Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 12 (1939-1940)

Artikel: Sulle involuzioni di ordine n e specie n-1 in un campo binario.

Autor: Longhi, Ambrogio di

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12800

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sulle involuzioni di ordine n e specie $n-1$ in un campo binario

Di Ambrogio Longhi, Lugano

Il presente articolo ha lo scopo di porre in rilievo alcune semplici proprietà di ogni serie lineare g_n^{n-1} sopra una curva razionale: le quali non sembra siano state finora esplicitamente notate, benchè si prestino a varie applicazioni non prive d'interesse.

1. In un campo binario Γ (ente razionale ∞^1, irriducibile) abbiasi una involuzione I_n^{n-1} d'ordine n e di specie $n-1$: cioè una serie lineare g_n^{n-1}, senza punti fissi.

Su Γ esistono allora infinite coppie di elementi ε, ε' tali che il gruppo:

$$\varepsilon + (n-1)\varepsilon'$$

appartenga alla involuzione. Dato ε' resta individuato ε; mentre, dato ε, risultano determinati $n-1$ elementi ε': quelli che sono $(n-1)$-upli per la involuzione I_{n-1}^{n-2} (di ordine $n-1$ e specie $n-2$) *residua dell'elemento ε rispetto alla I_n^{n-1}*, ossia costituita dai gruppi di I_n^{n-1} passanti per ε e privati dell'elemento ε stesso.

Gli elementi ε ed ε', supposti variabili, riescono quindi omologhi in una corrispondenza $(1, n-1)$; la quale, se $n > 2$, non è simmetrica e possiede pertanto:

$$\tfrac{1}{2}[1 + (n-1)^2 - n] = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

coppie di elementi corrispondentisi in doppio modo. Dunque:

Una involuzione d'ordine $n > 2$ e di specie $n-1$, entro un campo binario, ammette $\binom{n-1}{2}$ coppie di elementi caratterizzate dalla proprietà che ciascun elemento di una tal coppia è $(n-1)$-uplo per un gruppo della involuzione il quale contiene anche l'altro elemento della stessa coppia[1]).

Per brevità, siffatte coppie di elementi si chiameranno *le coppie principali* della involuzione.

---

[1]) Per un teorema generale, di cui questo è caso particolarissimo, vedasi: *F. Severi*, Sopra alcune singolarità delle curve di un iperspazio [Memorie della R. Accademia di Torino, 51 (2), 1902], n. 3, ultima nota.

2. In uno spazio S_n, di dimensione $n > 2$, una curva razionale normale C_n sia sostegno di una involuzione I_n^{n-1}. I gruppi della I_n^{n-1} si possono allora ottenere segando C_n con gl'iperpiani passanti per un certo punto O, non situato su C_n[2]).

Detto P un punto generico di C_n, la retta OP è incidente ad $n - 1$ spazi S_{n-2} osculatori a C_n in altrettanti punti $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ diversi da P: che sono i punti $(n - 1)$-upli della involuzione I_{n-1}^{n-2} residua (n. 1) di P rispetto alla I_n^{n-1}.

Al variare di P su C_n, il gruppo:

$$G_n = P + \sum_{i=1}^{n-1} P_i \quad ,$$

che può dirsi *relativo* al punto P, descrive una serie algebrica γ_n^1 d'ordine n; e di indice 2: infatti, i soli gruppi di γ_n^1 che contengono P sono il G_n relativo (nel senso suddetto) a P, e l'altro analogamente relativo al punto ulteriore intersezione di C_n con l'iperpiano per O e per l'S_{n-2} osculatore a C_n in P.

Ne segue che l'iperpiano π congiungente i punti del gruppo variabile G_n di γ_n^1, essendo in generale privo di contatti con C_n, deve inviluppare un cono quadrico V_{n-1}^2.

È poi noto[3]) che π corrisponde al punto O in una correlazione involutoria singolare (col punto fondamentale P): precisamente in un sistema nullo o polare secondochè n è pari o dispari. Nel primo caso l'iperpiano variabile π passa quindi sempre per O; mentre nel secondo l'appartenenza di O a π non si verifica che due volte (quando cioè π viene a coincidere con uno dei due iperpiani per O tangenti al cono V_{n-1}^2). Pertanto:

Data in un campo binario una involuzione I_n^{n-1} d'ordine $n > 2$ e di specie $n - 1$, gli ∞^1 gruppi costituiti ciascuno da un elemento ε e dagli elementi $(n - 1)$-upli della involuzione I_{n-1}^{n-2} residua (n. 1) *di ε rispetto a I_n^{n-1}, riempiono una serie algebrica γ_n^1 d'ordine n e di indice 2: la quale è totalmente contenuta nella I_n^{n-1} quando n è pari, mentre ha due soli gruppi*[4]) *in comune con la I_n^{n-1} quando n è dispari.*

Tale serie γ_n^1 si dirà *inerente* alla involuzione I_n^{n-1}.

---

[2]) E neppure sopra alcuno spazio S_k osculatore a C_n di dimensione $k < n-1$: se, come è sempre da sottintendere nel seguito, la involuzione I_n^{n-1} ha i suoi n elementi n-upli tutti distinti.

[3]) *A. Brambilla*, Intorno alle curve razionali in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni. (Rend. del R. Istituto Lombardo, 19 (2), 1886).

[4]) È subito visto che, nell'ipotesi (sempre sottintesa) di cui alla nota [2]), tali due gruppi sono distinti.

3. L'involuzione coniugata alla I_n^{n-1} riducendosi al gruppo dei punti n-upli di I_n^{n-1}, la polare mista, rispetto a tal gruppo, di $n-1$ qualsiansi fra gli n punti (distinti o no) di ogni gruppo della I_n^{n-1} è il rimanente punto del gruppo stesso. Ne consegue che:

Detto U_n il gruppo degli n elementi n-upli di una involuzione I_n^{n-1} entro un campo binario, le $\binom{n-1}{2}$ coppie principali (n. 1) *di I_n^{n-1} sono le coppie di elementi appartenenti ciascuno al (primo) gruppo polare dell'altro rispetto a U_n.*

E la serie γ_n^1 inerente (n. 2) *ad I_n^{n-1} è quella descritta dal gruppo somma di un elemento variabile del campo col suo (primo) gruppo polare rispetto a U_n.*

4. Il cono V_{n-1}^2, introdotto al n. 2, avrà per vertice un certo spazio S_{n-3}^* ad $n-3$ dimensioni. Segando allora con gl'iperpiani della stella di centro S_{n-3}^* la curva C_n, si ottiene su questa una involuzione di 2ª specie I_n^2: la quale è la serie lineare di dimensione minima fra tutte quelle d'ordine n che contengono la serie algebrica γ_n^1, d'indice 2, inerente (nº 2, 3) alla involuzione I_n^{n-1}. Si può aggiungere che, se n è pari, in S_{n-3}^* trovasi il punto O (n. 2): onde la I_n^2 è contenuta nella I_n^{n-1}.

Siano ora P e P' due punti di C_n costituenti una coppia principale (nº 1, 3) della involuzione I_n^{n-1}. Ciò significa che entrambi i gruppi:

$$P + (n-1)P' \quad , \quad P' + (n-1)P$$

fanno parte di I_n^{n-1}, ossia giacciono ciascuno in un iperpiano per O. Ne deriva che gli spazi ad $n-2$ dimensioni osculatori a C_n in P e in P' incontrano rispettivamente la retta OP' e la OP; quindi per i punti P, P' passano ad un tempo due gruppi della serie γ_n^1 inerente (nº 2, 3) alla involuzione I_n^{n-1}: il G_n relativo a P (nel senso precisato al n. 2), e il G'_n analogo relativo a P'.

Importa osservare che i gruppi G_n e G'_n non possono coincidere: diversamente esisterebbero punti di C_n (distinti da P e da P') con lo spazio S_{n-2} ivi osculatore appoggiantesi, altrove che in O, alle due rette OP, OP'; e la curva C_n, contro l'ipotesi che sia normale, apparterrebbe all'iperpiano (OS_{n-2}).

Siccome G_n e G'_n sono pure gruppi della involuzione I_n^2 in cui la serie γ_n^1 è contenuta, ne discende che i punti P e P' offrono una sola condizione ai gruppi di I_n^2 obbligati ad includerli: cioè formano una coppia *neutra* per la I_n^2. Riassumendo:

Le $\binom{n-1}{2}$ coppie principali (nº 1, 3) *di una involuzione I_n^{n-1}, con $n > 2$,*

entro un campo binario, sono tutte neutre per una stessa involuzione I_n^2: *contenuta o no totalmente nella* I_n^{n-1} *secondochè* n *è pari o dispari, ed individuata da tre generici gruppi della serie* γ_n^1 *(cui la* I_n^2 *sempre contiene) inerente* (n^1 2, 3) *alla* I_n^{n-1}.

5. Nel teorema del n. 4 suppongasi n dispari. La involuzione I_n^2 non è allora contenuta nella I_n^{n-1}; però ha comuni con questa ∞^1 gruppi che costituiscono un'involuzione di prima specie I_n^1: fra i quali, due appartenenti alla serie γ_n^1 (n. 2). Poichè ogni coppia neutra per la I_n^2 è tale anche per la I_n^1, si conclude:

Quando n *è dispari, le* $\binom{n-1}{2}$ *coppie principali* (n^1 1, 3) *di una involuzione* I_n^{n-1} *in un campo binario, son tutte neutre per una medesima involuzione* I_n^1 *totalmente contenuta nella* I_n^{n-1}: *ed individuata dai due gruppi che l'involuzione* I_n^{n-1} *ha in comune con la serie* γ_n^1 *ad essa inerente* (n^1 2, 3).

6. Sia J_n^{n-1} una seconda involuzione d'ordine n e di specie $n-1$ col medesimo sostegno della I_n^{n-1}. La serie γ_n^1 inerente (n^1 2, 3) a I_n^{n-1}, essendo d'indice 2, ha due suoi gruppi (se non tutti) appartenenti alla J_n^{n-1}: e per la involuzione I_n^1 da questi determinata, la quale può considerarsi estratta dalla I_n^2 che contiene la γ_n^1 (n. 4), è neutra ogni coppia principale (n^1 1, 4) di I_n^{n-1}. Dunque:

Date genericamente, in uno stesso campo binario, due diverse involuzioni d'ordine n *e di specie* $n-1$, *le* $\binom{n-1}{2}$ *coppie principali* (n^1 1, 3) *di una qualunque di esse son tutte neutre per una medesima involuzione d'ordine* n *e di prima specie contenuta nell'altra: e individuata dai due gruppi che questa ha comuni con la serie* γ_n^1 *inerente* (n^1 2, 3) *alla prima involuzione.*

7. Passando ad alcune applicazioni dei teoremi precedenti, si consideri anzitutto una curva razionale Γ_n, d'ordine n, appartenente allo spazio S_{n-1}, e la involuzione I_n^{n-1} costituita dalle sue sezioni iperpiane.

I due punti di una coppia principale (n. 1) di I_n^{n-1} giacciono ciascuno sull'iperpiano osculatore a Γ_n nell'altro: onde la retta che li unisce è una corda principale di Γ_n.

Un gruppo generico della serie γ_n^1 inerente (n. 2) alla I_n^{n-1} consta di un punto P di Γ_n e dei punti di contatto degli $n-1$ iperpiani uscenti da P ed osculatori altrove a Γ_n.

Se infine si osserva che un'involuzione I_n^k contenuta nella I_n^{n-1} è necessariamente staccata su Γ_n dalla totalità degli iperpiani condotti per un certo spazio S_{n-k-2} (subordinato a S_{n-1}), e che sopra una retta incidente

a questo spazio debbono stare i punti di ogni coppia neutra per la I_n^k, dal teorema del n. 4 segue subito che *quando n è pari, le $\binom{n-1}{2}$ corde principali della curva Γ_n sono tutte incidenti ad un determinato spazio S_{n-4}:* come è già noto[5]).

Nuovo sembra invece, e non meno interessante, il seguente teorema, a cui conduce quello del n. 5:

Quando n è dispari, sopra una generica curva razionale Γ_n d'ordine $n > 3$, appartenente ad uno spazio S_{n-1}, esistono due punti, P_1 e P_2, tali che gli $n - 1$ iperpiani per P_i, osculatori altrove a Γ_n, hanno i loro punti di contatto situati con P_i in un iperpiano π_i ($i = 1,2$).

I due (distinti) iperpiani π_1 e π_2 si segano in uno spazio S_{n-3}: e a questo spazio sono incidenti tutte le $\binom{n-1}{2}$ corde principali di Γ_n.

8. Applicando il risultato del n. 6 alla curva Γ_n (n. 7), nell'ipotesi che una delle due involuzioni da considerarsi su Γ_n vi sia staccata dagli iperpiani dello spazio ambiente, si perviene al teorema:

Data sopra una curva razionale Γ_n, d'ordine n e appartenente ad uno spazio S_{n-1}, una involuzione I_n^{n-1} di grado n e specie $n - 1$ (che non sia quella delle sezioni iperpiane se n è pari), tutte le $\binom{n-1}{2}$ corde congiungenti ciascuna i punti di una sua coppia principale (n¹ 1, 3) *si appoggiano ad uno stesso spazio S_{n-3}: intersezione dei due iperpiani seganti Γ_n in gruppi della serie γ_n^1 inerente* (n¹ 2, 3) *a I_n^{n-1}.*

Sotto altra forma il teorema può così enunciarsi:

Sulla curva razionale Γ_n dello spazio S_{n-1} sia fissato un gruppo U_n di n punti distinti: che non coincida con quello dei punti di contatto degli iperpiani osculatori stazionari se n è pari.

La curva Γ_n possiede allora $\binom{n-1}{2}$ coppie di punti (A_i, B_i) caratterizzate dalla proprietà che ciascun punto di ogni coppia appartiene al (primo) gruppo polare dell'altro rispetto a U_n; e possiede pure due certi punti P_1, P_2 tali che gli $n - 1$ punti costituenti il (primo) gruppo polare di P_j rispetto a U_n giacciono con P_j in un iperpiano π_j ($j = 1,2$).

Orbene: le $\binom{n-1}{2}$ corde $A_i B_i$ sono tutte incidenti allo spazio S_{n-3} intersezione di π_1 con π_2.

---

[5]) *L. Berzolari*, Estensione di un teorema di *Bertini-Laguerre* (Boll. Unione Mat. Italiana, XII, 1933).

9. In uno spazio qualsiasi si consideri una curva razionale, ed un sistema lineare di forme staccanti su di essa i gruppi di una involuzione I_n^{n-1}. Le proprietà derivanti per questa dalle proposizioni dei n^i 4 e 5 conducono all'enunciato:

Una curva razionale irriducibile C, con qualunque singolarità, appartenga allo spazio S_r ad r dimensioni; e sia Σ, in S_r, un sistema lineare ∞^{n-1} di forme: una variabile delle quali non contenga mai C, ed intersechi C (oltre che in eventuali punti fissi) in n punti variabili.

La curva C non possegga punti multipli che non siano punti base di Σ.

Su C esistono allora $\binom{n-1}{2}$ coppie (X_i, Y_i) di punti distinti, tali che per ciascun punto di ogni coppia passa una forma di Σ avente con C un contatto di ordine $n-2$ nell'altro punto della stessa coppia.

Un punto P di C giace in $n-1$ forme di Σ, ognuna delle quali abbia con C un contatto d'ordine $n-2$ in un punto P_j $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Se n è pari, i punti $P, P_1, \ldots P_{n-1}$ stanno assieme in una forma di Σ: che varia entro una certa rete al variare di P su C; e i quattro punti di due qualsiansi delle coppie (X_i, Y_i) appartengono sempre ad una medesima forma di questa rete.

Se n è dispari, solo quando P viene a coincidere con due particolari punti $P^{(1)}, P^{(2)}$ di C, accade che gli n punti $P \equiv P^{(k)}, P_1, \ldots, P_{n-1}$ sono insieme situati sopra una forma F_k di Σ $(k = 1,2)$: e per entrambi i punti di ciascuna delle coppie (X_i, Y_i) passa una forma del fascio individuato da F_1, F_2.

10. Una curva razionale C_m d'ordine m appartenga ad uno spazio S_r e non possegga altri punti multipli che un nodo K. Le forme di S_r d'ordine μ abbastanza elevato, che passano per K e per $m\mu - 1$ ulteriori punti di C_m, contengono allora necessariamente l'intera curva (supposta irriducibile): la quale ha quindi per tali forme la postulazione $m\mu$. Ne deriva che le forme stesse segano su C_m una involuzione $I_{m\mu}^{m\mu-1}$.

Fra le coppie principali (n^i 1, 3) della $I_{m\mu}^{m\mu-1}$, una ha entrambi i suoi punti coincidenti nel nodo K di C_m; mentre le rimanenti:

$$\binom{m\mu-1}{2} - 1 = \tfrac{1}{2} m\mu(m\mu - 3)$$

constano di punti distinti.

Chiamisi K_1 o K_2 il punto K secondo che esso si ritenga sull'uno o sull'altro dei due rami di C_m con l'origine in K.

Per un punto P di C_m passano $m\mu - 1$ gruppi dell'involuzione $I_{m\mu}^{m\mu-1}$ costituiti ciascuno da P e da un punto $P_i(m\mu - 1)$-uplo $(i = 1,2,\ldots,$

$m\mu - 1$): ed è subito visto che quando P tende a K_1 (a K_2), ogni punto P_i tende a K_2 (a K_1). Infatti l'involuzione $I_{m\mu-1}^{m\mu-2}$ residua (n. 1) ad esempio di K_1 rispetto alla $I_{m\mu}^{m\mu-1}$ ha un punto fisso in K_2: il quale assorbe tutti gli $m\mu - 1$ punti $(m\mu - 1)$-upli di $I_{m\mu-1}^{m\mu-2}$; giacchè, tolto K_2 dai gruppi di tale involuzione, resta una $I_{m\mu-2}^{m\mu-2}$ con nessun punto $(m\mu - 1)$-uplo.

Ne consegue che i due gruppi di $I_{m\mu}^{m\mu-1}$ individuati dall'avere un punto $(m\mu - 1)$-uplo l'uno in K_1 e l'altro in K_2 son due particolari gruppi della serie descritta dal gruppo:

$$P + \sum_{i=1}^{m\mu-1} P_i$$

al variare di P: cioè della serie inerente (n^i 2, 3) alla involuzione $I_{m\mu}^{m\mu-1}$.

In base ai teoremi dei n^i 4 e 5 si può pertanto enunciare:

Sopra una curva razionale C_m d'ordine m, irriducibile e appartenente ad uno spazio S_r di dimensione $r \geqslant 2$, esista, unico punto multiplo, un nodo ordinario K.

Se μ è un intero positivo soddisfacente alla condizione:

$$\binom{\mu + r}{r} \geqslant m\mu ,$$

la curva C_m possiede:

$$\tfrac{1}{2} m\mu (m\mu - 3)$$

coppie (U_i, V_i) di punti distinti con la proprietà che per ciascun punto di ogni coppia passano forme di S_r d'ordine μ[6]*) aventi con C_m un contatto $(m\mu - 1)$-punto nell'ulteriore punto della stessa coppia.*

Siano $\Phi_\mu^{(1)}$ e $\Phi_\mu^{(2)}$ due forme d'ordine μ[6]*) (sempre assegnabili: ed anzi generalmente in infiniti modi) che abbiano in K un contatto $(m\mu - 1)$-punto la prima con l'uno e la seconda con l'altro dei due rami di C_m uscenti da K.*

Si verifica allora che, entro il fascio determinato da $\Phi_\mu^{(1)}$ e $\Phi_\mu^{(2)}$, la forma di esso contenente uno dei due punti di ciascuna delle coppie (U_i, V_i) contiene necessariamente anche l'altro.

Fissato poi ad arbitrio su C_m un punto semplice P, vi sono $m\mu - 1$ punti P_j $(j = 1,2,\ldots, m\mu - 1)$ in ognuno dei quali ha luogo un contatto $(m\mu - 1)$-punto fra C_m e (almeno) una forma d'ordine μ[6]*) passante per P.*

Se $m\mu$ è pari, per gli $m\mu$ punti $P, P_1, P_2, \ldots, P_{m\mu-1}$ si può sempre condurre qualche forma Φ_μ d'ordine μ[6]*): e i quattro punti di due qualsiansi delle coppie (U_i, V_i) appartengono insieme ad una forma della rete individuata da $\Phi_\mu^{(1)}$, $\Phi_\mu^{(2)}$, Φ_μ.*

---

[6]) Trattasi, beninteso, di forme non contenenti la curva C_m (Non identiche, nè composte, con la C_3 se $r = 2$ e quindi $m = 3$).

11. Come corollario della proposizione precedente (applicata nelle ipotesi: $m = r + 1 = n$, $\mu = 1$), e a complemento dei due teoremi del n. 7, giova rilevare che:

Le corde principali, il cui numero è $\frac{1}{2}n\,(n - 3)$, *di una curva razionale d'ordine* $n > 3$, *appartenente ad uno spazio* S_{n-1} *e dotata di un nodo ordinario* K, *son tutte incidenti allo spazio* S_{n-3} *intersezione degli iperpiani osculatori in* K *ai due rami della curva che escono da* K: *ed anzi, se* n *è pari, ad uno spazio* S_{n-4} *subordinato di tale* S_{n-3}[7]).

---

[7]) E costruibile segando l'S_{n-3} medesimo con l'iperpiano congiungente un generico punto P della curva coi punti di contatto degli iperpiani per P osculatori altrove ad essa.

(Eingegangen den 8. Oktober 1939.)