Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 12 (1939-1940)

Artikel: Sur les complexes avec automorphismes.

Autor: de Rham, Georges de

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12802

Sur les complexes avec automorphismes

Par Georges de Rham, Lausanne

Introduction

Soient un groupe abstrait G et une loi associant à chaque élément γ de G une transformation topologique $T(\gamma)$ d'un espace V en lui-même, de manière que $T(\gamma)T(\delta) = T(\gamma\delta)$ quels que soient les éléments γ et δ de G. L'ensemble $[V, T(\gamma)]$ formé par l'espace V et la loi $T(\gamma)$ sera appelé un *espace avec transformations, qui représente* G. On dira que deux tels espaces, $[V, T(\gamma)]$ et $[V', T'(\gamma)]$, représentant le même groupe G, sont *homéomorphes*, s'il existe une transformation topologique S de V en V' telle que $ST(\gamma)S^{-1} = T'(\gamma)$ pour tout élément γ de G. On appellera *invariant topologique* de $[V, T(\gamma)]$ toute propriété de cet espace qui appartient en même temps à tous les espaces avec transformations qui lui sont homéomorphes.

Les invariants topologiques de l'espace avec transformations $[V, T(\gamma)]$ ne sont pas autre chose que les propriétés topologiques du groupe des transformations $T(\gamma)$, et leur recherche se présente ainsi comme une généralisation de la recherche des invariants topologiques d'un espace topologique ordinaire. Pour pouvoir appliquer les méthodes combinatoires, supposons que V admette une subdivision en cellules invariante relativement aux transformations $T(\gamma)$, ces transformations ne faisant que permuter les cellules entre elles. Cette subdivision définit un complexe C et les $T(\gamma)$ se traduisent par des automorphismes de C. On est ainsi amené à envisager des *complexes avec automorphismes* et à essayer d'en faire une théorie qui généralise celle des complexes ordinaires.

L'espace de recouvrement universel d'un espace donné W est un exemple particulièrement intéressant d'espace avec transformations: les transformations $T(\gamma)$ sont les transformations de recouvrement, qui engendrent un groupe isomorphe au groupe fondamental de W. Si W est un complexe, l'espace de recouvrement se présente comme un complexe avec automorphismes, et ses invariants topologiques (au sens défini ici) fournissent automatiquement des invariants topologiques de l'espace de base W lui-même. Ainsi envisagée, l'étude des complexes de recouvrement a fait l'objet de nombreux travaux de M. K. Reidemeister [1]).

Dans le présent Mémoire, dont la lecture ne nécessite pas la connais-

[1]) Cf. *K. Reidemeister*, Topologie der Polyeder (Leipzig 1938), pp. 177—190, et de nombreux mémoires parus dans les „Hamburger Abhandl.".

sance des travaux précités, nous partons à priori de la notion de complexe avec automorphismes, sans exclure le cas où certains automorphismes peuvent laisser des cellules invariantes, cas qui ne se présente pas avec les complexes de recouvrement et qui nécessite quelques développements spéciaux, et nous exposons les principes de la théorie en nous maintenant strictement au point de vue de la topologie combinatoire.

Un fait remarquable se présente dans cette théorie: un théorème (le théorème I ci-dessous) qui, dans le cas des complexes ordinaires, ne fournit aucun invariant distinct des groupes de Betti, fournit au contraire dans le cas actuel des invariants essentiellement nouveaux. Ce fait a été découvert par M. Reidemeister, à qui il a permis d'effectuer la classification topologique de certaines variétés à trois dimensions [2]) (les „Linsenräume") qui avaient résisté aux méthodes antérieurement connues. M. W. Franz [3]) et moi-même [4]) avons montré ensuite que ces mêmes invariants permettent aussi d'effectuer la classification des variétés analogues à $2n+1$ dimensions.

Nous avons cherché à approfondir la nature algébrique des nouveaux invariants, et nous établissons dans cette direction un théorème (le théorème III) qui peut être considéré comme le résultat essentiel du présent Mémoire.

Des applications seront développées dans un autre article, où nous démontrons que, R_1 et R_2 étant deux rotations (c'est-à-dire deux transformations orthogonales) de la sphère à n dimensions S^n, s'il existe une transformation topologique S de S^n en elle-même telle que $SR_1S^{-1} = R_2$, il existe une rotation R telle que $RR_1R^{-1} = R_2$. On déduit en particulier de là que deux espaces riemanniens à courbure constante égale à 1 (c'est-à-dire deux formes de Clifford de S^n) ne peuvent être homéomorphes sans être isométriques, résultat qui contient comme cas particulier la classification topologique des „Linsenräume".

1. Définitions

Considérons un complexe topologique C et une loi associant à chaque élément γ du groupe abstrait G un automorphisme $T(\gamma)$ de C, de manière que $T(\gamma\delta) = T(\gamma)\,T(\delta)$. Nous dirons que ces données constituent un

---

[2]) *K. Reidemeister,* Homotopieringe und Linsenräume, Hamburger. Abhandl. 11 (1935).

[3]) *W. Franz,* Über die Torsion einer Überdeckung, Journal für die r. u. angew. Math., 173 (1935), pp. 245—254.

[4]) Sur les nouveaux invariants topologiques de *M. Reidemeister,* communication présentée à la Réunion topologique internationale de Moscou (4—10 IX. 1935), Recueil mathématique T. 1 (43), pp. 737—743.

complexe avec automorphismes, qui représente G; et nous le représenterons par le symbole $[C, T(\gamma)]$, ou par la seule lettre C lorsqu'aucune confusion ne sera à craindre.

Deux complexes avec automorphismes $[C, T(\gamma)]$ et $[C', T'(\gamma)]$, représentant le même groupe G, sont dit *isomorphes*, s'il existe un isomorphisme S de C en C' (c'est-à-dire une correspondance biunivoque entre les cellules de C et celles de C', conservant la dimension et les relations de frontières) telle que $ST(\gamma)S^{-1} = T'(\gamma)$ quel que soit l'élément γ de G.

Nous supposerons dans la suite, bien que cela ne soit pas toujours nécessaire, que les automorphismes $T(\gamma)$ satisfont à la condition suivante: *si $T(\gamma)$ laisse invariante une cellule, il laisse aussi invariantes toutes les cellules situées sur la frontière de celle-là*, de sorte que les cellules invariantes relativement à $T(\gamma)$ forment un sous-complexe fermé.

Supposons qu'on subdivise une cellule du complexe C; chaque $T(\gamma)$ fait correspondre à cette cellule une autre cellule et à la subdivision de la première une subdivision de la seconde. Imaginons qu'on subdivise ainsi de manières correspondantes toutes les cellules qui correspondent à l'une d'elles par l'un des automorphismes $T(\gamma)$; on obtient un nouveau complexe C' et chaque $T(\gamma)$ se laisse prolonger d'une manière bien déterminée en un automorphisme $T'(\gamma)$ de C'. Nous appellerons *opération élémentaire* le passage de l'un des complexes avec automorphismes $[C, T(\gamma)]$ et $[C', T'(\gamma)]$ à l'autre, et nous dirons que *deux complexes avec automorphismes* (représentant le même groupe G) *sont homéomorphes au sens combinatoire, si l'un peut être rendu isomorphe à l'autre par un nombre fini d'opérations élémentaires*. Nous dirons aussi que l'un des complexes est *transformé* en l'autre par une suite d'opérations élémentaires.

Soient V et V' deux espaces avec transformations représentant le même groupe G et admettant des subdivisions polyèdrales en cellules qui définissent respectivement les complexes avec automorphismes C et C': Nous ignorons si l'homéomorphie de V et V' entraîne l'homéomorphie au sens combinatoire de C et C': c'est là un problème de Topologie encore non résolu même dans le cas ordinaire où G se réduit à l'élément unité et où l'on a des espaces sans transformations et des complexes sans automorphismes. Cette situation oblige à distinguer, au moins provisoirement, deux espèces d'invariants topologiques: les *invariants topologiques proprement dits*, qui fournissent des conditions nécessaires pour l'homéomorphie de deux espaces avec transformations, et les invariants topologiques *combinatoires*, qui fournissent des conditions nécessaires pour l'homéomorphie au sens combinatoire de deux complexes avec automorphismes.

Les combinaisons linéaires d'éléments $\gamma, \delta, \ldots$, du groupe G, de la forme

$$\xi = p\gamma + q\delta + \cdots$$

avec des coefficients $p, q, \ldots$, pris dans un anneau donné D, forment comme on sait un nouvel anneau: l'*algèbre de G sur* D, qu'on désignera par A. Le domaine des coeefficients D pourra être soit l'anneau des entiers rationnels, soit le corps des nombres rationnels, soit le corps de tous les nombres complexes ou encore un corps quelconque. Les combinaisons linéaires telles que ξ seront appelées *nombres de* A. La loi de multiplication de ces nombres de A est complètement déterminée, comme on sait, par la règle distributive et la loi de multiplication dans G.

Soit c une chaîne d'un complexe avec automorphismes C qui représente G; nous désignerons par γc la chaîne qui se déduit de c par l'automorphisme $T(\gamma)$, et ξc désignera la chaîne

$$\xi c = p(\gamma c) + q(\delta c) + \cdots \quad .$$

Il est clair que l'on a

$$(\xi_1 + \xi_2)c = \xi_1 c + \xi_2 c,\ \xi_1(\xi_2 c) = (\xi_1 \xi_2)c \qquad \text{et} \qquad \xi(c_1 + c_2) = \xi c_1 + \xi c_2 \,.$$

Les nombres de A se présentent ainsi comme des *opérateurs linéaires*, qui opèrent sur les chaînes du complexe C. L'élément unité de G, qui est aussi l'élément unité de A, sera désigné par 1 et ses multiples, qui forment un sous-anneau de A isomorphe à D, seront désignés comme les nombres de D.

L'ensemble de tous les nombres ξ de A tels que $\xi c = 0$ forme un idéal (à gauche) de A, appelé l'*annulateur de c*. L'ensemble des éléments γ de G tels que $\gamma c = c$ forme un sous-groupe de G: c'est le *sous-groupe laissant c invariante*.

Soit a une cellule, g le sous-groupe de G qui la laisse invariante, et $\bar{g}$ le nombre de A égal à la somme des éléments de g. On voit aisément que, pour que $\xi a = 0$, il faut et il suffit que $\xi \bar{g} = 0$; l'annulateur de a est identique à l'annulateur de $\bar{g}$, qu'on appellera aussi l'*annulateur de g*. Pour une chaîne quelconque c, on peut affirmer que son annulateur contient toujours l'annulateur du sous-groupe qui la laisse invariante, mais il ne lui est pas forcément identique.

Un ensemble de cellules de C sera dit un *domaine fondamental* de $[C, T(\gamma)]$, s'il contient une cellule et une seule correspondant, par les automorphismes $T(\gamma)$, à toute cellule de C. Si $a_i\,(i = 1, 2, \ldots,)$ sont les cellules d'un domaine fondamental, toute chaîne c de C peut se mettre sous la forme

$$c = \sum_i \xi_i a_i \quad ,$$

ξ_i étant un nombre de A déterminé modulo l'annulateur de $a_i (i = 1, 2, \ldots)$.

Cherchons à caractériser complètement un complexe automorphismes. Pour cela, il convient d'abord de numéroter les cellules d'un domaine fondamental; désignons par a_i^q celles de dimension q ($i = 1, 2, \ldots, \alpha_q$; $q = 0, 1, \ldots, n$; n est la dimension du complexe). Ensuite, il faut indiquer, pour chaque cellule a_i^q, le sous-groupe de G qui la laisse invariante. Enfin, il faut donner l'expression de la frontière $\mathsf{F}a_i^q$ de chacune des cellules a_i^q:

$$\mathsf{F}a_i^q = \sum_j \varepsilon_{ij}^q a_j^{q-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, \alpha_q;\ q = 1, 2, \ldots, n) \ ;$$

le coefficient ε_{ij}^q est un nombre de A déterminé modulo l'annulateur de a_j^{q-1}. L'ensemble de ces données sera appelé un *schéma* du complexe avec automorphismes. A chaque domaine fondamental est ainsi associé un schéma.

Nous dirons qu'un sous-groupe g de G est *un sous-groupe remarquable,* s'il est le plus grand sous-groupe de G laissant invariante une cellule déterminée quelconque de C. L'ensemble de toutes les cellules invariantes relativement à g, éventuellement aussi relativement à un sous-groupe plus ample contenant g, forme un sous-complexe $C(g)$ de C que nous appellerons un *sous-complexe remarquable de C.* C'est un sous-complexe fermé: si une cellule appartient à $C(g)$, toutes les cellules situées sur sa frontière lui appartiennent aussi.

Si g est un sous-groupe quelconque de G, l'ensemble de toutes les cellules invariantes relativement à g est toujours un sous-complexe fermé de C, formé par la réunion de tous les sous-complexes remarquables associés aux sous-groupes remarquables contenus dans g.

Il est clair que si γ transforme g en $g' = \gamma g \gamma^{-1}$, $T(\gamma)$ transforme $C(g)$ en $C(g')$. Supposons que g soit un sous-groupe invariant de G; alors tous les $T(\gamma)$ transforment $C(g)$ en lui-même, de sorte que $C(g)$ est aussi un complexe avec automorphismes qui représente G. Mais comme $T(\gamma_1)$ et $T(\gamma_2)$ opèrent identiquement de la même manière dans $C(g)$ si γ_1 et γ_2 appartiennent à la même classe suivant g, le groupe G se réduit en réalité à G/g. L'ensemble des cellules d'un domaine fondamental de C qui sont invariantes relativement à g forme un domaine fondamental de $C(g)$, et le schéma de $C(g)$ se déduit du schéma de C, dans lequel il est contenu.

Si g n'est pas un sous-groupe invariant de G, soit G' le plus grand sous-groupe de G contenant g comme sous-groupe invariant; $C(g)$ est alors un complexe avec automorphismes qui représente G'/g. On obtient un domaine fondamental de $C(g)$ en prenant, dans un domaine fondamental de C, toutes les cellules invariantes par g, et, de plus, une transformée invariante par g de chaque cellule invariante relativement à un sous-groupe conjugué de g, et le schéma de $C(g)$ se déduit encore de celui de G.

Considérons un ensemble de chaînes $b_i^q (i = 1, 2, \ldots; q = 0, 1, \ldots, n)$ de C jouissant des propriétés suivantes:

1° si g est le sous-groupe laissant b_i^q invariante, b_i^q est une chaîne de $C(g)$.

2° aucune chaîne de l'ensemble n'est égale à la transformée par un $T(\gamma)$ d'une autre chaîne de l'ensemble.

3° toute chaîne de $C(g)$ peut s'exprimer, d'une manière unique, par une combinaison linéaire à coefficients dans D de celles des cellules de l'ensemble et de leurs transformées qui sont invariantes relativement à g; cela quel que soit le sous-groupe remarquable g.

Un tel ensemble de chaînes sera appelé une *base de C*. Il est clair que toute chaîne c^q de C peut se mettre sous la forme

$$c^q = \sum_i \xi_i b_i^q$$

d'une manière essentiellement unique, c'est-à-dire que le coefficient ξ_i de b_i^q est complètement déterminé par c^q modulo l'annulateur de b_i^q; cet annulateur coïncide d'ailleurs avec l'annulateur du sous-groupe g laissant b_i^q invariante.

La frontière de b_i^q peut s'exprimer par une combinaison des b_j^{q-1}:

$$\mathsf{F} b_i^q = \sum_j \eta_{ij}^q \, b_j^{q-1} \quad ,$$

où η_{ij}^q est un nombre de A déterminé modulo l'annulateur de b_j^{q-1}. Ainsi, *on peut associer un schéma à toute base,* comme à un domaine fondamental. Comme précédemment, on en déduit une base et un schéma de tout sous-complexe remarquable $C(g)$. Les b_i^q seront appelées *les chaînes de base du schéma.*

2. Transformations et équivalence des schémas

A partir d'une base, on peut en obtenir d'autres par les opérations suivantes.

A. Permuter les q-chaînes de la base (c'est-à-dire changer leur ordre de numérotation).

B. Remplacer une q-chaîne de la base par la chaîne opposée (c'est-à-dire la multiplier par -1).

C. Remplacer une chaîne de la base par sa transformée par un automorphisme $T(\gamma)$ (c'est-à-dire la multiplier par γ).

D. Remplacer une des q-chaînes de la base, b_i^q, par une chaîne de la forme $b_i^q + d^q$, d^q étant une combinaison *à coefficients dans* D des chaînes obtenues en prenant, dans l'ensemble formé par toutes les q-chaînes de la base autres que b_i^q et leurs transformées par les $T(\gamma)$, celles qui sont invariantes par le sous-groupe g qui laisse b_i^q invariante.

Comme à chaque base est associé un schéma, *on peut considérer les opérations* **A**, **B**, **C** et **D** *comme pouvant servir à transformer des schémas.* Voici encore un autre type d'opérations applicables aux schémas et que nous aurons à considérer.

E. Adjoindre deux nouvelles chaînes de base, c^q et c^{q-1}, dont la seconde est la frontière de la première, $\mathsf{F}c^q = c^{q-1}$ et $\mathsf{F}c^{q-1} = 0$, invariantes pour le même sous-groupe g de G. Ou l'opération inverse: suppression de deux chaînes de base, dont la seconde est la frontière de la première, qui ne figurent dans l'expression de la frontière d'aucune autre chaîne de base et qui sont invariantes pour le même sous-groupe de G.

Définition. Deux schémas sont dits équivalents si l'un peut être rendu identique à l'autre par un nombre fini d'opérations des types **A**, **B**, **C**, **D** *et* **E**.

Une suite de telles opérations qui transforment un schéma S en un schéma S' sera appelée un *mode d'équivalence de* S *avec* S'.

En appliquant seulement les trois opérations **A**, **B** et **C**, un nombre quelconque de fois, à un domaine fondamental de C, on obtient encore un domaine fondamental; et inversément, il est clair que tous les domaines fondamentaux de C peuvent se déduire de l'un d'eux de cette manière.

En appliquant les quatre opérations **A**, **B**, **C** et **D** à un domaine fondamental de C, on obtient une base de C. Les bases qui peuvent être ainsi obtenues forment en général une classe particulière; nous les appellerons *bases distinguées.* Pour un complexe ordinaire (sans automorphismes), toutes les bases peuvent être obtenues de cette manière, il n'y a par suite que des bases distinguées et cette notion ne présente aucun intérêt; mais il n'en est pas ainsi dans le cas général. Il est clair, d'après ces définitions, que les schémas associés aux diverses bases distinguées d'un même complexe avec automorphismes sont tous équivalents entre eux. Lorsqu'on parlera d'un *schéma de* C, il s'agira toujours d'un schéma associé à une base distinguée de C.

Les opérations du type **E** conduisent à envisager les schémas en eux-mêmes, indépendemment de tout complexe. Nous dirons qu'un schéma qui dérive d'un schéma S par un nombre fini d'opérations directes du type **E** (adjonctions de couples de chaînes) est un *prolongement de* S. On peut vérifier sans peine que si deux schémas sont équivalents, ils ont des prolongements qui peuvent être transformés l'un en l'autre par une suite d'opérations des quatre types **A**, **B**, **C** et **D**.

Si les deux complexes avec automorphismes C et C', représentant le même groupe G, sont homéomorphes (au sens combinatoire), les sous-complexes remarquables $C(g)$ et $C'(g)$ sont aussi homéomorphes: toute transformation de C en C' par une suite d'opérations élémentaires transforme en même temps $C(g)$ en $C'(g)$. Si les schémas de C et C' sont équivalents, les schémas de $C(g)$ et $C'(g)$ sont aussi équivalents: tout mode d'équivalence des schémas de C et C' induit un mode d'équivalence des schémas correspondants de $C(g)$ et $C'(g)$.

3. Théorème I

Enoncé. Pour que deux complexes avec automorphismes C et C', de schémas S et S', soient homéomorphes (au sens combinatoire), il est nécessaire que S et S' soient équivalents. Chaque transformation de C en C' par une suite d'opérations élémentaires induit un mode d'équivalence de S avec S'.

Démonstration.

Comme deux complexes homéomorphes peuvent être transformés l'un en l'autre par une suite d'opérations élémentaires, *il suffira de prouver que, si un complexe de schéma S' dérive par une subdivision élémentaire d'un complexe de schéma S, alors S' est équivalent à S.*

Rappelons d'abord en quoi consiste la subdivision d'une cellule a^q d'un complexe ordinaire C. Soit F le sous-complexe de C formé par toutes les cellules situées sur la frontière de a^q. Une subdivision de a^q consiste à remplacer a^q par un ensemble E de nouvelles cellules de dimensions au plus égales à q, jouissant en particulier des proprietés suivantes, les seules qui seront utilisées ici:

l'ensemble des cellules de E et de F forme un complexe fermé, c'est-à-dire que la frontière d'une cellule de cet ensemble n'est formée que de cellules de cet ensemble;

la somme des cellules à q dimensions de E, convenablement orientées, forme une chaîne A^q dont la frontière est identique à celle de a^q; et cette chaîne A^q doit être substituée à a^q dans l'expression de la frontière des cellules à $q+1$ dimensions de C;

enfin, toute q-chaîne du complexe $E+F$, dont la frontière ne contient que des cellules de F (et aucune de E), est identique à un multiple de A^q, et toute k-chaîne ($k < q$) de ce même complexe, fermée ou dont la frontière ne contient que des cellules de F, est homologue (dans $E+F$) à zéro ou à une chaîne de F.

Considérons le complexe, qu'on désignera par $E \pmod F$, formé par les cellules de E en prenant leurs frontières $(\bmod\, F)$, c'est-à-dire en supprimant de ces frontières toutes les cellules de F. Les propriétés rappelées du complexe $E+F$ expriment que $E \pmod F$ est un complexe sans torsion dont tous les nombres de Betti sont nuls sauf le $q^{\text{iéme}}$ qui vaut 1; ou, en d'autres termes, que toute k-chaîne fermée de $E \pmod F$ est homologue à zéro dans $E \pmod F$ si $k < q$ et égale à un multiple de A^q si $k = q$.

Si C est un complexe avec automorphismes et non plus un complexe ordinaire, il faut subdiviser, en même temps que a^q et de manière correspondante, toutes les cellules qui correspondent à a^q par les automorphismes. Mais, de toutes ces cellules, une seule, soit a^q, appartient au domaine fondamental de C, et pour obtenir un domaine fondamental du complexe subdivisé, il suffit de remplacer a^q par l'ensemble E des cellules qui proviennent de sa subdivision, cellules qui sont naturellement invariantes pour le même sous-groupe de G que a^q. Ainsi, pour étudier l'effet de la subdivision sur le schéma, il suffit de considérer la seule cellule a^q, comme dans le cas d'un complexe ordinaire. Nous allons modifier le schéma S' du complexe subdivisé, par des opérations des types **A**, **B**, **C** et **D**, de manière à le transformer en un prolongement du schéma S du complexe initial.

Les propriétés rappelées du complexe $E \pmod F$ entraînent que l'on peut trouver des bases pour les k-chaînes de $E \pmod F$ comprenant, pour $k = q$ la chaîne A^q et une série de chaînes B^q, pour $k < q$ deux séries de chaînes B^k et C^k (pour $k = 0$ il n'y aura que la série des C^0) de telle manière que

$$\mathsf{F}A^q = 0 \pmod F, \qquad \mathsf{F}B^k = C^{k-1} \pmod F, \qquad \mathsf{F}C^{k-1} = 0 \pmod F.$$

On peut obtenir ces bases en effectuant sur les cellules à k dimensions de E une *substitution unimodulaire à coefficients entiers*, en suivant par exemple le procédé décrit au n° 14 de ma thèse, ou bien directement de la manière suivante: on choisit d'abord la série des chaînes C^k formant une base pour les k-chaînes fermées et homologues à zéro $(\bmod\, F)$, puis à chacune de ces chaînes C^k on associe une chaîne B^{k+1} telle que $\mathsf{F}B^{k+1} = C^k \pmod F$, et à cause des propriétés de $E \pmod F$ on a bien des bases.

Comme toute substitution unimodulaire à cœfficients rationnels entiers peut être décomposée en une suite d'opérations des types **A**, **B** et **D**, nous pouvons substituer aux cellules de E les chaînes A^q, B^k, C^k que nous venons de former. Le schéma S' est alors transformé en un schéma équivalent S'' comprenant une première partie identique au schéma S (elle se déduit de S en remplaçant a^q par A^q) et une seconde partie relative aux chaînes B^k et C^k.

Comme $\mathsf{F}B^k = C^{k-1}$ (mod F), on a $\mathsf{F}B^k = C^{k-1} + D^{k-1}$, D^{k-1} étant une chaîne de F. Remplaçons C^{k-1} par la chaîne $B_1^{k-1} = C^{k-1} + D^{k-1}$, ce qui est une opération du type **D**. Le schéma S'' est alors transformé en un schéma équivalent S''', comprenant toujours la même première partie identique à S et dont la seconde partie, relative aux chaînes B^k et B_1^k, se réduit aux relations

$$\mathsf{F}B^k = B_1^{k-1} \;, \qquad \mathsf{F}B_1^{k-1} = 0 \;,$$

c'est-à-dire que S''' est un prolongement de S, et le théorème est établi.

4. A-modules, modules de Betti

A étant un anneau, nous appellerons A-*module* tout groupe additif abélien M admettant les nombres de A comme opérateurs; cela signifie que, quels que soient le nombre α de A et l'élément m de M, il y a un élément bien déterminée de M, que l'on désigne par αm, les lois suivantes étant vérifiées:

$$\alpha(m_1 \pm m_2) = \alpha m_1 \pm \alpha m_2 , \quad \alpha_1(\alpha_2 m) = (\alpha_1\alpha_2)m \;, \quad (\alpha_1 \pm \alpha_2)m = \alpha_1 m \pm \alpha_2 m .$$

Un isomorphisme entre deux A-modules qui conserve la loi d'opération des nombres de A sera appelé un A-*isomorphisme.*

Un sous-module M$'$ de M est appelé un *sous*-A-*module*, si avec un élément m il contient toujours αm, quel que soit le nombre α de A. Comme on sait, on peut répartir les éléments de M en *classes suivant* M$'$, en rangeant deux éléments dans une même classe, si leur différence est dans M$'$, et ces classes sont les éléments d'un *nouvel* A-*module*, que l'on désignera par M — M$'$.

Soit maintenant A l'algèbre du groupe G représenté par un complexe avec automorphismes C. L'ensemble C^q de toutes les q-chaînes de C forme un A-module, l'ensemble F^q de toutes les q-chaînes fermées de C est un sous-A-module de C^q, et l'ensemble H^q de toutes les q-chaînes homologues à zéro (c'est-à-dire les frontières des $[q+1]$-chaînes) est un sous-A-module de F^q. $F^q - H^q$ est un A-module appelé le $q^{\text{iéme}}$ *module de Betti* de C. Les relations de frontière dans C s'expriment par un A-*isomorphisme entre* $C^q - F^q$ *et* H^{q-1}.

Comme dans le cas des complexes ordinaires, la structure des modules de Betti de C pourra se déterminer en utilisant un schéma S de C, et il est évident qu'elle ne dépend pas de la base de C choisie pour former S.

Soit C' un autre complexe avec automorphismes représentant le même groupe G que C, et supposons qu'un schéma S' de C' se présente comme un prolongement de S. Toute chaîne c' de C' se présente alors comme une somme de deux composantes, dont la première est une chaîne de C et la seconde une combinaison des chaînes de base adjointes dans le prolongement (opération **E**). Pour que c' soit fermée ou homologue à zéro, il faut et il suffit que chacune de ces composantes soit fermée ou homologue à zéro respectivement. Or, la seconde composante ne peut pas être fermée sans être homologue à zéro, d'après la définition même de l'opération **E**. Il en résulte qu'on a un A-isomorphisme entre les modules de Betti de C et ceux de C'. Par suite:

Théorème II. *Si les schémas S et S' de deux complexes avec automorphismes C et C' sont équivalents, en particulier si C et C' sont homéomorphes (au sens combinatoire), les modules de Betti de C sont A-isomorphes à ceux de C'. Chaque mode d'équivalence de S avec S' induit un A-isomorphisme entre les modules de Betti de C et ceux de C'.*

Soit $(g_1, g_2, \ldots)$ une famille de sous-groupes remarquables de G. Supposons cette famille *invariante* dans G, c'est-à-dire qu'elle contient, en même temps qu'un sous-groupe, tous ses conjugués. Le sous-complexe K formé par la réunion des sous-complexes remarquables $C(g_1)$, $C(g_2)$, ... est alors transformé en lui-même par chaque automorphisme $T(\gamma)$. Soit K' le sous-complexes de C' associé à la même famille de sous-groupes de G. Les schémas de K et K' se déduisent des schémas de C et C', et chaque mode d'équivalence des deux derniers induit un mode d'équivalence des deux premiers. Par suite, si les schémas de C et C' sont équivalents, les modules de Betti de K sont A-isomorphes à ceux de K'.

On peut aussi envisager le complexe C (mod K), c'est-à-dire le complexe qui se déduit de C en supprimant toutes les cellules de K. Le schéma de C (mod K) se déduit de celui de C, et *tout mode d'équivalence des schémas de C et C' induit un mode d'équivalence des schémas de C (mod K) et C' (mod K').*

Il résulte de là que, *si les schémas de C et C' sont équivalents, les modules de Betti de C, K, C (mod K), sont respectivement A-isomorphes à ceux de C', K', C' (mod K').*

On aurait un énoncé analogue en considérant un sous-complexe associé à une famille non invariante de sous-groupes remarquables.

Les modules de Betti de C, K et C (mod. K), que nous désignerons par $B^q(C)$, $B^q(K)$ et $B^q[C\ (\mathrm{mod}\, K)]$, ont entre eux certaines relations, comme dans le cas des complexes ordinaires, et qu'il convient d'indiquer.

Chaque cycle de K étant aussi un cycle de C, et deux cycles de K homologues dans K étant aussi homologues dans C, on a un A-homomorphisme de $B^q(K)$ dans $B^q(C)$, qu'on désignera par H_1.

Chaque cycle de C est en même temps un cycle de C (mod K), et deux cycles de C homologues dans C sont aussi homologues (mod K); il en résulte un A-homomorphisme de $B^q(C)$ dans $B^q(C\ [\mathrm{mod}\ K])$, qu'on désignera par H_2.

Enfin, à chaque cycle à q dimensions de C (mod K), correspond un cycle à $(q-1)$ dimensions de K, sa frontière dans C, et à deux q-cycles de C (mod K) homologues dans C (mod K) correspondent deux $(q-1)$-cycles de K homologues dans K, d'où résulte un homomorphisme de $B^q[C\ (\mathrm{mod}\ K)]$ dans $B^{q-1}(K)$, qu'on désignera par H_3.

On vérifie immédiatement que les homomorphismes composés $\mathsf{H}_2\,\mathsf{H}_1$ et $\mathsf{H}_3\,\mathsf{H}_2$ se réduisent à zéro.

Nous pouvons alors énoncer la proposition suivante, qui apporte encore un complément au théorème II et qui se démontre aussi simplement.

Soient H_1', H_2', H_3' *les homomorphismes analogues à* H_1, H_2, H_3, *relatifs à* C' *et* K'. *Les* A-*isomorphismes entre les modules de Betti de* C, C (*mod* K), K *et ceux de* C', C' (*mod* K'), K' *induits par un mode d'équivalence des schémas de* C *et* C', *transforment* H_1, H_2 *et* H_3 *en* H_1', H_2' *et* H_3' *respectivement.*

5. Réduction modulo $\mathfrak{p}$

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal bilatère de l'anneau A, c'est-à-dire un sous-anneau de A tel que, quels que soient les nombres α de $\mathfrak{p}$ et ξ de A, $\alpha\xi$ et $\xi\alpha$ soient des nombres de $\mathfrak{p}$. Les classes de congruence modulo $\mathfrak{p}$ forment, comme on sait, un nouvel anneau; nous le désignerons par $\mathsf{A}_\mathfrak{p}$ et nous dirons que A *se réduit modulo* $\mathfrak{p}$ *à* $\mathsf{A}_\mathfrak{p}$; nous appellerons aussi *réduction modulo* $\mathfrak{p}$ l'opération consistant à remplacer un nombre de A par sa classe modulo $\mathfrak{p}$. Une classe modulo $\mathfrak{p}$, en tant qu'élément de $\mathsf{A}_\mathfrak{p}$, sera aussi appelée un *nombre de* $\mathsf{A}_\mathfrak{p}$.

Soit g un sous-groupe de G. Nous avons défini l'annulateur de g comme l'ensemble des nombres ξ de A tels que $\xi\bar{g}=0$, $\bar{g}$ étant le nombre de A égal à la somme des éléments de g. C'est un idéal à gauche de A, il contient tous les nombres de la forme

$$\xi = \sum_{\gamma} \xi_\gamma (1-\gamma) \quad ,$$

où γ parcourt g et où les ξ_γ sont des nombres arbitraires de g, et ceux-là seulement.

Si g est un sous-groupe invariant de G, et dans ce cas seulement, son annulateur $\mathfrak{a}(g)$ est un idéal bilatère. $\mathsf{A}_{\mathfrak{a}(g)}$ est alors isomorphe à l'algèbre de G/g. En particulier, A se réduit modulo l'annulateur de G lui-même à un anneau isomorphe au domaine des coefficients D.

Considérons encore un sous-groupe invariant particulièrement intéressant: le groupe des commutateurs de G, appelé aussi groupe dérivé de G, que nous désignons par G'. C'est le plus petit sous-groupe invariant de G tel que le groupe quotient G/G' soit commutatif, et pour que G/g soit commutatif, il faut et il suffit que g contienne G'. L'annulateur de G', que nous appellerons l'*idéal des commutateurs* de A, jouit de propriétés correspondantes relativement à l'algèbre A. C'est le plus petit idéal de A dont les classes de congruence forment un anneau commutatif; $\mathfrak{a}$ étant un idéal bilatère quelconque de A, la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathsf{A}_{\mathfrak{a}}$ soit commutatif est que $\mathfrak{a}$ divise l'idéal des commutateurs (c'est-à-dire qu'il le contienne).

M étant un A-module, on désignera par ${}_{\mathfrak{p}}\mathsf{M}$ le plus petit sous-A-module de M qui contient tous les éléments de la forme αm, α étant un nombre quelconque de $\mathfrak{p}$ et m un élément quelconque de M, et par $\mathsf{M}_{\mathfrak{p}}$ le module $\mathsf{M}_{\mathfrak{p}} = \mathsf{M} - {}_{\mathfrak{p}}\mathsf{M}$. $\mathsf{M}_{\mathfrak{p}}$ est encore un A-module, mais il jouit de la propriété que deux nombres de A qui sont congrus modulo $\mathfrak{p}$ opèrent identiquement de la même manière dans $\mathsf{M}_{\mathfrak{p}}$; l'anneau des opérateurs de $\mathsf{M}_{\mathfrak{p}}$ se réduit donc à $\mathsf{A}_{\mathfrak{p}}$ et $\mathsf{M}_{\mathfrak{p}}$ peut être considéré comme un $\mathsf{A}_{\mathfrak{p}}$-module. Nous dirons aussi que M *se réduit modulo* $\mathfrak{p}$ *à* $\mathsf{M}_{\mathfrak{p}}$. Il est clair que tout $\mathsf{A}_{\mathfrak{p}}$-isomorphisme entre deux A-modules M et M' *induit* un $\mathsf{A}_{\mathfrak{p}}$-isomorphisme entre $\mathsf{M}_{\mathfrak{p}}$ et $\mathsf{M}'_{\mathfrak{p}}$, et tout A-homomorphisme de M dans M' induit un $\mathsf{A}_{\mathfrak{p}}$-homomorphisme de $\mathsf{M}_{\mathfrak{p}}$ dans $\mathsf{M}'_{\mathfrak{p}}$.

Considérons maintenant les A-modules C^q de toutes les q-chaînes d'un complexe avec automorphismes C, et les A-homomorphismes F de C^q dans C^{q-1} qui définissent les frontières des chaînes de C. En réduisant modulo $\mathfrak{p}$, on obtient les $\mathsf{A}_{\mathfrak{p}}$-modules $C^q_{\mathfrak{p}}$ et F induit un $\mathsf{A}_{\mathfrak{p}}$-homomorphisme, que nous désignerons encore par F, de $C^q_{\mathfrak{p}}$ dans $C^{q-1}_{\mathfrak{p}}$. L'ensemble de ces modules $C^q_{\mathfrak{p}}$, pour $q = 0, 1, \ldots, n$, avec les homomorphismes F, sera appelé *le complexe* $C_{\mathfrak{p}}$, et nous dirons que C *se réduit modulo* $\mathfrak{p}$ *à* $C_{\mathfrak{p}}$; un élément de $C^q_{\mathfrak{p}}$ sera appelé une *chaîne de* $C_{\mathfrak{p}}$, l'élément correspondant par F dans $C^{q-1}_{\mathfrak{p}}$ sera appelé sa *frontière*. On définit alors de la manière usuelle les chaînes fermées ou homologues à zéro dans $C_{\mathfrak{p}}$, qui forment des $\mathsf{A}_{\mathfrak{p}}$-modules que nous désignerons par $F^q(C_{\mathfrak{p}})$ ou $H^q(C_{\mathfrak{p}})$ respectivement, et le $q^{\text{ième}}$ module de Betti de $C_{\mathfrak{p}}$, $B^q(C_{\mathfrak{p}}) = F^q(C_{\mathfrak{p}}) - H^q(C_{\mathfrak{p}})$. Il faut remarquer que $F^q(C_{\mathfrak{p}}), H^q(C_{\mathfrak{p}})$ et $B^q(C_{\mathfrak{p}})$ ne sont pas respectivement identiques aux $\mathsf{A}_{\mathfrak{p}}$-modules $F^q_{\mathfrak{p}}$, $H^q_{\mathfrak{p}}$ et $B^q_{\mathfrak{p}}$ auxquels se réduisent modulo $\mathfrak{p}$ les A-modules F^q, H^q et B^q attachés à C.

Le raisonnement qui nous a conduit au *théorème II* fournit, en considérant les modules de Betti de C_p et sans aucune modification, le résultat suivant:

Théorème II *généralisé. Si les schémas S et S' des deux complexes avec automorphismes C et C' sont équivalents, en particulier si C et C' sont homéomorphes (au sens combinatoire), les A_p-modules $B^q(C_\mathrm{p})$ et $B^q(C'_\mathrm{p})$ sont A_p-isomorphes. Chaque mode d'équivalence de S avec S' induit un A_p-isomorphisme entre $B^q(C_\mathrm{p})$ et $B'(C'_\mathrm{p})$.*

Désignons, comme précédemment, par K et K' les sous-complexes formés par la réunion de tous les sous-complexes remarquables de C et C' respectivement, associés à une famille invariante de sous-groupes remarquables de G. La réduction modulo p peut s'appliquer à K et à C (mod K) aussi bien qu'à C, et les remarques faites à la suite du théorème II nous montrent que *le mode d'équivalence de S avec S' induit un A_p-isomorphisme non seulement entre $B^q(C_\mathrm{p})$ et $B^q(C'_\mathrm{p})$, mais encore entre $B^q(K_\mathrm{p})$ et $B(K'_\mathrm{p})$ ainsi qu'entre $B^q([C \;(mod\; K)]_\mathrm{p})$ et $B^q([C' \;(mod\; K')]_\mathrm{p})$* .

Enfin, on a encore des homorphismes analogues à ceux désignés au n⁰ précédent par H_1, H_2 et H_3, et le théorème énoncé à la fin du n⁰ précédent s'applique sans modification après qu'on a réduit les complexes modulo p.

Supposons que G se réduise à l'élément unité: C est alors un complexe ordinaire (sans automorphismes) et A se réduit au domaine des coefficients D; supposons que ce domaine soit l'anneau des entiers rationnels, dont les idéaux sont les idéaux principaux (m). Alors les $B^q(C_\mathrm{p})$ ne sont pas autre chose que les modules de Betti (mod m) qui ont été introduits par J. W. Alexander.

6. Sur un isomorphisme en relation avec la formule d'Euler-Poincaré

Nous allons considérer spécialement le cas où p est un idéal premier, diviseur de l'idéal des commutateurs, de sorte que A se réduise modulo p à un *corps commutatif* $k = \mathsf{A}_\mathrm{p}$. Les k-modules, qu'on appelle aussi *espaces vectoriels sur* k, jouissent de propriétés particulièrement simples, dont il convient de rappeler quelques-unes.

Plusieurs éléments d'un k-module sont dits *linéairement indépendants* (sous-entendu: relativement à k), si une combinaison linéaire de ces éléments, avec coefficients dans k non tous nuls, ne peut jamais s'annuler. Le nombre maximum, r, d'éléments linéairement indépendants, est appelé le *rang* du k-module (ou *dimension* de l'espace vectoriel). r tels éléments forment une *base :* leurs combinaisons linéaires représentent tous les éléments du k-module, chacun d'une manière unique. Deux k-modules sont k-isomorphes s'ils ont le même rang, et dans ce cas seulement.

A et B étant des k-modules, $A + B$ désignera leur *somme directe :* c'est un k-module dont le rang est égal à la somme des rangs de A et B, et dont on obtient une base en juxtaposant une base de A et une base de B.

Soit A' un sous k-module de A; on peut déterminer, et de plusieurs manières, un autre sous-k-module A'' de A tel que $A = A'' + A'$. A'' contient un élément et un seul de chaque classe de A suivant A', ce qui fournit un k-isomorphisme naturel entre A'' et $(A - A')$. On en déduit un k-isomorphisme de A avec $(A - A') + A''$, associé à la décomposition $A = A'' + A'$. Soient $A = A''_1 + A'$ et $A = A''_2 + A'$ deux telles décompositions, s_1 et s_2 les isomorphismes associés, envisagés comme transformations de A; alors $s_1^{-1}s_2$ est un automorphisme de A, qui transforme A''_2 en A''_1 et qui laisse invariants chaque élément de A' et chaque classe de A suivant A'.

Appliquons ces considérations aux k-modules $C^q(C_p)$, $F^q(C_p)$ et $H^q(C_p)$, que nous désignerons simplement par C^q, F^q et H^q (aucune confusion n'est à craindre, car nous n'aurons pas à envisager, pour le moment, d'autre complexe que C_p). On obtient les isomorphismes que nous désignons ci-dessous par le symbole $\cong$:

$$F^q \cong (F^q - H^q) + H^q\,, \qquad C^q \cong (C^q - F^q) + F^q\,, \tag{1}$$

d'où résulte, comme $F^q - H^q = B^q$:

$$C^q \cong (C^q - F^q) + B^q + H^q\,. \tag{2}$$

En utilisant encore l'isomorphisme de $C^q - F^q$ avec H^{q-1} fourni par les relations de frontière dans C_p (c'est-à-dire par l'homomorphisme F de C^q dans C^{q-1}), on obtient:

$$C^q \cong H^{q-1} + B^q + H^q \qquad (q = 0, 1, \ldots, n)\,, \tag{3}$$

d'où l'on déduit encore, en effectuant des sommes directes et en tenant compte de ce que H^{-1} et H^n se réduisent à zéro:

$$\left.\begin{aligned} C^n + B^{n-1} + C^{n-2} + B^{n-3} + C^{n-4} + \cdots &\cong B^n + H^{n-1} + B^{n-1} + H^{n-2} + \cdots \\ B^n + C^{n-1} + B^{n-2} + C^{n-3} + B^{n-4} + \cdots &\cong B^n + H^{n-1} + B^{n-1} + H^{n-2} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

d'où résulte finalement:

$$C^n + B^{n-1} + C^{n-2} + B^{n-3} + C^{n-4} + \cdots \cong B^n + C^{n-1} + B^{n-2} + C^{n-3} + B^{n-4} + \cdots \tag{5}$$

Pour abréger, nous désignerons par M_1 et M_2 les modules qui figurent aux premiers membres des relations (4) (et qui se retrouvent aux premier et second membres de (5)) et par M celui qui figure au second membre de chacune des relations (4).

L'égalité des rangs de M_1 et M_2, qui découle de (5), peut être appelée la *formule d'Euler-Poincaré relative à* C_p. Elle se réduit en effet à la formule connue sous ce nom dans le cas où C_p est un complexe ordinaire, le rang de C^q étant égal au nombre des cellules à q dimensions et le rang de B^q étant le $q^{\text{ième}}$ nombre de Betti. Le raisonnement fait ici coïncide du reste avec la démonstration habituelle de cette formule.

Mais l'isomorphisme entre M_1 et M_2 obtenu dans (5) n'est pas quelconque, car il a été déterminé par l'intermédiaire de (3) et (1), et les isomorphismes (1) ont été formés par le procédé particulier qui a été indiqué. A cause de ce procédé, l'isomorphisme (3) le plus général s'_q est de la forme

$$s'_q = s_q \, \sigma_q \quad ,$$

où s_q est un isomorphisme (3) particulier et σ_q *un automorphisme de* C^q *assujetti à laisser invariants chaque élément de* H^q, F^q *et chaque classe de* F^q *suivant* H^q, *ainsi que chaque classe de* C^q *suivant* F^q. Comme C^q est une „composante“ de M_1 ou M_2 (suivant que $n - q$ est pair ou impair), σ_q peut être considéré aussi comme un automorphisme de M_1 ou M_2; σ_q et σ_{q-2k}, opérant dans des composantes distinctes, sont évidemment permutables.

Désignons par S_1 (respectivement S_2) l'isomorphisme (4) entre M_1 (respectivement M_2) et M qui se déduit, par les sommations directes, de $s_n, s_{n-2}, s_{n-4}, \ldots$ (respectivement $s_{n-1}, s_{n-3}, s_{n-5}, \ldots$). Soient S'_1 et S'_2 les isomorphismes (4) qui se déduisent de la même manière des s'_q. Nous avons alors

$$S'_1 = S_1(\sigma_n \, \sigma_{n-2} \, \sigma_{n-4} \ldots) \quad \text{et} \quad S'_2 = S_2(\sigma_{n-1} \, \sigma_{n-3} \, \sigma_{n-5} \ldots) \quad .$$

Posons encore $S = S_2^{-1} S_1$ et $S' = S_2'^{-1} S'_1$; nous obtenons la formule

$$S' = (\sigma_{n-1}^{-1} \, \sigma_{n-3}^{-1} \ldots) \; S(\sigma_n \, \sigma_{n-2} \ldots) \quad , \tag{6}$$

qui représente l'isomorphisme (5) le plus général S' au moyen d'un isomorphisme (5) particulier S, d'ailleurs quelconque. Cette formule est équivalente à la suivante:

$$S' = (\sigma_{n-1} \, \sigma_{n-3} \ldots) \; S(\sigma_n \, \sigma_{n-2} \ldots) \quad , \tag{6'}$$

car le champ de variabilité de σ_q est identique à celui de σ_q^{-1}. Pour mettre en évidence une propriété commune à tous les isomorphismes S', qui sera par suite une propriété de C lui-même, nous allons faire usage de la représentation des isomorphismes par des matrices.

D'une manière générale, étant donné un isomorphisme J entre deux k-modules A et B, dans lesquels on a choisi des bases déterminées, nous appellerons *déterminant de* J le déterminant $||a_{ik}||$, où a_{ik} est égal au coefficient du $k^{\text{ième}}$ élément de base de B dans l'expression, au moyen de cette base, de l'élément de B qui correspond par J au $i^{\text{ième}}$ élément de base de A. Lorsque J est un automorphisme, B étant identique à A, ce déterminant ne dépend pas de la base choisie. Nous appellerons encore *déterminant d'un changement de base* donné dans un k-module, le déterminant de l'automorphisme associé à ce changement de base, automorphisme par lequel le $i^{\text{ième}}$ élément de la nouvelle base correspond au $i^{\text{ième}}$ élément de l'ancienne base.

Cela posé, supposons qu'on choisisse des bases de tous nos k-modules C^q et B^q. Par juxtaposition, on en déduit des bases de M_1 et M_2, qui définissent les déterminants de S et S'. Nous allons montrer que *ces déterminants sont égaux*.

Pour cela, il suffira, en vertu de la formule (6) et de la règle connue de multiplication des déterminants, de montrer que le déterminant de l'automorphisme σ_q est égal à 1. A cet effet, prenons une base de C^q adaptée aux sous-k-modules F^q et H^q, c'est-à-dire une base dont les r premiers éléments forment une base de H^q et dont les $r+r'$ premiers éléments forment une base de F^q (r étant le rang de H^q et $r+r'$ celui de F^q); la matrice de σ_q prend alors la forme

$$\begin{vmatrix} E & O & O \\ X & E & O \\ Y & Z & E \end{vmatrix},$$

où E représente la matrice unité, O la matrice nulle et X, Y et Z des matrices quelconques. Son déterminant est bien égal à 1.

Le déterminant de S ne dépend par suite que des bases des C^q et des B^q. Supposons que l'on change ces bases, et soient c_q et b_q les déterminants des changements de base C^q et de B^q respectivement; la nouvelle valeur Δ^* du déterminant de S est alors reliée à l'ancienne Δ par la formule

$$\Delta^* = \prod_{q=0}^{n} c_q^{(-1)^{n-q}} b_q^{(-1)^{n-q-1}} \cdot \Delta \ . \tag{7}$$

Le produit en facteur devant Δ est le quotient du déterminant du changement de base de M_1 par celui de M_2.

7. Nouvelles conditions d'équivalence

Le déterminant Δ va nous conduire à des conditions nécessaires pour l'équivalence des schémas de deux complexes avec automorphismes, qui, comme on verra, précisent les conditions déjà énoncées dans le théorème II.

Bornons-nous tout d'abord à considérer des complexes C dont *les automorphismes* $T(\gamma)$ *ne laissent aucune cellule invariante* (pour $\gamma \neq 1$), ou, ce qui revient au même, dont l'annulateur de chaque cellule se réduit à zéro.

Il résulte de cette propriété que l'annulateur d'une chaîne d'une base distinguée quelconque se réduit aussi à zéro. Par réduction modulo $\mathfrak{p}$, les q-chaînes d'une base distinguée fournissent toujours une base de $C^q_{\mathfrak{p}}$, dont le rang est par suite égal au nombre des cellules à q dimensions d'un domaine fondamental.

Calculons le déterminant Δ de l'isomorphisme S en prenant successivement, comme bases des $C^q_{\mathfrak{p}}$, les bases qui se déduisent ainsi, par réduction modulo $\mathfrak{p}$, de deux bases distinguées différentes, et en prenant les mêmes bases des $B^q(C_{\mathfrak{p}})$ dans les deux calculs. Les deux valeurs obtenues, Δ et Δ^*, sont reliées par la formule (7), qui se réduit à

$$\Delta^* = \prod_{q=c}^{n} c_q^{(-1)^{n-q}} \cdot \Delta \ ,$$

tous les b_q étant égaux à 1, puisque les bases des $B^q(C_{\mathfrak{p}})$ ne sont pas changées. Cherchons à calculer les déterminants c_q des changements de base des $C^q_{\mathfrak{p}}$.

On passe d'une base distinguée à l'autre par une suite d'opérations des types **A**, **B**, **C** et **D**; les déterminants des changements de base correspondants des $C^q_{\mathfrak{p}}$, comme on le vérifie immédiatement, sont égaux à 1 ou -1 pour **A** et **B**, à 1 pour **D**, et pour le type **C**, au nombre $\gamma_{\mathfrak{p}}$ auquel se réduit modulo $\mathfrak{p}$ un nombre de A égal à un élément γ de G. Il résulte de là que *le produit* $\prod c_q^{(-1)^{n-q}}$ *est égal à un nombre de la forme* $(\pm\gamma)_{\mathfrak{p}}$, *auquel se réduit modulo* $\mathfrak{p}$ *un nombre de* A, *de la forme* $\pm\gamma$, *indépendant de* $\mathfrak{p}$.

Supposons maintenant que l'on prolonge le schéma de notre complexe par adjonction de deux chaînes de base, c^q et c^{q-1}, dont la seconde est la frontière de la première: $\mathsf{F}c^q = c^{q-1}$ (opération **E**). L'effet de cette opération est l'adjonction d'un élément de base à chacun des modules $C^q_{\mathfrak{p}}$ et $C^{q-1}_{\mathfrak{p}}$, et par suite à chacun des modules M_1 et M_2, ces deux éléments se correspondant par l'isomorphisme S. La seule modification subie par le déterminant de S consiste par suite en l'adjonction d'une nouvelle ligne et d'une nouvelle colonne dont tous les éléments sont nuls, sauf celui situé sur leur place de croisement qui est égal à 1. La valeur du déterminant n'est donc pas changée, ou changée de signe, et cela indépendemment de $\mathfrak{p}$.

En définitive, nous avons ainsi établi le

Théorème III. *Soient C et C' deux complexes avec automorphismes, représentant le même groupe G, dont les automorphismes $T(\gamma)$ ne laissent aucune cellule invariante (pour $\gamma \neq 1$), et dont les schémas attachés à deux bases distinguées données (par exemple deux domaines fondamentaux) sont équivalents. Il existe alors un nombre de A de la forme $\pm\gamma$, γ étant un élément de G, tel que, quel que soit l'idéal premier $\mathfrak{p}$ diviseur de l'idéal des commutateurs de A, on ait :*

$$\Delta' = (\pm\gamma)_{\mathfrak{p}}\,\Delta \quad ,$$

Δ et Δ' étant les déterminants des isomorphismes S relatifs à $C_{\mathfrak{p}}$ et $C'_{\mathfrak{p}}$, calculés en prenant les bases de $C^q_{\mathfrak{p}}$ et $C'^q_{\mathfrak{p}}$ qui se déduisent des bases distinguées données de C et de C', et en prenant des bases de $B^q(C_{\mathfrak{p}})$ et de $B^q(C'_{\mathfrak{p}})$ qui se correspondent par l'isomorphisme entre $B^q(C_{\mathfrak{p}})$ et $B^q(C'_{\mathfrak{p}})$ induit par le mode d'équivalence des schémas de C et de C'.

A l'aide de ce théorème, on pourra établir que les schémas de deux complexes avec automorphismes C et C' ne sont pas équivalents, dans certains cas où le théorème II seul ne suffirait pas. En effet, supposons que pour tous q et $\mathfrak{p}$, on ait un $\mathsf{A}_{\mathfrak{p}}$-isomorphisme entre $B^q(C_{\mathfrak{p}})$ et $B^q(C'_{\mathfrak{p}})$. On peut alors calculer, pour chaque valeur de $\mathfrak{p}$, les déterminants Δ et Δ', en prenant des bases de $B^q(C_{\mathfrak{p}})$ et $B^q(C'_{\mathfrak{p}})$ qui se correspondent par les isomorphismes donnés; leur rapport est un nombre de $\mathsf{A}_{\mathfrak{p}}$ parfaitement déterminé et à chaque $\mathfrak{p}$ correspond une équation

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = (\pm\gamma)_{\mathfrak{p}} \ .$$

S'il n'existe aucun nombre de A de la forme $\pm\gamma$ qui satisfasse à toutes ces conditions, on sera assuré que les isomorphismes considérés entre les $B^q(C_{\mathfrak{p}})$ et les $B^q(C'_{\mathfrak{p}})$ ne peuvent pas être induits par un mode d'équivalence du schéma de C avec celui de C'. Si ces conditions sont incompatibles quel que soit l'ensemble des isomorphismes considérés, on sera alors assuré que les schémas de C et C' ne sont pas équivalents, et par suite que C et C' ne sont pas homéomorphes (au sens combinatoire).

Nous n'avons considéré que des complexes dont les automorphismes $T(\gamma)$ ne laissent aucune cellule invariante. Mais le théorème III s'applique aussi (indirectement) aux complexes qui ne satisfont pas à cette condition. Soit en effet K le sous-complexe de C formé par la réunion de tous les sous-complexes remarquables de C associés aux sous-groupes remarquables de G (G lui-même étant exclu), et soit K' le sous-complexe analogue de C'; si les schémas de C et C' sont équivalents, les schémas de C (mod K) et C' (mod K') sont aussi équivalents, et le théorème III s'applique directement à C (mod K) et C' (mod K'), car les automorphismes $T(\gamma)$ ne laissent aucune de leurs cellules invariante.

Les isomorphismes considérés entre les $B^q(C_\mathfrak{p})$ et les $B^q(C'_\mathfrak{p})$, pour pouvoir être induits par un mode d'équivalence des schémas de C et C', doivent satisfaire à encore d'autres conditions. Ils doivent en particulier respecter certaines relations qui existent entre les divers modules $B^q(C_\mathfrak{p})$ relatifs à une même dimension q et à divers idéaux $\mathfrak{p}$ de A, ou même aux diverses algèbres A de G construites avec les divers domaines de coefficients D. Mais nous n'aborderons pas cette question ici. Bornons-nous à remarquer que le nombre $\pm\gamma$ ne dépend pas du domaine des coefficients D, comme cela ressort de notre démonstration.

Il y a aussi les relations entre les modules B^q relatifs à des dimensions q différentes, que l'on déduit de la théorie des intersections; ces relations sont respectées dans les isomorphismes induits par une transformation de C en C' par une suite d'opérations élémentaires, mais en général pas dans les isomorphismes induits par un mode d'équivalence des schémas de C et C'.

Il peut arriver, dans certains cas, que tous les modules de Betti de $C_\mathfrak{p}$ se réduisent à zéro. Le déterminant Δ est alors, au facteur $(\pm\gamma)_\mathfrak{p}$ près, un invariant topologique absolu (au sens combinatoire) qui a été déjà considéré par M. Franz sous le nom de *torsion* (3).

8. Remarques sur la réduction modulo $\mathfrak{p}$

$\mathfrak{p}$ étant un idéal (bilatère) quelconque de A, on a défini au n° 5 les chaînes de $C_\mathfrak{p}$ et leurs frontières: elles se déduisent par réduction modulo $\mathfrak{p}$ des chaînes de C et de leurs frontières. Nous pouvons définir les *cellules orientées* de $C_\mathfrak{p}$ comme étant les chaînes auxquelles se réduisent modulo $\mathfrak{p}$ les cellules orientées de C (qui sont des chaînes particulières de C), et une *cellule de* $C_\mathfrak{p}$ sera définie par l'ensemble des deux cellules orientées de $C_\mathfrak{p}$ qui se déduisent d'une même cellule de C prise avec les deux orientations différentes.

$C_\mathfrak{p}$ peut-il être considéré alors comme un véritable complexe, indépendemment de C? Pas nécessairement. Dans un complexe au sens habituel, une combinaison linéaire à coefficients rationnels non tous nuls de cellules distinctes (orientées) ne peut pas, par définition même, se réduire à zéro, tandis que cela peut arriver dans $C_\mathfrak{p}$. Pour que cette circonstance ne se présente pas, il faut et il suffit que l'annulateur de toute cellule de C coïncide avec l'annulateur du sous-groupe de G qui la laisse invariante. Considérons en particulier une cellule $\mathbf{a}$ de C dont l'annulateur se réduise à zéro, le sous-groupe qui la laisse invariante se réduisant à l'élément unité. L'annulateur de la cellule correspondante $\mathbf{a}_\mathfrak{p}$ de $C_\mathfrak{p}$ se réduit alors à $\mathfrak{p}$, et le sous-groupe qui la laisse invariante est formé par l'ensemble des éléments γ de G tels que $\gamma \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$. Ce sous-groupe g est nécessairement un sous-groupe invariant et il laisse invariantes toutes les cellules de $C_\mathfrak{p}$. Pour que $C_\mathfrak{p}$ soit un véritable complexe, il est donc nécessaire que $\mathfrak{p}$ coincide avec l'annulateur $\mathfrak{a}(g)$ de g. Inversément, si $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}(g)$, $C_{\mathfrak{a}(g)}$ peut être considéré comme un véritable complexe; le groupe des automorphismes se réduisant à G/g, *$C_{\mathfrak{a}(g)}$ est un complexe avec automorphismes qui représente G/g.*

En particulier, $C_{\mathfrak{a}(G)}$ est un complexe ordinaire (sans automorphismes). A chaque famille de cellules de C qui se déduisent de l'une d'elles par les automorphismes $T(\gamma)$ correspond une cellule de $C_{\mathfrak{a}(G)}$, et inversément. Supposons que C satisfasse à la condition suivante: deux cellules distinctes d'une même famille (auxquelles correspondra une même cellule de $C_{\mathfrak{a}(G)}$) ne peuvent pas être situées sur la frontière d'une même cellule (si C ne satisfaisait pas à cette condition, la subdivision normale de C y satisfait toujours); alors les complexes frontières de deux cellules correspondantes de C et $C_{\mathfrak{a}(G)}$ sont isomorphes. *C est donc un complexe de recouvrement de $C_{\mathfrak{a}(G)}$.* Sauf dans le cas où les $T(\gamma)$ ne laissent aucune cellule invariante, il y aura des ramifications qui correspondent aux sous-complexes remarquables de C.

Les réductions peuvent s'effectuer successivement. Si $\mathfrak{p}$ divise $\mathfrak{a}$, et si $\bar{\mathfrak{p}}$ est l'idéal de $\mathsf{A}_\mathfrak{a}$ qui correspond à $\mathfrak{p}$, il est clair qu'en réduisant $C_\mathfrak{a}$ modulo $\bar{\mathfrak{p}}$, on obtient $C_\mathfrak{p}$. Il résulte de là que tous les complexes $C_\mathfrak{p}$ qui interviennent dans le théorème III peuvent s'obtenir à partir du complexe $C_\mathfrak{a}$ associé à l'idéal des commutateurs $\mathfrak{a}$, qui est un complexe avec automorphismes représentant un groupe *abélien :* le groupe quotient de G par son sous-groupe des commutateurs.

(Reçu le 9 novembre 1939.)