

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 12 (1939-1940)

**Artikel:** Sulle involuzioni di ordine  $n$  e specie  $n-1$  in un campo binario.  
**Autor:** Longhi, Ambrogio di  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-12800>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Sulle involuzioni di ordine $n$ e specie $n-1$ in un campo binario

Di AMBROGIO LONGHI, Lugano

Il presente articolo ha lo scopo di porre in rilievo alcune semplici proprietà di ogni serie lineare  $g_n^{n-1}$  sopra una curva razionale: le quali non sembra siano state finora esplicitamente notate, benchè si prestino a varie applicazioni non prive d'interesse.

1. In un campo binario  $F$  (ente razionale  $\infty^1$ , irriducibile) abbiassi una involuzione  $I_n^{n-1}$  d'ordine  $n$  e di specie  $n-1$ : cioè una serie lineare  $g_n^{n-1}$ , senza punti fissi.

Su  $F$  esistono allora infinite coppie di elementi  $\varepsilon, \varepsilon'$  tali che il gruppo:

$$\varepsilon + (n-1)\varepsilon'$$

appartenga alla involuzione. Dato  $\varepsilon'$  resta individuato  $\varepsilon$ ; mentre, dato  $\varepsilon$ , risultano determinati  $n-1$  elementi  $\varepsilon'$ : quelli che sono  $(n-1)$ -upli per la involuzione  $I_{n-1}^{n-2}$  (di ordine  $n-1$  e specie  $n-2$ ) *residua dell'elemento  $\varepsilon$  rispetto alla  $I_n^{n-1}$* , ossia costituita dai gruppi di  $I_n^{n-1}$  passanti per  $\varepsilon$  e privati dell'elemento  $\varepsilon$  stesso.

Gli elementi  $\varepsilon$  ed  $\varepsilon'$ , supposti variabili, riescono quindi omologhi in una corrispondenza  $(1, n-1)$ ; la quale, se  $n > 2$ , non è simmetrica e possiede pertanto:

$$\frac{1}{2}[1 + (n-1)^2 - n] = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

coppie di elementi corrispondentisi in doppio modo. Dunque:

*Una involuzione d'ordine  $n > 2$  e di specie  $n-1$ , entro un campo binario, ammette  $\binom{n-1}{2}$  coppie di elementi caratterizzate dalla proprietà che ciascun elemento di una tal coppia è  $(n-1)$ -uplo per un gruppo della involuzione il quale contiene anche l'altro elemento della stessa coppia<sup>1)</sup>.*

Per brevità, siffatte coppie di elementi si chiameranno *le coppie principali* della involuzione.

---

<sup>1)</sup> Per un teorema generale, di cui questo è caso particolarissimo, vedasi: *F. Severi, Sopra alcune singolarità delle curve di un iperspazio* [Memorie della R. Accademia di Torino, 51 (2), 1902], n. 3, ultima nota.

2. In uno spazio  $S_n$ , di dimensione  $n > 2$ , una curva razionale normale  $C_n$  sia sostegno di una involuzione  $I_n^{n-1}$ . I gruppi della  $I_n^{n-1}$  si possono allora ottenere segando  $C_n$  con gl'iperpiani passanti per un certo punto  $O$ , non situato su  $C_n$  <sup>2)</sup>.

Detto  $P$  un punto generico di  $C_n$ , la retta  $OP$  è incidente ad  $n - 1$  spazi  $S_{n-2}$  osculatori a  $C_n$  in altrettanti punti  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  diversi da  $P$ : che sono i punti  $(n - 1)$ -upli della involuzione  $I_{n-1}^{n-2}$  residua (n. 1) di  $P$  rispetto alla  $I_n^{n-1}$ .

Al variare di  $P$  su  $C_n$ , il gruppo:

$$G_n = P + \sum_{i=1}^{n-1} P_i \quad ,$$

che può dirsi *relativo* al punto  $P$ , descrive una serie algebrica  $\gamma_n^1$  d'ordine  $n$ ; e di indice 2: infatti, i soli gruppi di  $\gamma_n^1$  che contengono  $P$  sono il  $G_n$  relativo (nel senso suddetto) a  $P$ , e l'altro analogamente relativo al punto ulteriore intersezione di  $C_n$  con l'iperpiano per  $O$  e per l' $S_{n-2}$  osculatore a  $C_n$  in  $P$ .

Ne segue che l'iperpiano  $\pi$  congiungente i punti del gruppo variabile  $G_n$  di  $\gamma_n^1$ , essendo in generale privo di contatti con  $C_n$ , deve involuppare un cono quadrico  $V_{n-1}^2$ .

È poi noto <sup>3)</sup> che  $\pi$  corrisponde al punto  $O$  in una correlazione involutoria singolare (col punto fondamentale  $P$ ): precisamente in un sistema nullo o polare secondochè  $n$  è pari o dispari. Nel primo caso l'iperpiano variabile  $\pi$  passa quindi sempre per  $O$ ; mentre nel secondo l'appartenenza di  $O$  a  $\pi$  non si verifica che due volte (quando cioè  $\pi$  viene a coincidere con uno dei due iperpiani per  $O$  tangenti al cono  $V_{n-1}^2$ ). Pertanto:

*Data in un campo binario una involuzione  $I_n^{n-1}$  d'ordine  $n > 2$  e di specie  $n - 1$ , gli  $\infty^1$  gruppi costituiti ciascuno da un elemento  $\varepsilon$  e dagli elementi  $(n - 1)$ -upli della involuzione  $I_{n-1}^{n-2}$  residua (n. 1) di  $\varepsilon$  rispetto a  $I_n^{n-1}$ , riempiono una serie algebrica  $\gamma_n^1$  d'ordine  $n$  e di indice 2: la quale è totalmente contenuta nella  $I_n^{n-1}$  quando  $n$  è pari, mentre ha due soli gruppi <sup>4)</sup> in comune con la  $I_n^{n-1}$  quando  $n$  è dispari.*

Tale serie  $\gamma_n^1$  si dirà *inerente* alla involuzione  $I_n^{n-1}$ .

<sup>2)</sup> E neppure sopra alcuno spazio  $S_k$  osculatore a  $C_n$  di dimensione  $k < n - 1$ : se, come è sempre da sottintendere nel seguito, la involuzione  $I_n^{n-1}$  ha i suoi  $n$  elementi  $n$ -upli tutti distinti.

<sup>3)</sup> A. Brambilla, *Intorno alle curve razionali in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni.* (Rend. del R. Istituto Lombardo, 19 (2), 1886).

<sup>4)</sup> È subito visto che, nell'ipotesi (sempre sottintesa) di cui alla nota <sup>2)</sup>, tali due gruppi sono distinti.

3. L'involuzione coniugata alla  $I_n^{n-1}$  riducendosi al gruppo dei punti  $n$ -upli di  $I_n^{n-1}$ , la polare mista, rispetto a tal gruppo, di  $n - 1$  qualsiasi fra gli  $n$  punti (distinti o no) di ogni gruppo della  $I_n^{n-1}$  è il rimanente punto del gruppo stesso. Ne consegue che:

Detto  $U_n$  il gruppo degli  $n$  elementi  $n$ -upli di una involuzione  $I_n^{n-1}$  entro un campo binario, le  $\binom{n-1}{2}$  coppie principali (n. 1) di  $I_n^{n-1}$  sono le coppie di elementi appartenenti ciascuno al (primo) gruppo polare dell'altro rispetto a  $U_n$ .

E la serie  $\gamma_n^1$  inerente (n. 2) ad  $I_n^{n-1}$  è quella descritta dal gruppo somma di un elemento variabile del campo col suo (primo) gruppo polare rispetto a  $U_n$ .

4. Il cono  $V_{n-1}^2$ , introdotto al n. 2, avrà per vertice un certo spazio  $S_{n-3}^*$  ad  $n - 3$  dimensioni. Segando allora con gl'iperpiani della stella di centro  $S_{n-3}^*$  la curva  $C_n$ , si ottiene su questa una involuzione di 2<sup>a</sup> specie  $I_n^2$ : la quale è la serie lineare di dimensione minima fra tutte quelle d'ordine  $n$  che contengono la serie algebrica  $\gamma_n^1$ , d'indice 2, inerente (n<sup>1</sup> 2, 3) alla involuzione  $I_n^{n-1}$ . Si può aggiungere che, se  $n$  è pari, in  $S_{n-3}^*$  trovasi il punto  $O$  (n. 2): onde la  $I_n^2$  è contenuta nella  $I_n^{n-1}$ .

Siano ora  $P$  e  $P'$  due punti di  $C_n$  costituenti una coppia principale (n<sup>1</sup> 1, 3) della involuzione  $I_n^{n-1}$ . Ciò significa che entrambi i gruppi:

$$P + (n - 1)P' \quad , \quad P' + (n - 1)P$$

fanno parte di  $I_n^{n-1}$ , ossia giacciono ciascuno in un iperpiano per  $O$ . Ne deriva che gli spazi ad  $n - 2$  dimensioni osculatori a  $C_n$  in  $P$  e in  $P'$  incontrano rispettivamente la retta  $OP'$  e la  $OP$ ; quindi per i punti  $P$ ,  $P'$  passano ad un tempo due gruppi della serie  $\gamma_n^1$  inerente (n<sup>1</sup> 2, 3) alla involuzione  $I_n^{n-1}$ : il  $G_n$  relativo a  $P$  (nel senso precisato al n. 2), e il  $G'_n$  analogo relativo a  $P'$ .

Importa osservare che i gruppi  $G_n$  e  $G'_n$  non possono coincidere: diversamente esisterebbero punti di  $C_n$  (distinti da  $P$  e da  $P'$ ) con lo spazio  $S_{n-2}$  ivi osculatore appoggiantesi, altrove che in  $O$ , alle due rette  $OP$ ,  $OP'$ ; e la curva  $C_n$ , contro l'ipotesi che sia normale, apparterrebbe all'iperpiano ( $OS_{n-2}$ ).

Siccome  $G_n$  e  $G'_n$  sono pure gruppi della involuzione  $I_n^2$  in cui la serie  $\gamma_n^1$  è contenuta, ne discende che i punti  $P$  e  $P'$  offrono una sola condizione ai gruppi di  $I_n^2$  obbligati ad includerli: cioè formano una coppia *neutra* per la  $I_n^2$ . Riassumendo:

Le  $\binom{n-1}{2}$  coppie principali (n<sup>1</sup> 1, 3) di una involuzione  $I_n^{n-1}$ , con  $n > 2$ ,

entro un campo binario, sono tutte neutre per una stessa involuzione  $I_n^2$ : contenuta o no totalmente nella  $I_n^{n-1}$  secondo che  $n$  è pari o dispari, ed individuata da tre generici gruppi della serie  $\gamma_n^1$  (cui la  $I_n^2$  sempre contiene) inerente (n° 2, 3) alla  $I_n^{n-1}$ .

5. Nel teorema del n. 4 suppongasi  $n$  dispari. La involuzione  $I_n^2$  non è allora contenuta nella  $I_n^{n-1}$ ; però ha comuni con questa  $\infty^1$  gruppi che costituiscono un'involuzione di prima specie  $I_n^1$ : fra i quali, due appartenenti alla serie  $\gamma_n^1$  (n. 2). Poichè ogni coppia neutra per la  $I_n^2$  è tale anche per la  $I_n^1$ , si conclude:

*Quando  $n$  è dispari, le  $\binom{n-1}{2}$  coppie principali (n° 1, 3) di una involuzione  $I_n^{n-1}$  in un campo binario, son tutte neutre per una medesima involuzione  $I_n^1$  totalmente contenuta nella  $I_n^{n-1}$ : ed individuata dai due gruppi che l'involuzione  $I_n^{n-1}$  ha in comune con la serie  $\gamma_n^1$  ad essa inerente (n° 2, 3).*

6. Sia  $J_n^{n-1}$  una seconda involuzione d'ordine  $n$  e di specie  $n - 1$  col medesimo sostegno della  $I_n^{n-1}$ . La serie  $\gamma_n^1$  inerente (n° 2, 3) a  $I_n^{n-1}$ , essendo d'indice 2, ha due suoi gruppi (se non tutti) appartenenti alla  $J_n^{n-1}$ : e per la involuzione  $I_n^1$  da questi determinata, la quale può considerarsi estratta dalla  $I_n^2$  che contiene la  $\gamma_n^1$  (n. 4), è neutra ogni coppia principale (n° 1, 4) di  $I_n^{n-1}$ . Dunque:

*Date genericamente, in uno stesso campo binario, due diverse involuzioni d'ordine  $n$  e di specie  $n - 1$ , le  $\binom{n-1}{2}$  coppie principali (n° 1, 3) di una qualunque di esse son tutte neutre per una medesima involuzione d'ordine  $n$  e di prima specie contenuta nell'altra: e individuata dai due gruppi che questa ha comuni con la serie  $\gamma_n^1$  inerente (n° 2, 3) alla prima involuzione.*

7. Passando ad alcune applicazioni dei teoremi precedenti, si consideri anzitutto una curva razionale  $\Gamma_n$ , d'ordine  $n$ , appartenente allo spazio  $S_{n-1}$ , e la involuzione  $I_n^{n-1}$  costituita dalle sue sezioni iperpiane.

I due punti di una coppia principale (n. 1) di  $I_n^{n-1}$  giacciono ciascuno sull'iperpiano osculatore a  $\Gamma_n$  nell'altro: onde la retta che li unisce è una corda principale di  $\Gamma_n$ .

Un gruppo generico della serie  $\gamma_n^1$  inerente (n. 2) alla  $I_n^{n-1}$  consta di un punto  $P$  di  $\Gamma_n$  e dei punti di contatto degli  $n - 1$  iperpiani uscenti da  $P$  ed osculatori altrove a  $\Gamma_n$ .

Se infine si osserva che un'involuzione  $I_n^k$  contenuta nella  $I_n^{n-1}$  è necessariamente staccata su  $\Gamma_n$  dalla totalità degli iperpiani condotti per un certo spazio  $S_{n-k-2}$  (subordinato a  $S_{n-1}$ ), e che sopra una retta incidente

a questo spazio debbono stare i punti di ogni coppia neutra per la  $I_n^k$ , dal teorema del n. 4 segue subito che *quando  $n$  è pari, le  $\binom{n-1}{2}$  corde principali della curva  $\Gamma_n$  sono tutte incidenti ad un determinato spazio  $S_{n-4}$ : come è già noto<sup>5)</sup>.*

Nuovo sembra invece, e non meno interessante, il seguente teorema, a cui conduce quello del n. 5:

*Quando  $n$  è dispari, sopra una generica curva razionale  $\Gamma_n$  d'ordine  $n > 3$ , appartenente ad uno spazio  $S_{n-1}$ , esistono due punti,  $P_1$  e  $P_2$ , tali che gli  $n - 1$  iperpiani per  $P_i$ , osculatori altrove a  $\Gamma_n$ , hanno i loro punti di contatto situati con  $P_i$  in un iperpiano  $\pi_i$  ( $i = 1, 2$ ).*

*I due (distinti) iperpiani  $\pi_1$  e  $\pi_2$  si segano in uno spazio  $S_{n-3}$ : e a questo spazio sono incidenti tutte le  $\binom{n-1}{2}$  corde principali di  $\Gamma_n$ .*

8. Applicando il risultato del n. 6 alla curva  $\Gamma_n$  (n. 7), nell'ipotesi che una delle due involuzioni da considerarsi su  $\Gamma_n$  vi sia staccata dagli iperpiani dello spazio ambiente, si perviene al teorema:

*Data sopra una curva razionale  $\Gamma_n$ , d'ordine  $n$  e appartenente ad uno spazio  $S_{n-1}$ , una involuzione  $I_n^{n-1}$  di grado  $n$  e specie  $n - 1$  (che non sia quella delle sezioni iperpiane se  $n$  è pari), tutte le  $\binom{n-1}{2}$  corde congiungenti ciascuna i punti di una sua coppia principale ( $n^1 1, 3$ ) si appoggiano ad uno stesso spazio  $S_{n-3}$ : intersezione dei due iperpiani secanti  $\Gamma_n$  in gruppi della serie  $\gamma_n^1$  inerente ( $n^1 2, 3$ ) a  $I_n^{n-1}$ .*

Sotto altra forma il teorema può così enunciarsi:

*Sulla curva razionale  $\Gamma_n$  dello spazio  $S_{n-1}$  sia fissato un gruppo  $U_n$  di  $n$  punti distinti: che non coincida con quello dei punti di contatto degli iperpiani osculatori stazionari se  $n$  è pari.*

*La curva  $\Gamma_n$  possiede allora  $\binom{n-1}{2}$  coppie di punti  $(A_i, B_i)$  caratterizzate dalla proprietà che ciascun punto di ogni coppia appartiene al (primo) gruppo polare dell'altro rispetto a  $U_n$ ; e possiede pure due certi punti  $P_1, P_2$  tali che gli  $n - 1$  punti costituenti il (primo) gruppo polare di  $P_j$  rispetto a  $U_n$  giacciono con  $P_j$  in un iperpiano  $\pi_j$  ( $j = 1, 2$ ).*

*Orbene: le  $\binom{n-1}{2}$  corde  $A_i B_i$  sono tutte incidenti allo spazio  $S_{n-3}$  intersezione di  $\pi_1$  con  $\pi_2$ .*

---

<sup>5)</sup> L. Berzolari, Estensione di un teorema di Bertini-Laguerre (Boll. Unione Mat. Italiana, XII, 1933).

9. In uno spazio qualsiasi si consideri una curva razionale, ed un sistema lineare di forme staccanti su di essa i gruppi di una involuzione  $I_n^{n-1}$ . Le proprietà derivanti per questa dalle proposizioni dei n° 4 e 5 conducono all'enunciato:

*Una curva razionale irriducibile  $C$ , con qualunque singolarità, appartenga allo spazio  $S_r$  ad  $r$  dimensioni; e sia  $\Sigma$ , in  $S_r$ , un sistema lineare  $\infty^{n-1}$  di forme: una variabile delle quali non contenga mai  $C$ , ed intersechi  $C$  (oltre che in eventuali punti fissi) in  $n$  punti variabili.*

*La curva  $C$  non possenga punti multipli che non siano punti base di  $\Sigma$ .*

*Su  $C$  esistono allora  $\binom{n-1}{2}$  coppie  $(X_i, Y_i)$  di punti distinti, tali che per ciascun punto di ogni coppia passa una forma di  $\Sigma$  avente con  $C$  un contatto di ordine  $n - 2$  nell'altro punto della stessa coppia.*

*Un punto  $P$  di  $C$  giace in  $n - 1$  forme di  $\Sigma$ , ognuna delle quali abbia con  $C$  un contatto d'ordine  $n - 2$  in un punto  $P_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n - 1$ ).*

*Se  $n$  è pari, i punti  $P, P_1, \dots, P_{n-1}$  stanno assieme in una forma di  $\Sigma$ : che varia entro una certa rete al variare di  $P$  su  $C$ ; e i quattro punti di due qualsiansi delle coppie  $(X_i, Y_i)$  appartengono sempre ad una medesima forma di questa rete.*

*Se  $n$  è dispari, solo quando  $P$  viene a coincidere con due particolari punti  $P^{(1)}, P^{(2)}$  di  $C$ , accade che gli  $n$  punti  $P \equiv P^{(k)}, P_1, \dots, P_{n-1}$  sono insieme situati sopra una forma  $F_k$  di  $\Sigma$  ( $k = 1, 2$ ): e per entrambi i punti di ciascuna delle coppie  $(X_i, Y_i)$  passa una forma del fascio individuato da  $F_1, F_2$ .*

10. Una curva razionale  $C_m$  d'ordine  $m$  appartenga ad uno spazio  $S_r$  e non possenga altri punti multipli che un nodo  $K$ . Le forme di  $S_r$  d'ordine  $\mu$  abbastanza elevato, che passano per  $K$  e per  $m\mu - 1$  ulteriori punti di  $C_m$ , contengono allora necessariamente l'intera curva (supposta irriducibile): la quale ha quindi per tali forme la postulazione  $m\mu$ . Ne deriva che le forme stesse segano su  $C_m$  una involuzione  $I_{m\mu}^{m\mu-1}$ .

Fra le coppie principali (n° 1, 3) della  $I_{m\mu}^{m\mu-1}$ , una ha entrambi i suoi punti coincidenti nel nodo  $K$  di  $C_m$ ; mentre le rimanenti:

$$\binom{m\mu-1}{2} - 1 = \frac{1}{2} m\mu (m\mu - 3)$$

constano di punti distinti.

Chiamisi  $K_1$  o  $K_2$  il punto  $K$  secondo che esso si ritenga sull'uno o sull'altro dei due rami di  $C_m$  con l'origine in  $K$ .

Per un punto  $P$  di  $C_m$  passano  $m\mu - 1$  gruppi dell'involuzione  $I_{m\mu}^{m\mu-1}$  costituiti ciascuno da  $P$  e da un punto  $P_i$  ( $m\mu - 1$ )-uplo ( $i = 1, 2, \dots$ ,

$m\mu - 1$ ): ed è subito visto che quando  $P$  tende a  $K_1$  (a  $K_2$ ), ogni punto  $P_i$  tende a  $K_2$  (a  $K_1$ ). Infatti l'involuzione  $I_{m\mu-1}^{m\mu-2}$  residua (n. 1) ad esempio di  $K_1$  rispetto alla  $I_{m\mu}^{m\mu-1}$  ha un punto fisso in  $K_2$ : il quale assorbe tutti gli  $m\mu - 1$  punti  $(m\mu - 1)$ -upli di  $I_{m\mu-1}^{m\mu-2}$ ; giacchè, tolto  $K_2$  dai gruppi di tale involuzione, resta una  $I_{m\mu-2}^{m\mu-2}$  con nessun punto  $(m\mu - 1)$ -uplo.

Ne consegue che i due gruppi di  $I_{m\mu}^{m\mu-1}$  individuati dall'averne un punto  $(m\mu - 1)$ -uplo l'uno in  $K_1$  e l'altro in  $K_2$  son due particolari gruppi della serie descritta dal gruppo:

$$P + \sum_{i=1}^{m\mu-1} P_i$$

al variare di  $P$ : cioè della serie inerente (n<sup>o</sup> 2, 3) alla involuzione  $I_{m\mu}^{m\mu-1}$ .

In base ai teoremi dei n<sup>o</sup> 4 e 5 si può pertanto enunciare:

*Sopra una curva razionale  $C_m$  d'ordine  $m$ , irriducibile e appartenente ad uno spazio  $S_r$  di dimensione  $r \geq 2$ , esista, unico punto multiplo, un nodo ordinario  $K$ .*

*Se  $\mu$  è un intero positivo soddisfacente alla condizione:*

$$\binom{\mu + r}{r} \geq m\mu,$$

*la curva  $C_m$  possiede:*

$$\frac{1}{2} m\mu (m\mu - 3)$$

*coppie  $(U_i, V_i)$  di punti distinti con la proprietà che per ciascun punto di ogni coppia passano forme di  $S_r$  d'ordine  $\mu^6$ ) aventi con  $C_m$  un contatto  $(m\mu - 1)$ -punto nell'ulteriore punto della stessa coppia.*

*Siano  $\Phi_\mu^{(1)}$  e  $\Phi_\mu^{(2)}$  due forme d'ordine  $\mu^6$ ) (sempre assegnabili: ed anzi generalmente in infiniti modi) che abbiano in  $K$  un contatto  $(m\mu - 1)$ -punto la prima con l'uno e la seconda con l'altro dei due rami di  $C_m$  uscenti da  $K$ .*

*Si verifica allora che, entro il fascio determinato da  $\Phi_\mu^{(1)}$  e  $\Phi_\mu^{(2)}$ , la forma di esso contenente uno dei due punti di ciascuna delle coppie  $(U_i, V_i)$  contiene necessariamente anche l'altro.*

*Fissato poi ad arbitrio su  $C_m$  un punto semplice  $P$ , vi sono  $m\mu - 1$  punti  $P_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m\mu - 1$ ) in ognuno dei quali ha luogo un contatto  $(m\mu - 1)$ -punto fra  $C_m$  e (almeno) una forma d'ordine  $\mu^6$ ) passante per  $P$ .*

*Se  $m\mu$  è pari, per gli  $m\mu$  punti  $P, P_1, P_2, \dots, P_{m\mu-1}$  si può sempre condurre qualche forma  $\Phi_\mu$  d'ordine  $\mu^6$ ): e i quattro punti di due qualsivolsi delle coppie  $(U_i, V_i)$  appartengono insieme ad una forma della rete individuata da  $\Phi_\mu^{(1)}, \Phi_\mu^{(2)}, \Phi_\mu$ .*

---

<sup>6)</sup> Trattasi, beninteso, di forme non contenenti la curva  $C_m$  (Non identiche, nè composte, con la  $C_3$  se  $r = 2$  e quindi  $m = 3$ ).

11. Come corollario della proposizione precedente (applicata nelle ipotesi:  $m = r + 1 = n$ ,  $\mu = 1$ ), e a complemento dei due teoremi del n. 7, giova rilevare che:

*Le corde principali, il cui numero è  $\frac{1}{2}n(n - 3)$ , di una curva razionale d'ordine  $n > 3$ , appartenente ad uno spazio  $S_{n-1}$  e dotata di un nodo ordinario  $K$ , son tutte incidenti allo spazio  $S_{n-3}$  intersezione degli iperpiani osculatori in  $K$  ai due rami della curva che escono da  $K$ : ed anzi, se  $n$  è pari, ad uno spazio  $S_{n-4}$  subordinato di tale  $S_{n-3}$ <sup>7)</sup>.*

---

<sup>7)</sup> E costruibile segnando l' $S_{n-3}$  medesimo con l'iperpiano congiungente un generico punto  $P$  della curva coi punti di contatto degli iperpiani per  $P$  osculatori altrove ad essa.

(Eingegangen den 8. Oktober 1939.)