Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 12 (1939-1940)

Artikel: Einlagerung des regulären n-Simplex in den n-dimensionalen Würfel.

Autor: Gruner, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-12798

Einlagerung des regulären n-Simplex in den n-dimensionalen Würfel

Von W. GRUNER, Bern

Ein reguläres n-Simplex soll in einen n-dimensionalen Würfel *eingelagert* genannt werden, wenn seine Ecken einen Teil der Ecken des Würfels bilden.

Das Problem, welches hier untersucht werden soll, besteht darin, die Zahlen n zu charakterisieren, für welche eine solche Einlagerung im R_n möglich ist. Bekanntlich kann ja ein Tetraeder in einen Würfel eingelagert werden; dagegen ist das Analogon im zweidimensionalen Fall unmöglich.

Coxeter[4]) *) zeigte, daß dieses Problem einem Problem aus der Matrizen- und Determinantentheorie äquivalent ist. In dieser Fassung lautet das Problem folgendermaßen: Für welche Grade m läßt sich eine orthogonale Matrix konstruieren, deren Elemente lauter ± 1 sind? Das Resultat von Coxeter über die Beziehung zwischen Dimension n des Einlagerungsraumes und Grad m der orthogonalen Matrix lautet dann: $m = n + 1$. Im folgenden sollen die Bezeichnungen m und n stets auf den Grad der Matrizen bzw. auf die Dimension des Einlagerungsraumes angewandt werden.

Zweck dieser Arbeit soll zunächst eine Zusammenstellung der bisherigen Ergebnisse sein. Ferner soll für gewisse Fälle die spezielle Struktur der Einlagerung geometrisch interpretiert werden. Schließlich soll noch ein bisher unbekannter Fall einer Einlagerungsmöglichkeit aufgezeigt werden.

Der erste, welcher obiges Problem, allerdings in der Matrixfassung aufstellte, war Hadamard[1]), der solche Matrizen benötigte, um Beispiele von Determinanten zu geben, die den von ihm angegebenen Maximalwert erreichen. Als notwendige Bedingung für die Existenz orthogonaler Matrizen mit Elementen ± 1 zeigte er, daß, abgesehen von den trivialen Fällen $m = 1$ und $m = 2$, m immer durch 4 teilbar sein muß. Für unser Einlagerungsproblem besagt dies, daß, vom Fall $n = 1$ abgesehen, n immer $\equiv 3 \pmod 4$ sein muß. Da es bis jetzt nicht gelang schärfere Bedingungen aufzustellen, so liegt die Vermutung nahe, daß sie auch hinreichend sind.

Was man bis jetzt bezüglich der hinreichenden Bedingungen weiß, ist

*) Die Nummern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis.

alles in einer Arbeit von Paley[3]) dargestellt. Einige dieser Ergebnisse sind schon früher[5]) bekannt gewesen, jedoch nicht veröffentlicht worden.

Um die Ergebnisse einfach formulieren zu können, sollen diejenigen Grade m, für welche orthogonale Matrizen mit Elementen ± 1 existieren nach einem Vorschlag von H. Hopf[5]) H-Zahlen (Hadamard'sche Zahlen) genannt werden.

So lassen sich nun die bisher bekannten Sätze über die hinreichenden Bedingungen für H-Zahlen wie folgt einteilen:

I) Sind m_1 und m_2 H-Zahlen, so ist es auch $m_1 \cdot m_2$.

II) $p^h + 1$ ist eine H-Zahl, falls $p^h \equiv 3 \pmod 4$.

III) $2(p^h + 1)$ ist eine H-Zahl, falls $p^h \equiv 1 \pmod 4$.

IV) $p(p+1)$ ist eine H-Zahl, falls $p \equiv 3 \pmod 4$.

Mit Hilfe dieser 4 Bedingungen lassen sich sämtliche durch 4 teilbaren Zahlen $\leqq 91$ als H-Zahlen erweisen. 92 ist somit die kleinste Zahl, für die der Entscheid noch nicht gelungen ist.

Im folgenden soll der in den obigen Ergebnissen unter II) zitierte Fall näher untersucht werden. Hiezu ist es notwendig, kurz noch auf die Struktur der betreffenden konstruierten Matrix einzugehen. Es sei also $m = p^h + 1$. Nach Paley wird dann die Matrix wie folgt konstruiert: Die erste Zeile und erste Kolonne werden mit $+1$ besetzt. Den Indizes $2, 3, \ldots m$ ordne man auf irgend eine Weise die p^h Größen des Galoisfeldes $GF(p^h)$ zu. Die dem Index i zugeordnete Größe sei mit ω_i bezeichnet. Ferner werde mit $\chi(\omega)$ der quadratische Restcharakter bezeichnet, der also im Fall $h = 1$ mit dem Legendre'schen Symbol übereinstimmt. Jedoch soll $\chi(0)$ nicht gleich 0 sondern gleich -1 gesetzt werden. Dann setzen wir für das Element a_{ik} der Matrix

$$a_{ik} = \chi(\omega_i + \omega_k) \left\{ \begin{array}{l} i = 2, 3, \ldots p^h + 1 \\ k = 2, 3, \ldots p^h + 1 \end{array} \right.$$

Was hier offenbar von Wichtigkeit ist, ist die additive Gruppe des Galoisfeldes. Ihre Rolle ersieht man im Fall $h = 1$ schon rein äußerlich an der, abgesehen vom Rand, zyklischen Struktur der Matrix. Ferner ist interessant, daß die betreffende Gruppe bei der Einlagerung des Simplex in den Würfel eine gewisse geometrische Interpretation findet. Hiezu betrachten wir die den Würfel bzw. das Simplex invariant lassende Hyperoktaeder- und Simplexgruppe, beide im weiteren Sinne: d. h. Spiegelungen seien auch zugelassen. Halten wir dann eine dem Würfel und Simplex gemeinsame Ecke fest, so reduzieren sich Würfelgruppe und Simplexgruppe auf gewisse Untergruppen, die beide offenbar die Ordnung $n!$ haben und der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ isomorph sind. Man sieht aber leicht, daß sie nur im Fall $n = 3$ zusammenfallen können, da die Untergruppe der Würfelgruppe diejenigen Eckpunkte, die vom festgehaltenen Punkt den gleichen Abstand haben, wie die übrigen Eckpunkte des Simplex, transitiv unter sich permutiert. Die Anzahl dieser Punkte ist $\binom{n}{\frac{n-1}{2}}$. Die Untergruppe der Simplexgruppe hingegen permutiert nur die n übrigen Simplexeckpunkte, so daß ihr Transitivitätsgebiet n Punkte umfaßt. Nun ist aber $\binom{n}{\frac{n-1}{2}} = n$ nur dann, wenn $\frac{n-1}{2} = 1$ oder $n = 3$ ist.

So läßt sich also die Frage stellen, wie groß der Durchschnitt der beiden Gruppen ist.

Wir zeigen nun, daß dieser Durchschnitt in dem hier betrachteten Fall II die n übrigen Simplexeckpunkte transitiv unter sich permutiert.

Hiezu gehen wir zur Matrix zurück, wobei die erste Spalte fallen gelassen werden soll. Die Zeilenvektoren stellen dann gerade die Eckvektoren des Simplex dar. Als festzuhaltenden Punkt wählen wir die erste Zeile. Dann lassen sich die Elemente der Untergruppe der Würfelgruppe als Spaltenpermutationen, die Elemente der Untergruppe der Simplexgruppe als Zeilenpermutationen deuten. Da den Indizes $2, 3, \ldots, m$, die Elemente des Galoisfeldes zugeordnet sind, so entsprechen der additiven Gruppe des Galoisfeldes gewisse reguläre Permutationsgruppen sowohl der Zeilenindizes als auch der Spaltenindizes. Betrachten wir dann diese Permutationsgruppen, so folgt aus der Gestalt der Elemente $a_{ik} = \chi(\omega_i + \omega_k)$, daß diese Permutationsgruppen ausgeübt auf die Zeilen und Spalten der Matrix die gleichen Matrizen liefern. Hieraus folgt, daß der Durchschnitt der oben betrachteten Untergruppen der Würfelgruppe und der Simplexgruppe eine der additiven Gruppe des Galoisfeldes isomorphe Untergruppe enthält.

Zugleich ist aber auch gezeigt, daß dieser Durchschnitt die übrigen n Ecken des Simplex transitiv unter sich permutiert.

Außer dem bis jetzt behandelten Fall II) läßt sich nun noch ein weiterer Fall finden, dem ebenfalls eine gewisse abelsche Gruppe zugrunde liegt und der sich daher auch in gleicher Weise geometrisch interpretieren läßt. Zugleich liefert er einige neue H-Zahlen (z. B. $m = 324$).

Es ist der Fall:

V) $m = p^\alpha \cdot q^\beta + 1$, wobei $q^\beta - p^\alpha = 2$; q, p Primzahlen.

Um hier eine Matrix zu konstruieren, gehen wir vom Ring $R = G.F.(p^\alpha) \oplus G.F.(q^\beta)$ aus, der sich als direkte Summe der Galoisfelder (p^α) und (q^β) definieren läßt. Seine additive Gruppe ist die oben erwähnte abelsche Gruppe. Für die Elemente von R führen wir folgende Bezeichnung ein: $\omega = (\varphi_1, \varphi_2)$ wobei $\varphi_1 \subset G.F.(p^\alpha)$, $\varphi_2 \subset G.F.(q^\beta)$. Mit $\chi_1(\varphi_1)$ und $\chi_2(\varphi_2)$ seien die quadratischen Restcharaktere der entsprechenden Galoisfelder bezeichnet. Dann führen wir den dem Jakobischen Symbol entsprechenden Charakter ein:

$$\chi(\omega) = \chi_1(\varphi_1) \cdot \chi_2(\varphi_2) \,; \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega = (\varphi_1, \varphi_2) \\ \varphi_1 \neq 0 \\ \varphi_2 \neq 0 \end{array} \right. .$$

Ist $\left.\begin{array}{l} \omega = (0, \varphi_2) \\ \varphi_2 \neq 0 \end{array}\right\}$ so setzen wir $\chi(\omega) = -1$,

Ist aber $\left.\begin{array}{l} \omega = (\varphi_1, 0) \\ \varphi_1 \neq 0 \end{array}\right\}$ so setzen wir $\chi(\omega) = +1$,

Ist schließlich

$\omega = (0, 0)$ so setzen wir $\chi(\omega) = +1$.

Dann wird wieder nach Zuordnung der Indizes $i = 2, 3, \dots m$ zu den Größen von $R : a_{ik} = \chi(\omega_i + \omega_k)$ gesetzt.

Der Beweis der Orthogonalität stützt sich dann wie im gewöhnlichen Fall II auf die bekannte Formel für den quadratischen Restcharakter eines Galoisfeldes:

$$\sum_{\xi \subset G.F.} \chi(\xi)\, \chi(\xi + \omega) = -1 \,, \qquad \omega \neq 0 \,.$$

Diese Formel läßt sich nun für beide Galoisfelder aufstellen. Multipliziert man sie, so erhält man eine entsprechende Formel für den Ring R. Unter Berücksichtigung der Ausnahmesetzungen des Charakters für die Nullteiler von R ergibt dann diese Formel die Orthogonalitätsrelationen der Matrix.

Diese hier durchgeführte Konstruktion von Fall V) wurde unter der speziellen Annahme $\alpha = 1$, $\beta = 1$ von H. Hadwiger gefunden, dem ich überhaupt die Anregung zu dieser Arbeit verdanke.

(Eingegangen den 8. August 1939.)

LITERATURVERZEICHNIS

1) *J. Hadamard:* Bull. sci. math. (2) vol. 17 1893.
2) *U. Scarpis:* Rend. del Re. Ist. di sci. e lett. (2) vol. 31 1898.
3) *R. E. A. C. Paley:* J. of Math. Massachusetts p. 311 ff. 1933.
4) *Coxeter:* J. of Math. Massachusetts p. 334 ff. 1933.
5) Briefliche Mitteilung von H. Hopf über ein Seminar von J. Schur 1921/22.