})$ die Tangentialkomponente des Sprunges auf. Infolgedessen ist die Tangentialkomponente von $\mathfrak{f}'(\mathfrak{z})$ und die Normalkomponente von $\mathfrak{f}''(\mathfrak{z})$ auf $\mathfrak{R}$ stetig.

Man könnte auf die Formeln (5a) eine parallele Behandlung der beiden ersten Randwertaufgaben der Potentialtheorie gründen: durch Auflösung der ersten dieser Gleichungen nach $\mathfrak{f}\mathfrak{r}$ gewinnt man in bekannter Weise (siehe etwa das genannte Buch von Kellog) eine Potentialfunktion, deren Feld eine auf $\mathfrak{R}$ vorgeschriebene Normalkomponente hat. Durch Auflösung der zweiten Gleichung nach $[\mathfrak{f}, \mathfrak{r}]$ würde man ein Feld mit vorgeschriebener Tangentialkomponente auf $\mathfrak{R}$ bekommen. Sind nun für eine zu konstruierende Potentialfunktion $u(\mathfrak{z})$ die Randwerte $u(\mathfrak{z}_0)$ auf $\mathfrak{R}$ dreimal stetig differenzierbar vorgeschrieben, so bilde man den Flächengradienten von $u(\mathfrak{z}_0)$ auf $\mathfrak{R}$ und konstruiere ein Feld, dessen Tangentialkomponenten gleich diesem Flächengradienten sind. Im Falle eines zusammenhängenden Randes $\mathfrak{R}$ löst dann das Potential dieses Feldes die Randwertaufgabe bis auf eine Konstante. Leider muß man bei der so skizzierten Lösung der Randwertaufgabe eine Reihe von Differenzierbarkeitsbedingungen stellen, die der Natur des Problems nicht angemessen sind.

3. Wir leiten jetzt noch die Poissonsche Integralformel für die dreidimensionale Kugel her. Ihr Rand werde mit $\mathfrak{K}$ bezeichnet, und $\mathfrak{K}'$ bedeute den Rand desjenigen Gebietes im vierdimensionalen $(x, \mathfrak{x})$-Raum, das aus allen Punkten dieser Kugel mit beliebiger x-Koordinate besteht. Dann gilt wieder

$$F(\mathfrak{z}) = \mathfrak{i}\mathfrak{f}(\mathfrak{z}) =$$

$$= \frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathfrak{K}'} (\mathfrak{i}\mathfrak{f})\, dZ\, \Delta\big((\mathfrak{x}+\mathfrak{i}(\mathfrak{x}-\mathfrak{z})^{-1}\big) = -\frac{1}{2\pi^2}\int_{\mathfrak{K}'} \mathfrak{i}\mathfrak{f}\, dZ\, \frac{\mathfrak{x}-\mathfrak{i}(\mathfrak{x}-\mathfrak{z})}{(\mathfrak{x}^2+(\mathfrak{x}-\mathfrak{z})^2)} \qquad (7)$$

mit

$$dZ = -r\,\mathfrak{i}\mathfrak{x}\, d\varrho\, dx \qquad (r\mathfrak{r} = -\mathfrak{x}) \ ,$$

wo r den Radius von $\mathfrak{K}$ und $d\varrho$ das Oberflächenelement der dreidimensionalen Einheitskugel bedeutet. Ähnlich wie bei der Herleitung der Poissonschen Formel für die vierdimensionale Kugel[2]) teilt man dies Integral in Summanden auf: es ist gleich

$$\frac{1}{2\pi^2}\int_{\mathfrak{K}'} \mathfrak{i}\mathfrak{f}\, \frac{|\mathfrak{x}|^2-|\mathfrak{z}|^2}{(x^2+(\mathfrak{x}-\mathfrak{z})^2)^2}\, r\, d\varrho\, dx + \frac{1}{2\pi^2}\int_{\mathfrak{K}'} \mathfrak{i}\mathfrak{f}\, \frac{(\mathfrak{i}\mathfrak{x}-\mathfrak{i}\mathfrak{z})(\mathfrak{i}\mathfrak{z})}{(x^2+(\mathfrak{x}-\mathfrak{z})^2)^2}\, r\, d\varrho\, dx$$

$$+ \frac{1}{2\pi^2}\int_{\mathfrak{K}'} \mathfrak{i}\mathfrak{f}\, \frac{(\mathfrak{i}\mathfrak{x})\,x}{(x^2+(\mathfrak{x}-\mathfrak{z})^2)^2}\, r\, d\varrho\, dx \ .$$

---

[2]) *R. Fueter*, Zur Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen. Mh. Math. Phys. **48** (1939).

Das dritte Integral verschwindet wegen Nr. 2 nach Ausführung der Interagtion über x. Das erste ergibt das Poissonsche Integral

$$r\frac{r^2-|\mathfrak{z}|^2}{4\pi}\int_{\mathfrak{K}}\mathfrak{i}\mathfrak{f}\frac{d\varrho}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{z}|^3}\ .$$

Das zweite wird gleich

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{K}}\mathfrak{i}\mathfrak{f}\frac{(\mathfrak{i}\mathfrak{x}-\mathfrak{i}\mathfrak{z})\,(\mathfrak{i}\mathfrak{z})}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{z}|^3}\,r\,d\varrho$$

und formt sich mittels der für $u = i\mathfrak{x}$, $v = i\mathfrak{z}$ anzuwendenden Identität

$$\frac{(\bar{u}-\bar{v})\,v}{|u-v|^3}=-\frac{|u|}{|v|}\,\frac{\bar{u}\left(u-\frac{|u|^2}{|v|^2}v\right)}{\left|u-\frac{|u|^2}{|v|^2}v\right|^3}$$

um zu

$$-\frac{1}{4\pi}\,\frac{r}{|\mathfrak{z}|}\int_{\mathfrak{K}}\mathfrak{i}\mathfrak{f}\,\frac{(\mathfrak{i}\mathfrak{x})\left(\mathfrak{i}\mathfrak{x}-\frac{r^2}{|\mathfrak{z}|^2}\,\mathfrak{i}\mathfrak{z}\right)}{\left|\mathfrak{x}-\frac{r^2}{|\mathfrak{z}|^2}\,\mathfrak{z}\right|^3}\,r\,d\varrho$$

$$=-\frac{1}{2\pi^2}\,\frac{r}{|\mathfrak{z}|}\int_{\mathfrak{K}'}\mathfrak{i}\mathfrak{f}\,\frac{\left(x+\mathfrak{i}\mathfrak{x}-\frac{r^2}{|\mathfrak{z}|^2}\,\mathfrak{i}\mathfrak{z}\right)}{\left(x^2+(\mathfrak{x}-\frac{r^2}{|\mathfrak{z}|^2}\,\mathfrak{z})^2\right)^2}\,r\,d\varrho\,dx$$

$$=\quad\frac{1}{8\pi^2}\,\frac{r}{|\mathfrak{z}|}\int_{\mathfrak{K}'}(\mathfrak{i}\mathfrak{f})\,dZ\,\Delta\left(\left(x+\mathfrak{i}\mathfrak{x}-\frac{r^2}{|\mathfrak{z}|^2}\,\mathfrak{i}\mathfrak{z}\right)^{-1}\right)\ .$$

Hier steht jetzt das Integral (7) für den Punkt $\mathfrak{z}'=\frac{r^2}{|\mathfrak{z}|^2}\,\mathfrak{z}$, er liegt aber außerhalb von $\mathfrak{K}'$, mithin ist $\Delta\left((x+\mathfrak{i}\,(\mathfrak{x}-\mathfrak{z}'))^{-1}\right)$ innerhalb von $\mathfrak{K}'$ linksregulär. Soll $F(\mathfrak{z}) = \mathfrak{i}\,\mathfrak{f}(\mathfrak{z})$ auch noch auf $\mathfrak{K}'$ regulär sein, d. h. sollen die vorgeschriebenen Randwerte angenommen werden, so muß es identisch verschwinden. Damit ist die Poissonsche Formel

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{z})=r\,\frac{r^2-|\mathfrak{z}|^2}{4\pi}\int_{\mathfrak{K}}\frac{\mathfrak{f}\,d\varrho}{|\mathfrak{x}-\mathfrak{z}|^3}\tag{8}$$

bewiesen.

Man weiß nun andererseits, daß der Poissonsche Integralausdruck die vorgeschriebenen Randwerte annimmt, wenn diese beliebig stetig auf $\mathfrak{K}$ gegeben sind; also kann behauptet werden: im Falle der Kugel nimmt die durch (3) bzw. (4) definierte Funktion $F(\mathfrak{z}) = f(\mathfrak{z}) + \mathfrak{i}\mathfrak{f}(\mathfrak{z})$ die vorgeschriebenen Randwerte dann und nur dann an, wenn sie außerhalb von $\mathfrak{G}$ identisch verschwindet. Dieses Kriterium gilt auch für ein beliebiges Gebiet[1a]), falls die Voraussetzungen für die Gültigkeit von (5a) erfüllt sind, wie man diesen Formeln unmittelbar entnimmt.

Zum Schluß dieses Abschnittes sei noch darauf hingewiesen, daß die im ganzen Außenraum von $\mathfrak{K}$ einschließlich des unendlich fernen Punktes reguläre Potentialfunktion $\bar{u}$, die auf $\mathfrak{K}$ dieselben Werte wie die innerhalb von $\mathfrak{K}$ reguläre Funktion u annimmt, durch den Ausdruck

$$\bar{u}(\mathfrak{z}) = -\frac{r}{|\mathfrak{z}|}\, u\left(\frac{r^2}{|\mathfrak{z}|^2}\,\mathfrak{z}\right)$$

gegeben ist. Dies folgt durch doppelte Anwendung obiger Umformung. — In dem von Herrn Fueter betrachteten vierdimensionalen Falle[2]) gilt das zuletzt Gesagte in analoger Weise.

Potenzreihenentwicklungen

4. Wir gebrauchen durchweg die folgenden Bezeichnungen:

$$(n_1, n_2, n_3) = \mathfrak{n},\ (t_1, t_2, t_3) = \mathfrak{t} \qquad \text{(reelle Komponenten)}$$

$$\langle \mathfrak{n} \rangle = n_1 + n_2 + n_3\ , \qquad |\mathfrak{t}| = \left|\sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2}\right|\ ,$$

$$\mathfrak{n}\,! = n_1!\; n_2!\; n_3!\ , \qquad \mathfrak{t}^{\mathfrak{n}} = t_1^{n_1}\, t_2^{n_2}\, t_3^{n_3}\ ,$$

$$\binom{\mathfrak{m}}{\mathfrak{n}} = \binom{m_1}{n_1}\binom{m_2}{n_2}\binom{m_3}{n_3} = \frac{\mathfrak{m}\,!}{\mathfrak{n}!\ (\mathfrak{m} - \mathfrak{n})\,!}\ ,$$

$$[\mathfrak{t}\,\mathfrak{z}] = \mathfrak{t}\,\mathfrak{x} - \mathfrak{i}\mathfrak{t}\,x = x_1 t_1 + x_2 t_2 + x_3 t_3 - (i_1 t_1 + i_2 t_2 + i_3 t_3)\,x\ .$$

Ferner schreiben wir die Fueterschen Polynome $p_{n_1 n_2 n_3}(z)$ als symbolische Potenzen und definieren sie, etwas abweichend von der Fueterschen Erklärung[3]) durch

$$z^{\mathfrak{n}} = \frac{\mathfrak{n}\,!}{\langle\mathfrak{n}\rangle!}\ \Sigma\, (x_{\nu_1} - i_{\nu_1} x) \ldots (x_{\nu_{\langle\mathfrak{n}\rangle}} - i_{\nu_{\langle\mathfrak{n}\rangle}}\, x)\ ,$$

wobei über alle $\dfrac{\langle\mathfrak{n}\rangle!}{\mathfrak{n}!}$ verschiedenen Anordnungen der ν_i zu summieren ist und die ν_i die Werte 1, 2, 3 bezüglich n_1, n_2, n_3 mal annehmen.

---

[3]) *R. Fueter*, Über die analytische Darstellung der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen. Dieses Journal 8 (1936).

Die Abweichung wird durch gewisse Analogien zwischen den gewöhnlichen Potenzen im Kommutativen und den symbolischen Potenzen im Quaternionensystem gerechtfertigt, welche in den Formeln

$$\frac{\partial^{\langle \mathfrak{r} \rangle}}{\partial \mathfrak{x}^{\mathfrak{r}}} z^{\mathfrak{n}} = \frac{\mathfrak{n}\,!}{(\mathfrak{n} - \mathfrak{r})\,!}\, z^{\mathfrak{n} - \mathfrak{r}}$$

und besonders in

$$(z + w)^{\mathfrak{n}} = \sum_{\langle \mathfrak{r} \rangle = 0}^{\langle \mathfrak{n} \rangle} \binom{\mathfrak{n}}{\mathfrak{r}} z^{\mathfrak{r}} w^{\mathfrak{n} - \mathfrak{r}} = \sum_{\langle \mathfrak{r} \rangle = 0}^{\langle \mathfrak{n} \rangle} \binom{\mathfrak{n}}{\mathfrak{r}} w^{\mathfrak{r}} z^{\mathfrak{n} - \mathfrak{r}} \tag{9}$$

zutage tritt.

5. Die überall absolut konvergente Reihe

$$\sum_{\langle \mathfrak{n} \rangle = 0}^{\infty} \frac{\mathfrak{t}^{\mathfrak{n}}}{\mathfrak{n}!} z^{\mathfrak{n}}$$

stellt eine ganze zweiseitig reguläre Funktion dar. An der Stelle $z = 0$ stimmen die Ableitungen aller Grade dieser Funktion nach den x_ν mit den entsprechenden Ableitungen der ebenfalls zweiseitig regulären Funktion

$$e^{[\mathfrak{t} z]} = e^{\mathfrak{t} x} \left(\cos\, |\mathfrak{t}|\, x - \frac{i\,\mathfrak{t}}{|\mathfrak{t}|} \sin\, |\mathfrak{t}|\, x\right)$$

überein, folglich ist

$$e^{[\mathfrak{t} z]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\mathfrak{t} z]^n}{n!} = \sum_{\langle n \rangle = 0}^{\infty} \frac{\mathfrak{t}^{\mathfrak{n}}}{\mathfrak{n}!} z^{\mathfrak{n}} \,. \tag{10}$$

Aus der Reihenentwicklung und dem Additionstheorem dieser Funktion läßt sich die „binomische Formel“ (9) besonders einfach herleiten.

Die Gleichung (10) ist eine Zusammenfassung der Polynomidentitäten

$$\frac{[\mathfrak{t} z]^n}{n!} = \sum_{\langle \mathfrak{n} \rangle = n} \frac{\mathfrak{t}^{\mathfrak{n}}}{\mathfrak{n}!} z^{\mathfrak{n}} \,. \tag{11}$$

Es gibt nun ebensoviele homogene Polynome $\mathfrak{t}^{\mathfrak{n}}$ in den Komponenten von $\mathfrak{t}$ vom Grade $\langle \mathfrak{n} \rangle = n$, wie es Fueteresche Polynome vom Grade n gibt, nämlich

$$\kappa_n = \frac{(n+1)\ (n+2)}{2} \ ;$$

alle diese $\mathfrak{t}^{\mathfrak{n}}$ sind linear unabhängig. Man kann daher κ_n Vektoren $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_{\kappa_n}$ so bestimmen, daß die Determinante

$$\left| \mathfrak{t}_\nu^{\mathfrak{n}_\mu} \right|$$

nicht verschwindet. Die Gleichungen (11), für alle diese $\mathfrak{t}_\nu$ angesetzt, lassen sich jetzt nach $z^{\mathfrak{n}}$ auflösen, es gibt also reelle c_ν so, daß

$$z^{\mathfrak{n}} = \sum_\nu c_\nu [\mathfrak{t}_\nu z]^n \tag{12}$$

ist; die c_ν hängen natürlich von den $\mathfrak{t}_\nu$ ab.

Eine rechtsreguläre Funktion läßt sich deshalb auch nach gewöhnlichen Potenzen entwickeln:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\kappa n} c_{n,\nu} [\mathfrak{t}_{n,\nu} z]^n \,. \tag{13}$$

Diese Reihen sind Verallgemeinerungen der Reihenentwicklungen der regulären „analytischen" Funktionen. Ihre Bedeutung scheint gering zu sein, da in der Wahl der $\mathfrak{t}_{n,\nu}$ eine unendlich große Willkür steckt. Außerdem werden die Reihen (13) i. a. nirgends absolut konvergieren; ein Beispiel hierfür liefert die Funktion

$$F(z) =: (e^{x_3} + e^{-x_3}) \cos \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{3}} \cos \frac{x}{\sqrt{3}}$$
$$- \delta_\varrho (e^{x_3} + e^{-x_3}) \cos \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{3}} \sin \frac{x}{\sqrt{3}} \,;$$

auch Integralreihen

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \iiint c_n(\mathfrak{t}) \; [\mathfrak{t} z]^n \, dt_1 \, dt_2 \, dt_3$$

werden nirgends absolut konvergieren. Man beweist dies, indem man die Reihen (13) bzw. diese Integrale unter Annahme ihrer absoluten Konvergenz in eine Fourierreihe nach x entwickelt und dann das Verhalten der Koeffizienten als Funktionen von $\mathfrak{x}$ betrachtet.

6. Die symbolische Potenzreihe

$$F(z) = \sum_{\langle \mathfrak{n} \rangle = 0}^{\infty} c_{\mathfrak{n}} z^{\mathfrak{n}}$$

für eine rechtsreguläre Funktion konvergiert bekanntlich in jeder im Regularitätsbereich gelegenen Kugel gleichmäßig absolut, d. h. für eine solche Kugel

$$|z| < r$$

gibt es zwei Konstanten c, ϱ so, daß für hinreichend großes $\langle \mathfrak{n} \rangle$

$$|c_{\mathfrak{n}}| < c^{\langle \mathfrak{n} \rangle} \,, \quad |z^{\mathfrak{n}}| < \varrho^{\langle \mathfrak{n} \rangle} \,, \quad c\varrho < 1$$

ist. Wir setzten nun

$$z^{\mathfrak{n}} = a_{n,0}(\mathfrak{x}) + x a_{n,1}(\mathfrak{x}) + \frac{x^2}{2!} a_{n,2}(\mathfrak{x}) + \cdots + \frac{x^{\langle \mathfrak{n} \rangle}}{\langle \mathfrak{n} \rangle !} a_{n,\langle \mathfrak{n} \rangle}(\mathfrak{x})$$

und schätzen die $a_{\mathfrak{n},\nu}$ ab: Es ist für

$$x = 0, \qquad |z| = |\mathfrak{x}| < r$$

$$|a_{n,1}(\mathfrak{x})| < \varrho^{\langle \mathfrak{n} \rangle},$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} z^{\mathfrak{n}} \right| = |a_{n,1}(\mathfrak{x})| = \left| \sum_{\nu=1}^{3} \binom{\mathfrak{n}}{\mathfrak{e}_\nu} z^{\mathfrak{n}-\mathfrak{e}_\nu} i_\nu \right| < 3 \langle \mathfrak{n} \rangle \varrho^{\langle \mathfrak{n} \rangle - 1},$$

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} z^{\mathfrak{n}} \right| = |a_{\mathfrak{n},2}(\mathfrak{x})| = \left| \sum_{\mu,\nu=1}^{3} \binom{\mathfrak{n}}{\mathfrak{e}_\mu} \binom{\mathfrak{n}}{\mathfrak{e}_\nu} z^{\mathfrak{n}-\mathfrak{e}_\mu-\mathfrak{e}_\nu} i_\mu i_\nu \right| < 3^2 \binom{\langle \mathfrak{n} \rangle}{2} \varrho^{\langle \mathfrak{n} \rangle - 2},$$

. . . .

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} z^{\mathfrak{n}} \right| = |a_{\mathfrak{n},k}(\mathfrak{x})| < 3^k \binom{\langle \mathfrak{n} \rangle}{k} \varrho^{\langle \mathfrak{n} \rangle - k},$$

wobei

$$\mathfrak{e}_1 = (1, 0, 0), \qquad \mathfrak{e}_2 = (0, 1, 0), \qquad \mathfrak{e}_3 = (0, 0, 1)$$

gesetzt wurde. Die Reihen

$$\varphi_k(\mathfrak{x}) = \sum_{\langle \mathfrak{n} \rangle = 0}^{\infty} c_{\mathfrak{n}} a_{\mathfrak{n},k}(\mathfrak{x})$$

sind also gleichmäßig absolut konvergent, und nach dem Doppelreihensatze gilt im Sinne absoluter und gleichmäßiger Konvergenz

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \varphi_n(x).$$

Man erkennt ferner, diese Reihe kann gliedweise beliebig oft nach allen Variablen differenziert werden, da dies für die symbolische Potenzreihe erlaubt ist. Die Regularitätsbedingung ergibt dann die Relationen

$$\delta_\varrho \varphi_n + \varphi_{n+1} = 0,$$

es gilt also in jeder im Regularitätsbereich gelegenen Kugel

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \delta_\varrho^n F(\mathfrak{i}\mathfrak{x}) = e^{-x\delta_\varrho} F(\mathfrak{i}\mathfrak{x}). \tag{14}$$

Man kann diese Reihen bequem zur Berechnung der Fueterschen Polynome benutzen. Es ist nämlich

$$z^{\mathfrak{n}} = \mathfrak{x}^{\mathfrak{n}} \quad \text{für} \quad x = 0,$$

setzt man diese in (14) ein, so erhält man fast ohne Rechnung

$$z^{\mathfrak{n}} = \sum_{\mathfrak{r}} x^{\langle 2\mathfrak{r}\rangle} \mathfrak{x}^{\mathfrak{n}-2\mathfrak{r}} (-1)^{\langle \mathfrak{r}\rangle} \binom{\mathfrak{n}}{2\mathfrak{r}} \frac{(2\mathfrak{r})!\ \langle \mathfrak{r}\rangle!}{\langle 2\mathfrak{r}\rangle!\ \mathfrak{r}!}$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{3} i_\nu \sum_{\mathfrak{r}} x^{\langle 2\mathfrak{r}\rangle+1} \mathfrak{x}^{\mathfrak{n}-2\mathfrak{r}-\mathfrak{e}_\nu} (-1)^{\langle \mathfrak{r}\rangle+1} \binom{\mathfrak{n}}{2\mathfrak{r}+\mathfrak{e}_\nu} \frac{(2\mathfrak{r}+\mathfrak{e}_\nu)!\ \langle \mathfrak{r}\rangle!}{\langle 2\mathfrak{r}+\mathfrak{e}_\nu\rangle!\ \mathfrak{r}!}, \tag{15}$$

die Summe ist über alle $\mathfrak{r} \geqq (0, 0, 0)$ zu erstrecken, für welche keine negativen Variablenpotenzen auftreten[4]).

7. Die Theorie der regulären Quaternionenfunktionen ist ein hervorragendes Mittel, allgemeine Sätze über die Integrale der Differentialgleichungen

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{3} a_{\mu\nu} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \, \partial x_\nu} = 0 \qquad (a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu} \ , \ | a_{\mu\nu} | = \pm 1) \tag{16}$$

zu beweisen, wenn die $a_{\mu\nu}$ konstant sind. Durch eine lineare Variablensubstitution kann man diese Gleichungen auf eine der Formen

$$\Delta u = 0 \ , \tag{16a}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u \qquad (x = x_3) \tag{16b}$$

bringen. Im Falle der Schwingungs- oder Wellengleichung (16b) ist es nötig, sich auf solche Integrale zu beschränken, die sich in einem gewissen Gebiet nach der Zeit x in eine Potenzreihe entwickeln lassen:

$$u(x_1 \, , \, x_2 \, , \, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} u_n(x_1 \, , \, x_2) \ . \tag{17}$$

Im Falle (16a) ist

$$F(\mathfrak{i}\,\mathfrak{x}) = \delta_\varrho u(\mathfrak{x}) \ , \tag{18a}$$

im Falle (16b)

$$F(x + \mathfrak{i}\,\mathfrak{x}) = \frac{\partial}{\partial x} R\left(u(x_1 \, , \, x_2 \, , \, x + x_3 i_3 \sqrt{2})\right)$$

$$- \delta_\varrho R\left(u(x_1 \, , \, x_2 \, , \, x + x_3 i_3 \sqrt{2})\right) \tag{18b}$$

eine zweiseitig reguläre Quaternionenfunktion (R bedeutet den Realteil).

---

[4]) Die Formel weicht naturgemäß von der durch *B. Schuler* (Zur Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen, dieses Journal **10** (1938)) gegebenen ab, da wir hier eine etwas andere Definition der Fueterschen Polynome zugrunde legen. Daneben hat aber der Imaginärteil ein anderes Vorzeichen erhalten; daß das von Schuler angegebene nicht richtig sein kann, bestätigt man auch leicht durch Prüfung an der Regularitätsbedingung.

Diese Funktionen lassen sich jetzt in Potenzreihen

$$F = \sum_{\langle \mathfrak{n} \rangle = 0}^{\infty} \frac{1}{\mathfrak{n}!} \frac{\partial^{\langle \mathfrak{n} \rangle}}{\partial \mathfrak{x}^{\mathfrak{n}}} F(0)\, z^{\mathfrak{n}} \tag{19}$$

entwickeln, aus denen man Entwicklungen von $\delta_\varrho u$ bzw. $\dot{u} = R(F(x + i_1 x_1 + i_2 x_2))$ nach homogenen Polynomlösungen von (16) gewinnen kann.

Wir betrachten den Fall (16a) besonders. Zunächst erkennt man, daß die einzelnen homogenen Bestandteile

$$f_n(\mathfrak{i}\,\mathfrak{x}) = \sum_{\langle \mathfrak{n} \rangle = n} \frac{1}{\mathfrak{n}!} \frac{\partial^{\langle \mathfrak{n} \rangle}}{\partial \mathfrak{x}^{\mathfrak{n}}} F(0)\, z^{\mathfrak{n}}$$

von (19) die Variable x nicht enthalten können, weil $F(\mathfrak{i}\,\mathfrak{x})$ von x nicht abhängt; sie müssen also in der Form

$$f_n(\mathfrak{i}\,\mathfrak{x}) = \delta_\varrho\, u_{n+1}(\mathfrak{x})$$

durch reelle homogenen Polynome $u_{n+1}(\mathfrak{x})$ vom Grade $n+1$ darstellbar sein; diese $u_{n+1}(\mathfrak{x})$ sind Laplacesche Kugelfunktionen der Ordnung $n+1$. Damit haben wir die Möglichkeit erhalten, die bekannten Sätze über die Entwicklung von Potentialfunktionen nach Kugelfunktionen besonders einfach herzuleiten. Auch der geläufige Satz, daß auf dem Rande der Konvergenzkugel mindestens eine Singularität liegt, überträgt sich auf die Potentialfunktionen, während dies für die in Reihen entwickelten Lösungen der Wellengleichung nicht zu gelten braucht, da in diesem Falle aus den Reihen (19) die Variable x_3 erst durch Nullsezten zu entfernen ist.

Die explizite Gestalt für die Reihenentwicklung von Potentialfunktionen nach Kugelfunktionen hängt natürlich von der Wahl der Basis aller Kugelfunktionen ab. Besonders elegant sind die Entwicklungen der nachstehenden Form:

$$F(\mathfrak{i}\,\mathfrak{x}) = \sum_{n_1, n_2 = 0}^{\infty} \frac{(-1)^{n_2}\, \partial^{n_1+n_2}}{n_1!\, n_2!\, \partial x_1^{n_2}\, \partial x_2^{n_1}} F(0)\, i_3\, (x_3 + i_1 x_2 - i_2 x_1)^{(n_1, n_2, 0)} i_3^{-1}; \tag{20}$$

man erhält diese Formel sofort aus (19), wenn man nur verifiziert, daß $F(\mathfrak{i}\,\mathfrak{x})\, i_3 = \delta_\varrho\, u(x_1, x_2, x_3)\, i_3$ eine rechtsreguläre Funktion der Variablen $x_3 + i_1 x_2 - i_2 x_1$ ist.

(Eingegangen den 4. Dezember 1939.)