Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 12 (1939-1940)

Artikel: Une interprétation élémentaire des théorèmes fondamentaux de M. Nevanlinna.

Autor: Blanc, Charles

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12799

Une interprétation élémentaire des théorèmes fondamentaux de M. Nevanlinna

Par Charles Blanc, Lausanne

Introduction

Les théorèmes fondamentaux de M. *Nevanlinna* concernent essentiellement le comportement du logarithme du module de fonctions méromorphes, c'est-à-dire le comportement de fonctions harmoniques en relation avec les singularités de ces fonctions. On peut se demander quelle est la propriété essentielle des fonctions harmoniques qui est alors utilisée. Nous nous proposons de montrer qu'on peut retrouver en gros les résultats de M. Nevanlinna en partant du fait bien connu qu'une fonction harmonique dans un cercle prend au centre une valeur égale à la moyenne des valeurs qu'elle prend sur le contour.

Au lieu de considérer des fonctions de points dans un plan, nous considérerons des fonctions définies aux sommets seulement d'un réseau qui sera constitué (topologiquement) par p rayons issus d'un point P_0 et par une suite infinie de cercles $C_1, C_2, \dots$ ayant ce point pour centre (le nombre entier p, qui aura toujours la même signification, jouera le rôle du 2π des formules connues sur les fonctions méromorphes).

§ 1. Fonction harmonique dans un réseau.

Soit $u(P)$ une fonction définie dans une région D du réseau (on entendra par région du réseau l'ensemble des points intérieurs d'un polygone fermé et sans point double du réseau). Soit P un point intérieur de D, et autre que P_0. On posera

$$\beta(P) = 4\,u(P) - \Sigma u(P_i)$$

la somme étant étendue aux 4 sommets P_i du réseau voisins de P; en P_0, s'il est à l'intérieur de D, on posera

$$\beta(P_0) = p\,u\,(P_0) - \Sigma u\,(P_i)$$

la somme étant étendue aux p sommets de C_1. $\beta(P)$ mesure la différence entre la valeur prise par $u(P)$ et la valeur moyenne de $u(P)$ sur les points voisins; elle exprime dans quelle mesure $u(P)$ diffère d'une fonction qui serait en chaque point égale à la moyenne des valeurs qu'elle prend aux points voisins. Si $\beta(P) = 0$, on dira que $u(P)$ est *harmonique* en P; si $\beta(P) = a > 0$ on pourra dire que P est un pôle d'ordre a, et si $\beta(P) = b < 0$, que P est un zéro d'ordre b.

Théorème d'existence: *Etant données sur C_n une fonction $f(P)$, et en P_0 et sur $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ une fonction $g(P)$, il existe une fonction $u(P)$ et une seule égale à $f(P)$ sur C_n et telle que $\beta(P) = g(P)$.*

En effet, il s'agit de déterminer les valeurs de $u(P)$ en $1 + p(n-1)$ sommets du réseau; on dispose pour cela de $1 + p(n-1)$ équations linéaires non-homogènes dont le déterminant n'est pas nul: il suffit, pour le montrer, d'établir l'existence d'un système de solutions pour un choix particulier des fonctions f et g. On prend $f = 0$ et $g = 0$ excepté en P_0 où $g = p$. On vérifie sans peine que la fonction

$$u(P) = n - k \qquad P \text{ sur } C_k$$

est alors la solution du système; le déterminant n'est donc pas nul, et la solution est bien déterminée quelles que soient f et g.

On retrouve ainsi facilement d'autres propriétés des fonctions harmoniques. Par exemple:

Soit $f(P)$ une fonction sur C_n, et soit $u(P)$ une fonction définie à l'intérieur de C_n et sur C_n, égale à $f(P)$ sur C_n. L'expression

$$\Sigma[u(P) - u(P_i)]^2$$

où la somme est étendue à tous les points P intérieurs à C_n, et pour tous les points voisins de P, atteint son minimum lorsque la fonction $u(P)$ est harmonique dans C_n.

Prenons, pour le montrer, un point P_1 et fixons la fonction $u(P)$ en tout point autre que P_1; posons $u(P_1) = x$; alors

$$\Sigma\,[u(P) - u(P_i)]^2 = A + \Sigma\,[x - u(P_1')]^2 = \lambda(x)$$

$$\lambda'(x) = 2\Sigma\,[x - u(P_1')]$$

et $\lambda'(x) = 0$ si $4x = \Sigma u(P_1')$

c'est-à-dire si $\beta(P_1) = 0$, ce qui démontre l'affirmation.

D'autre part, on montre sans peine qu'une fonction harmonique dans un domaine D d'un réseau y vérifie le principe du maximum: *elle ne peut atteindre son maximum ou son minimum qu'en un point du contour polygonal qui limite D.*

Formule de Green: Soient deux fonctions $u(P)$ et $v(P)$ définies dans et sur C_n. Appelons E_n l'ensemble des sommets du réseau situés sur les cercles C_1 à C_n et soit $E_n^* = E_n + P_0$. On a , si P est un point de E_{n-1}

$$u(P)\,\beta_v(P) - v(P)\,\beta_u(P) = 4u(P)v(P) - u(P)\,\Sigma v(P_i) \\ - 4u(P)v(P) + v(P)\,\Sigma u(P_i)$$

et en faisant la somme pour tous les points de E_{n-1}

$$\sum_{E_{n-1}} [u(P)\,\beta_v(P) - v(P)\,\beta_u(P)] = -\sum_{C_n} u(Q)v(P) + \sum_{C_n} v(Q)u(P) \\ - v(P_0)\sum_{C_1} u(P) + u(P_0)\sum_{C_1} v(P) \qquad (1)$$

où Q est le point de C_{n-1} voisin de P sur C_n. On a en outre

$$u(P_0)\,\beta_v(P_0) - v(P_0)\,\beta_u(P_0) = v(P_0)\sum_{C_1} u(P) - u(P_0)\sum_{C_1} v(P) \qquad (2)$$

d'où, en ajoutant (1) et (2),

$$\sum_{E^*{n-1}} (u\beta_v - v\beta_u) = -\sum_{C_n} [u(Q)v(P) - v(Q)u(P)]\ . \qquad (3)$$

Posons

$$\frac{\partial u}{\partial n} = u(Q) - u(P)\ ;$$

alors

$$u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} = v(Q)\,u(P) - u(Q)\,v(P)$$

et la relation (3) devient

$$\sum_{E^*_{n-1}} (u\,\beta_v - v\,\beta_u) = \sum_{C_n} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right)\ , \qquad (4)$$

que nous pouvons appeler formule de Green.

Prenons pour $v(P)$ une fonction $v(P,Q)$ égale à zéro sur C_n, avec $\beta_v(P) = 0$ excepté pour $P = Q$, pour lequel on a $\beta_v(Q) = 1$. La relation (4) devient alors

$$-\sum_{E^*_{n-1}} v(P,Q)\,\beta_u(P) + u(Q) = \sum_{C_n} u(P)\frac{\partial v(P,Q)}{\partial n}$$

d'où

$$u(Q) = \sum_{C_n} u(P)\frac{\partial v(P,Q)}{\partial n} + \sum_{E^*{n-1}} v(P,Q)\,\beta_u(P)\ .$$

Ainsi, la détermination de $u(Q)$, connaissant ses valeurs sur C_n et ses β, revient à celle de $v(P,Q)$ et de sa „dérivée normale“ sur C_n. Il y a $1+p(n-1)$ fonctions de Green $v(P,Q)$ relatives à C_n; il en résulte que le calcul de $u(Q)$ en tout point intérieur à C_n est immédiat dès que l'on possède le jeu complet des fonctions de Green dans C_n.

On remarque que $u(Q)$ est une fonction linéaire de β et de $u(P)$ sur C_n. Il en résulte qu'il existe pour l'ensemble des fonctions $u(P)$ dans C_n un théorème de décomposition vectorielle: toutes les fonctions $u(P)$ sont décomposables en une somme de $(1+pn)$ d'entre elles, linéairement indépendantes.

Proposons nous en particulier de trouver $u(P_0)$. La fonction de Green $v(P, P_0)$ est facile à calculer:

$$v(P,P_0)=\frac{n-k}{p} \qquad \text{si } P \text{ est sur } C_k$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial n}=\frac{1}{p}$$

d'où

$$u(P_0)=\frac{1}{p}\sum_{C_n} u(P)+\sum_{E^*_{n-1}}\frac{n-k}{p}\beta_u(P) \cdot$$

Posons

$$\sum_{E^*k}\beta_u(P)=\gamma(k,u) \quad , \quad \sum_0^{n-1}\gamma(k,u)=\Gamma(n-1,u) .$$

On a alors

$$pu(P_0)=\sum_{C_n}u(P)+\Gamma(n-1,u), \tag{I}$$

ce qui résout le problème. C'est l'analogue de la formule de Jensen.

§ 2. Les fonctions m, N et T.

Posons, d'une façon générale

$$\overset{+}{x}=\begin{cases} x & \text{si } x\geqslant 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases} \qquad \overset{-}{x}=\begin{cases} 0 & \text{si } x\geqslant 0\\ -x & \text{si } x<0\end{cases}$$

et soit $m(n,\overset{+}{u}) = \sum_{C_n}\overset{+}{u}(P)$, $m(n,\overset{-}{u}) = \sum_{C_n}\overset{-}{u}(P)$

$$\gamma(n-1,\overset{+}{u}) = \sum_{E^*n-1}\overset{+}{\beta}(P) , \qquad \gamma(n-1,\overset{-}{u}) = \sum_{E^*n-1}\overset{-}{\beta}(P)$$

$$N(n-1,\overset{+}{u}) = \sum_0^{n-1}\gamma(k,\overset{+}{u}) , \qquad N(n-1,\overset{-}{u}) = \sum_1^{n-1}\gamma(k,\overset{-}{u})$$

La formule (I) devient alors

$$p[\overset{+}{u}(P_0) - \overset{-}{u}(P_0)] = m(n, \overset{+}{u}) - m(n, \overset{-}{u}) + N(n-1, \overset{+}{u}) - N(n-1, u)$$

ou encore

$$m(n,\overset{+}{u}) + N(n-1,\overset{+}{u}) - p\overset{+}{u}(P_0) = m(n,\overset{-}{u}) + N(n-1,\overset{-}{u}) - p\overset{-}{u}(P_0)\ . \quad (I')$$

Posons

$$T(n, u) = m(n, \overset{+}{u}) + N(n-1, \overset{+}{u})\ ;$$

on a ainsi

$$m(n, \overset{-}{u}) + N(n-1, \overset{-}{u}) = T(n, u) - p\,u(P_0) \qquad (I'')$$

qui n'est qu'une façon d'écrire la relation (I).

$T(n, u)$ est une fonction croissante de n.

Prenons, pour le montrer, un point Q de E^*_{n-1} ; on a

$$u(Q) = \sum_{E^*{n-1}} v_n(P,Q)\,\beta_u(P) + \sum_{C_n} u(P)\,\frac{\partial v_n(P,Q)}{\partial n}\ ,$$

$v_n(P, Q)$ étant la fonction de Green dans C_n relative à Q.

Or

$$v_n(P,Q) \geqslant 0\ , \quad \frac{\partial v_n}{\partial n} \geqslant 0\ ,$$

donc

$$u(Q) = \sum_{E^*{n-1}} v_n(P,Q)\,\overset{+}{\beta}_u(P) + \sum_{C_n} \overset{+}{u}(P)\,\frac{\partial v_n(P,Q)}{\partial n}$$

$$- \sum_{E^*{n-1}} v_n(P,Q)\,\overset{-}{\beta}_u(P) - \sum_{C_n} \overset{-}{u}(P)\,\frac{\partial v_n(P,Q)}{\partial n}$$

c'est-à-dire

$$\overset{+}{u}(Q) \leqslant \sum_{E^*{n-1}} v_n(P,Q)\,\overset{+}{\beta}_u(P) + \sum_{C_n} \overset{+}{u}(P)\,\frac{\partial v_n(P,Q)}{\partial n}\ .$$

Posons

$$V_n(Q) = \sum_{E^*{n-1}} v_n(P,Q)\,\overset{+}{\beta}_u(P)\ .$$

Si Q est sur C_{n-1} , $V_{n-1}(Q) = 0$. D'autre part, l'expression

$$V_n(Q) - V_{n-1}(Q) = \sum_{E^*{n-2}} \overset{+}{\beta}_u(P)\,[v_n(P,Q) - v_{n-1}(P,Q)] + \sum_{C_{n-1}} v_n(P,Q)\,\overset{+}{\beta}_u(P)$$

est une fonction harmonique dans $E^*{}_{n-2}$, donc

$$\sum_{C_{n-1}} [V_n(Q) - V_{n-1}(Q)] = p\,[V_n(P_0) - V_{n-1}(P_0)]\ .$$

Or

$$pV_n(P_0) = N\,(n-1, \overset{+}{u})$$

$$pV_{n-1}\,(P_0) = N\,(n-2, \overset{+}{u})$$

d'où, puisque $V_{n-1} = 0$ sur C

$$\sum_{C_{n-1}} V_n(Q) = N(n-1\,, \overset{+}{u}) - N(n-2\,, \overset{+}{u})\;.$$

D'autre part, $\sum_{C_n} \overset{+}{u}(P)\,\dfrac{\partial v_n(P,Q)}{\partial n}$ est une fonction harmonique de Q dans E^*_{n-1}, donc

$$\sum_{C_{n-1}}\;\sum_{C_n} \overset{+}{u}(P)\,\frac{\partial v_n(P,Q)}{\partial n} = p\,\sum_{C_n}\overset{+}{u}(P)\,\frac{\partial v_n(P,P_0)}{\partial n}$$

or on a

$$\frac{\partial v_n(P,P_0)}{\partial n} = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \sum_{C_n} \overset{+}{u}(P) = m\,(n\,, \overset{+}{u})$$

donc

$$m\,(n-1\,, \overset{+}{u}) \leqslant N(n-1\,, \overset{+}{u}) - N(n-2\,, \overset{+}{u}) + m\,(n\,, \overset{+}{u})$$

et

$$T\,(n-1\,, u) \leqslant T\,(n\,, u)$$

c. q. f. d.

§ 3. Un théorème sur le comportement d'une fonction dans une région du réseau.

Soit D une région du réseau limitée par un polygone Π illimité dans les deux sens, et soit $u(P)$ une fonction bornée sur Π, ne possédant dans D aucun β positif. Alors on a l'alternative :

$u(P)$ ne dépasse pas dans D sa borne supérieure sur Π;

ou bien

$M(\,n, u)$ étant le maximum de u dans D sur C_n, on a

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{M(n\,,u)}{n} > 0\;.$$

On peut, sans restreindre la généralité de la démonstration, supposer que la borne supérieure de $u(P)$ sur Π est zéro. Supposons, pour commencer, que $u(P)$ n'est jamais négative en des points de D voisins de Π, et soit Γ_n la partie de C_n dans D, puis $D_n = \sum_{1}^{n} \Gamma_k$.

$$4\sum_{D_n} u(P) \leqslant 4\sum_{D_n} u(P) - \sum_{\Gamma_n} u(P) + \sum_{\Gamma_{n+1}} u(P) - \sum_{F_n} u(P)$$

F_n étant la partie de D_n qui est voisine de Π. Il en résulte que

$$\sum_{\Gamma_{n+1}} u(P) - \sum_{\Gamma_n} u(P) \geqslant \sum_{F_n} u(P) \quad .$$

Alors, deux cas peuvent se présenter:

1° Il y a une valeur n_0 de n pour laquelle $\sum_{F_{n_0}} u(P) = a > 0$, alors

$$\sum_{\Gamma_n} u(P) \geqslant (n - n_0)\, a$$

d'où la seconde éventualité de la conclusion du théorème;

2° Ou bien $\sum_{F_n} u(P) = 0$ quel que soit n; alors on peut remplacer D par une région plus petite du plan en supprimant les points de F_n; soit D' la nouvelle région, Π' sa frontière. Les hypothèses du théorème s'appliquent encore; si pour une valeur de n, $\sum_{F'_n} u(P) > 0$, la conclusion précédente s'applique, sinon on recommence; si, après un nombre fini de rétrécissements de D on obtient une expression $\sum_{F} u(P) > 0$, on peut affirmer que

$$\varliminf \frac{M(n, u)}{n} > 0$$

sinon, il en résulte que $u(P)$ n'est nulle part positif dans D.

Supposons maintenant que $u(P)$ soit négative en certains points de D voisins de Π; on remplace D par un domaine plus petit, en lui ôtant les sommets de D où $u(P) < 0$ situés à la périphérie. Alors, ou bien on ôte tous les points, et le théorème est démontré (première éventualité), ou bien on obtient un domaine D^* auquel la démonstration précédente s'applique, et la conclusion, quelle qu'elle soit, reste vraie pour D si elle l'est pour D^*.

Le théorème peut être précisé: dans la première éventualité, *si l'égalité* $u(P) = 0$ *est vérifiée en un point de* D, *elle l'est en tout point de* D. On le démontre sans peine en partant du fait que $u(P)$ n'a aucun β positif.

§ 4. Théorème A.

Il existe une solidarité entre les fonctions $u(P)$ qui ont dans E_n^* mêmes valeurs positives et mêmes pôles, de même qu'entre les fonctions $|f(z) - a|$ dans un cercle, pour toute valeur de a. C'est cette solidarité qui est énoncée dans le théorème A, analogue du premier théorème fondamental de M. Nevanlinna.

Théorème A: *Soit une fonction $u(P)$ dans E_n^*, et soit $v(P)$ une autre fonction telle que*

$$\overset{+}{v}(P) = \overset{+}{u}(P) \qquad \text{sur} \quad C_n$$

et

$$\overset{+}{\beta}_u(P) = \overset{+}{\beta}_v(P) \qquad \text{dans} \quad E^*_{n-1} .$$

Alors $\qquad m(n, \overset{-}{v}) + N(n-1, \overset{-}{v}) = T(n, u) - pv(P_0) .$

C'est une conséquence immédiate de la formule (I″) du § 2. On a en effet

$$\begin{aligned} m(n, \overset{-}{v}) + N(n-1, \overset{-}{v}) &= T(n, v) - pv(P_0) \\ &= T(n, u) - pv(P_0) . \end{aligned}$$

Il convient de remarquer qu'il suffit de supposer l'égalité de v et de u sur C_n pour que la conclusion soit vraie. Dans la suite, nous aurons à considérer des fonctions qui auront mêmes valeurs positives *dans tout le réseau*, hypothèse plus forte que nous n'avions pas à faire ici.

Si une fonction $u(P)$ définie dans tout le réseau est telle que $T(n, u)$ est bornée, alors $u(P)$ est constante.

En effet, si T est borné, $\beta_u(P)$ doit être constamment nul. Donc

$$\sum_{C_n} u(P) = pu(P_0) .$$

Posons $\qquad u^*(P) = u(P) - u(P_0) .$

Supposons que $u^*(P)$ n'est pas identiquement nul: il existe alors un point A où $u^*(A) < 0$, et en vertu du fait qu'une fonction harmonique ne peut avoir de minimum, il existe un chemin Π, issu de A et s'éloignant indéfiniment, sur lequel $u^*(P) < 0$. En appliquant à ce chemin, pris deux fois, le théorème du § 3, en remarquant que $M(n, u)$ est borné, on voit que $u^*(P)$ est négatif dans tout le plan, donc $u^*(P_0) < 0$, ce qui est contradictoire. Donc il n'y a aucun point où $u^*(P)$ est négatif, et $u(P)$ se réduit à une constante.

On peut remarquer que $u(P)$ sera encore une constante si

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{T(n, u)}{n} = 0 .$$

Prenons en particulier une fonction $u(P)$ bornée dans tout le réseau et telle que $\beta(P)$ ne soit jamais positif. Alors

$$T(n, u) = m(n, \overset{+}{u}) + N(n-1, \overset{+}{u}) < K$$

$T(n, u)$ étant bornée, $u(P)$ est donc constante:

Si une fonction est bornée dans tout le réseau, et si elle ne possède aucun β positif, elle se réduit à une constante.

§ 5. Relations entre les fonctions m et N.

Le théorème A marque la solidarité qui existe entre toutes les fonctions ayant mêmes β positifs et mêmes valeurs positives sur C_n ; il donne alors *exactement* la relation qui lie la valeur à l'origine et la fonction caractéristique T. Il est nécessaire, pour obtenir une relation entre les fonctions m et N d'une famille de q fonctions u_i, de faire des hypothèses plus restrictives sur cette famille.

Appelons *dérivée* de la fonction $u(P)$ toute fonction $v(P)$, telle que l'on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m[n, \overset{+}{(v-u)}]}{T(n, u)} = 0$$

et, en tout point

$$\overset{+}{\beta}_v(P) \leqslant 2\overset{+}{\beta}_u(P) .$$

On dira d'autre part qu'une famille de $q+1$ fonctions $u_1, \ldots, u_q, v$ forme un *agrégat* si

1° $\overset{+}{u}_i(P) = \overset{+}{u}_1(P)$;

2° $\overset{+}{\beta}_{u_i}(P) = \overset{+}{\beta}_{u_1}(P)$;

3° Il existe un nombre $K > 0$ tel que, en tout point P, il y a un indice i au plus avec

$$-u_i(P) > K ;$$

4° La fonction $v(P)$ est une dérivée pour toutes les fonctions $u_i(P)$.

Nous allons démontrer le théorème:

Théorème B: *Soit un agrégat de fonctions $u_1, \ldots, u_q, v$. Alors*

$$(q-1)\,T(n, u_1) < \sum_1^q N(n-1, \overset{-}{u}_i) + N(n-1, \overset{+}{u}_1) - N_1(n, v) + \alpha(n)$$

où

$$\lim \frac{\alpha(n)}{T(n, u_1)} = 0$$

et

$$N_1(n, v) = N(n-1, \overset{-}{v}) + 2N(n-1, \overset{+}{u}_1) - N(n-1, \overset{+}{v}) \geqslant 0 .$$

Posons, pour celà,

$$w = \overset{+}{u}_1 - \max \overset{-}{u}_i$$

et soit γ_i l'ensemble des sommets de C_n où $u_i < -K$. Les ensembles γ_i n'empiètent pas, donc

$$m(n,\overset{-}{w}) > \sum_i \sum_{\gamma_i} \overset{-}{u}_i \ ;$$

or

$$m(n,\overset{-}{u}_i) = \sum_{C_n} \overset{-}{u}_i = \sum_{\gamma_i} \overset{-}{u}_i + \sum_{C_n-\gamma_i} \overset{-}{u}_i \qquad < \sum_{\gamma_i} u_i + pK \ ,$$

d'où

$$m(n,\overset{-}{w}) > \sum_i m(n,\overset{-}{u}_i) - pqK \ .$$

D'autre part, on a, si $\quad u_i(P) < 0$

$$\begin{aligned} \overset{-}{w} &= \max \overset{-}{u}_i \\ &\leqslant - u_i + (u_1 - v) + (v + \max \overset{-}{u}_i) \\ &= - u_i + (u_1 - v) + (v - \min u_i) \end{aligned}$$

$$m(n,\overset{-}{w}) \leqslant m(n,\overset{-}{u}_1) + m(n,\ (u_1 \overset{+}{-} v)) + m(n,(v - \overset{+}{\min}\, u_i)) \ .$$

Et

$$m(n,\overset{-}{u}_1) = m(n,\overset{+}{u}_1) + N(n-1,\overset{+}{u}_1) - N(n-1,\overset{-}{u}_1) - pu_1(P_0) \ .$$

$$\begin{aligned} m(n,(u_1 \overset{+}{-} v)) &= m(n,(v \overset{+}{-} u_1)) + N(n-1,(u_1 \overset{-}{-} v)) - \\ &\qquad - N(n-1\ ,\ (u_1 \overset{+}{-} v)) - pv(P_0) + pu_1(P_0) \\ &= m(n,(v \overset{+}{-} u_1)) + N(n-1,\overset{+}{v}) - N(n-1,\overset{-}{v}) \\ &\quad + N(n-1,\overset{-}{u}_1) - N(n-1,\overset{+}{u}_1) - pv(P_0) + pu_1(P_0) \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m(n,\overset{-}{w}) \leqslant\ & 2\ T(n,u_1) + m(n,(v - \overset{+}{u}_1)) + m(n,(v - \overset{+}{\min}\, u_i)) \\ & - m(n,\overset{+}{u}_1) - N_1(n,v) - pv(P_0) \end{aligned}$$

où

$$N_1(n,v) = N(n-1,\overset{-}{v}) + 2\,N(n-1,\overset{+}{u}_1) - N(n-1,\overset{+}{v}) \geqslant 0$$

et

$$m(n,(v - \overset{+}{\min}\, u_i)) \leqslant \sum_1^q m(n,(v \overset{+}{-} u_i)) \ ;$$

donc

$$\sum_1^q m(n,\overset{-}{u}_1) - pqK < 2\ T(n,u_1) - N_1(n,v) - m(n,\overset{+}{u}_1) + \alpha(n)$$

avec

$$\lim \frac{\alpha(n)}{T(n,\ u_1)} = 0 \ ;$$

d'où, en ajoutant dans les deux membres

$$\sum_1^q N(n-1, \bar{u}_i) + N(n-1, \overset{+}{u}_1) ,$$

$$(q+1)\, T(n,u_1) - \sum_1^q u_i(P_0) - pqK < 2\, T(n,u_1) - N_1(n,v) +$$

$$+ \sum_1^q N(n-1, \bar{u}_i) + N(n-1, \overset{+}{u}_1) + \alpha(n)$$

puis

$$(q-1)\; T(n,u_1) < \sum_1^q N(n-1, \bar{u}_i) + N(n-1, \overset{+}{u}_1) - N_1(n,v) + \alpha(n) ,$$

en ajoutant à $\alpha(n)$ des termes négligeables par rapport à $T(n\, ,\, u_1)$.

On tire sans peine du théorème B des propositions analogues au théorème de Picard:

Si deux fonctions harmoniques dans tout le réseau forment un agrégat, elles se réduisent à des constantes.

En effet, si l'on appelle u_1 et u_2 ces deux fonctions, il résulte du théorème B que $T(n\, ,\, u_1)$ est bornée dans tout le réseau, donc que u_1 et u_2 sont des constantes.

Ou encore:

Si trois fonctions formant un agrégat ne possèdent aucun β négatif, elles se réduisent à des constantes.

La démonstration est immédiate.

§ 6. Conclusion.

On pourrait poursuivre encore longtemps ce jeu d'analogies; ce n'est pas là notre but. Il s'agirait bien plutôt de montrer que les considérations précédentes permettent de fonder une théorie de fonctions plus générales que les fonctions méromorphes; conjointement, il est probablement possible de définir certaines variétés, généralisant les surfaces de Riemann dans le sens de la quasi-conformité et au sujet desquelles les mêmes problèmes se posent que pour les surfaces de Riemann (problème du type); or, sur ces variétés, l'étude d'une fonction sur les sommets d'un réseau de points suffit pour connaître les propriétés globales de cette fonction; c'est ce qui nous a conduit à entreprendre cette étude préliminaire.

(Reçu le 11 août 1939.)